Antonín Sýkora
Jak vyjádříme obsah čtyřstěnu délkami hran

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 1, 81--84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124066

Eliminujeme-li nyní z rovnice této čili

$$(A\xi + B\eta + D) + M(B\xi + C\eta + E) = 0$$

a z rovnice

$$\eta - n = M(\xi - m)$$

směrnici M, nabudeme rovnice geometrického místa středů tětiv procházejících bodem (m, n)

$$(A\xi + B\eta + D)(\xi - m) + (B\xi + C\eta + E)(\eta - n) = 0$$

čili

$$\text{(IV)} \quad A\left(\xi - \frac{m}{2}\right)^2 + 2B\left(\xi - \frac{m}{2}\right)\left(\eta - \frac{n}{2}\right) + C\left(\eta - \frac{n}{2}\right)^2$$
$$+ D\left(\xi - \frac{m}{2}\right) + E\left(\eta - \frac{n}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}[Am^2 + 2Bmn + Cn^2 + 2Dm + 2En]$$

anebo, vezmeme-li $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ za počátek souřadnic, kladouce

$$\xi = \frac{m}{2} + x, \; \eta = \frac{n}{2} + y,$$

nabudeme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey$$
$$= \frac{1}{4}(Am^2 + 2Bmn + Cn^2 + 2Dm + 2En).$$

Jelikož součinitelé A, B, C kvadratických členů x^2, xy, y^2 jsou zde titíž, jako v dané rovnici, náležejí obě křivky vždy témuž druhu, jakož z rozboru křivky druhého stupně známo.

Jak vyjádříme obsah čtyrstěnu délkami hran.

Napsal

Antonín Sýkora,

professor v Rakovníku.

Znamenejme podstavné hrany čtyrstěnu písmeny a, b, c; protilehlé jim pobočné hrany po řadě α, β, γ, a úhly v trojúhelnících (a, b, c), (a, β, γ), (b, α, γ) ležící proti stranám c, β, α po řadě λ, ν, μ; pak jest obsah čtyrstěnu

$$V = \frac{1}{6} ab \sin\lambda \,.\, \gamma \sin\mu \,.\, \sin\varphi\,,$$

kdež φ odchylku stran (a, b, c), (b, α, γ) značí.

V trojhranu o hranách a, b, γ jest dle první základní rovnice sferické trigonometrie

$$\cos\nu = \cos\lambda \cos\mu - \sin\lambda \sin\mu \cos\varphi$$

a odtud

$$\cos\varphi = \frac{\cos\lambda \cos\mu - \cos\nu}{\sin\lambda \sin\mu}\,,$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{\cos\lambda \cos\mu - \cos\nu}{\sin\lambda \sin\mu}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2\lambda \sin^2\mu - (\cos\lambda \cos\mu - \cos\nu)^2}}{\sin\lambda \sin\mu}$$

a zavedeme-li tuto hodnotu do hořejšího vzorce pro obsah čtyrstěnu, píšíce zároveň $1 - \cos^2\lambda$, $1 - \cos^2\mu$ místo $\sin^2\lambda$, $\sin^2\mu$,

$$V = \frac{1}{6} ab\gamma \sqrt{(1-\cos^2\lambda)(1-\cos^2\mu) - \cos^2\lambda\cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}$$

$$= \frac{1}{6} ab\gamma \sqrt{1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}\,.$$

Nyní najdeme z trojúhelníků (a, b, c), (b, α, γ), (a, β, γ):

$$\cos\lambda = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\,,$$

$$\cos\mu = \frac{b^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2b\gamma}\,,$$

$$\cos\nu = \frac{a^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2a\gamma}$$

a vložíme-li tyto hodnoty za cosinusy úhlů λ, μ, ν do vzorce posledního, nabudeme

$$V = \frac{1}{6} ab\gamma \sqrt{\begin{array}{l} 1 - \left(\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2 - \left(\dfrac{b^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2b\gamma}\right)^2 - \left(\dfrac{a^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2a\gamma}\right)^2 \\ + 2 . \dfrac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + \gamma^2 - \alpha^2)(a^2 + \gamma^2 - \beta^2)}{8a^2b^2\gamma^2} \end{array}}$$

$$= \frac{1}{12} \sqrt{\begin{array}{l} 4a^2b^2\gamma^2 - \gamma^2(a^2 + b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2 - b^2(a^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2 \\ + (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + \gamma^2 - \alpha^2)(a^2 + \gamma^2 - \beta^2) \end{array}}$$

anebo

$$\begin{aligned} (12V)^2 = & - c^4\gamma^2 - a^4\alpha^2 - b^4\beta^2 - a^2\alpha^4 - b^2\beta^4 - c^2\gamma^4 \\ & - (abc)^2 - (\alpha\beta\gamma)^2 - (b\alpha\gamma)^2 - (c\alpha\beta)^2 \\ & + a^2\alpha^2(b^2 + \gamma^2 + c^2 + \beta^2) + b^2\beta^2(a^2 + \gamma^2 + c^2 + \alpha^2) \\ & + c^2\gamma^2(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

čili

$$\begin{aligned} 144V^2 = & \, a^2\alpha^2(b^2 + c^2 - a^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) \\ & + b^2\beta^2(a^2 + c^2 - b^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2) \\ & + c^2\gamma^2(a^2 + b^2 - c^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \\ & - [a^2b^2c^2 + a^2\beta^2\gamma^2 + b^2\alpha^2\gamma^2 + c^2\alpha^2\beta^2]. \end{aligned}$$

Poznámka 1. Jsou-li pobočné hrany α, β, γ sobě rovny, tedy pyramida přímá, jest

$$144V^2 = \alpha^2(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) - a^2b^2c^2;$$

uvážíme-li, že $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ značí $16P^2$, kdež P jest plocha základny (a, b, c), jakož i že $abc = 4PR$, kdež R jest poloměr kruhu základně opsaného, vidíme, že vzorec ten značí

$$V = \frac{P}{3}\sqrt{\alpha^2 - R^2},$$

t. j. třetinu součinu ze základny a výšky.

Poznámka 2. Je-li $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, bude čtyrstěn omezen čtyřmi shodnými trojúhelníky o stranách a, b, c; obsah V takové pyramidy bude stanoven vzorcem

$$\begin{aligned} 72V^2 & = a^4(b^2 + c^2 - a^2) + b^4(a^2 + c^2 - b^2) + c^4(a^2 + b^2 - c^2) - 2a^2b^2c^2 \\ & = a^4(b^2 + c^2 - a^2) - (b^2 - c^2)^2(b^2 + c^2 - a^2) \\ & = [a^4 - (b^2 - c^2)^2](b^2 + c^2 - a^2) \\ & = (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Poznámka 3. Pomocí determinantů jest vzorec pro V^2 odvozen v Baltzerových, Dostorových a Studničkových Determinantech.

O usměrňování jmenovatelů zlomků tvaru

$$\frac{P}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}}.$$

Napsal

Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

Jest známo, že součin

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

rovná se magickému determinantu

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}^{*)} = a^3+b^3+c^3-3\,abc.$$

Znásobíme-li tedy čitatele i jmenovatele daného zlomku šestičlenem

$$\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{B^2}+\sqrt[3]{C^2}-\sqrt[3]{AB}-\sqrt[3]{BC}-\sqrt[3]{AC},$$

nabudeme

$$\frac{P(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{B^2}+\sqrt[3]{C^2}-\sqrt[3]{AB}-\sqrt[3]{BC}-\sqrt[3]{AC})}{A+B+C-3\sqrt[3]{ABC}}.$$

Rozšíříme-li dále tento zlomek výrazem

$$(A+B+C)^2+3(A+B+C)\sqrt[3]{ABC}+9\sqrt[3]{A^2B^2C^2},$$

dostane týž racionalného jmenovatele

$$(A+B+C)^3-27\,ABC.$$

---

*) jehož hlavní úhlopříčka $= a^3$.