Sergěj Šišpanov

K otázce zobecněných rovnic Clairautových

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 3, 234--241

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124060

K otázce zobecněných rovnic Clairautových.

Sergěj Šišpanov.

(Referát podaný na III. sjezdu ruských učenců v Praze.)

Zobecněnými rovnicemi Clairautovými rozumím obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$F(x, y, y') = 0,$$

jejichž obecný integrál dá se vyjádřiti ve tvaru

$$F(x, y, C) = 0,$$

povstává totiž z dané rovnice proměnou y' v C.

Vyšetřování diferencialních rovnic tohoto tvaru redukuje se na řešení systému parcialních rovnic a v obecném případě poskytuje značné obtíže následkem mnohoznačnosti funkcí. Pokud je mi známo, byl systèm, o kterém jsem se výše zmínil, integrován jen pro rovnice kvadratické v y'.

V tomto referátu chci vyložiti jednoduchý způsob, který vede rychle k cíli při řešení rovnic 1. a 2. stupně vzhledem k y. Potom ukáži jeden příklad zobecněné rovnice Clairautovy libovolného stupně v y.

Budiž obecný integrál hledané diferencialní rovnice dán tvarem

$$\prod_{i=1}^{i=m} [y - f_i(x, C)] = 0.$$

Příslušná rovnice diferenciální je pak

$$\prod_{i=1}^{i=m} [y - f_i(x, y')] = 0,$$

kde f_i znamená buď funkce jednoznačné, nebo určité hodnoty funkcí mnohoznačných. Dejme tomu, že prvnímu činiteli obecného integrálu odpovídá nějaký α_1-tý činitel diferenciální rovnice, t. j.

$$y - f_1(x, C) = 0$$

jest integrálem rovnice

$$y - f_{\alpha_1}(x, y') = 0;$$

druhému činiteli

$$y - f_2(x, C)$$

nechť odpovídá α_2-tý činitel

$$y - f_{\alpha_2}(x, C) \quad \text{atd.}$$

Ježto každá substituce
$$\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, m \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \end{pmatrix}$$
se dá rozložiti v cykly, můžeme spojením součinitelů do vhodných skupin a po případě i změnou jejich číslování dospěti k těmto vztahům:
$$y = f_1(x, C), \quad y = f_2(x, C), \ldots, \quad y = f_n(x, C),$$
$$y = f_2(x, y'), \quad y = f_3(x, y'), \ldots, \quad y = f_1(x, y').$$
Zde jsou v prvním řádku vypsány jednotlivé integrály, na něž se rozpadá obecný integrál a v druhém řádku odpovídající jim diferenciální rovnice. Každý následující integrál vzniká z předešlé diferenciální rovnice proměnou y' v C. Číslo n může býti $\leq m$. Jest tedy obecný integrál zobecněné rovnice Clairautovy, algebraické podle y, součinem různých cyklů tvaru
$$(y - f_1) \cdot (y - f_2) \ldots (y - f_n).$$
Z toho plyne, že naši úlohu je možno převésti na stanovení funkce f_1, kterou se začínají cykly, s jedním, dvěma, třemi atd. členy.

Derivujeme-li první vztah
$$y = f_1(x, C)$$
podle x, obdržíme
$$y' = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, C).$$

Probereme nejdříve zvláštní případ, kdy pravá strana tohoto posledního výrazu jest funkce jen C, t. j.
$$y' = A(C).$$
Pak bude
$$y = f_1(x, C) = A(C) \cdot x + B(C),$$
kde B je libovolná funkce. Z toho plyne, že
$$y = f_2(x, y') = xy' + B[A^{-1}(y')],$$
značí-li A^{-1} jednu z funkcí inversních k funkci A. Dále jest
$$y = f_2(x, C) = Cx + BA^{-1}(C)$$
a
$$y = f_3(x, y') = xy' + BA^{-1}(y').$$
Pokračujíce tak od druhého integrálu k třetímu atd., najdeme konečně
$$y = f_n(x, C) = Cx + BA^{-1}(C),$$
$$y = f_1(x, C) = Cx + BA^{-1}(C).$$

Ze srovnání posledního výrazu s výrazem $f_1(x, C)$, obdrženým dříve, plyne, že
$$A(C) = C.$$
Jsou si tedy všechny členy cyklu
$$(y - f_1) \cdot (y - f_2) \ldots (y - f_n) = 0$$

navzájem rovny a mají tvar

$$y - [Cx + B(C)],$$

t. j. cyklus dá se převésti na cyklus jednočlenný

$$[y - Cx - B(C)]^n = 0 \tag{1}$$

tvaru Clairautova.

Dejme tomu, že pravá strana rovnice

$$y' = p = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, C)$$

závisí na x. Řešením rovnice podle této proměnné obdržíme

$$x = \varphi_1(p, C),$$

kde φ_1 jest jakákoliv určitá hodnota funkce inversní k $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x)$.

Dosadíme $\varphi_1(p, C)$ místo x do výrazu y, dostaneme

$$y = f_1(x, C) = f_1[\varphi_1(p, C), C] = \psi_1(p, C).$$

Takovým způsobem zkoumaný integrál bude vyjádřen v parametrickém tvaru

$$x = \varphi(p, C), \quad y = \psi(p, C),$$

kde p a C jsou pomocné nezávisle proměnné.

Vyloučíme-li z toho p, obdržíme obecný integrál ve tvaru explicitném

$$y = f_1(x, C);$$

vyloučíme-li C, obdržíme následkem rovnosti

$$p = y'$$

příslušnou diferenciální rovnici

$$y = f_2(x, p).$$

Probereme nejdříve případ jednočlenného cyklu. V tomto případě výsledky vyloučení p a C mají býti stejné, t. j.

$$y = f_1(x, C), \qquad y = f_1(x, p).$$

K tomu účelu stačí zvoliti funkce φ_1 a ψ_1 souměrné podle p a C.

Ježto

$$p = \frac{dy}{dx},$$

je

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial p} = p \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial p}$$

a následkem souměrnosti

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial C} = C \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial C}.$$

Derivujeme-li první z obdržených vztahů podle C, a druhý podle p, dostaneme

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial p \partial C} = p \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial p \partial C}, \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial C \partial p} = C \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial C \partial p}.$$

Odečtením dostaneme

$$(p - C) \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial p \partial C} = 0.$$

Předpoklad, že $p = C$, byl již probrán. Integrujeme-li zbývající rovnici

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial p \partial C} = 0$$

a uvážíme-li souměrnost, dostaneme

$$x = \varphi_1 (p, C) = M(p) + M(C), \tag{2a}$$

kde M je libovolná funkce.

Dosadíme-li tento výsledek do výrazu pro parciální derivace

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial p} \text{ a } \frac{\partial \psi_1}{\partial C},$$

dostaneme

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial p} = p \,.\, M'(p), \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial C} = C \,.\, M'(C).$$

Odtud

$$y = \psi_1 (p, C) = \int p M'(p)\, dp + \int C M'(C)\, dC. \tag{2b}$$

Položíme-li na příklad $M(t) = t$,

dospějeme k systému $x = p + C, \; y = \frac{1}{2} p^2 + C^2.$

Eliminací C dostaneme diferenciální rovnici

$$y = y'^2 - xy' + \frac{1}{2} x^2,$$

a eliminací p podobný s ní obecný integrál

$$y = C^2 - Cx + \frac{1}{2} x^2.$$

Zvolíme-li $M(t) = ln\, t$,

dostaneme $x = ln\, pC, \; y = p + C.$

Provedením eliminace dospějeme k rovnici Raffieho

$$y = y' + \frac{e^x}{y'}$$

s integrálem

$$y = C + \frac{e^x}{C}.$$

Nechávajíce stranou otázku o existenci jednočlenných cyklů tvaru obecnějšího, přejdeme k cyklům dvojčlenným

$$y = f_1 (x, C), \qquad y = f_2 (x, C),$$
$$y = f_2 (x, p), \qquad y = f_1 (x, p).$$

Pro první integrál ponechme dřívější označení a pro druhý zaveďme

$$x = \varphi_2(p, C)$$

$$y = f_2[\varphi_2(p, C), C] = \psi_2(p, C),$$

kde φ_2 je jakékoliv určité řešení rovnice

$$p = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, C)$$

podle x.

Budou tedy naše integrály dány ve tvaru parametrickém

$$x = \varphi_1(p, C), \qquad x = \varphi_2(p, C),$$

$$y = \psi_1(p, C), \qquad y = \psi_2(p, C).$$

Eliminací p anebo C převedou se tyto integrály a příslušné diferenciální rovnice na tvar explicitní. Nechť mají tvar:

$$y = f_1(x, C), \qquad y = f_2(x, C),$$

$$y = f_2(x, p), \qquad y = f_1(x, p).$$

Veličiny p a C jsou v obou případech pomocné proměnné. Nabudou-li p a C, nacházející se v prvních sloupcích, hodnoty číselné rovné hodnotám p a C, nacházejícím se v druhých sloupcích, nebudou obecně korespondující hodnoty x-ů, jakož i hodnoty y-ů stejné. Obdobně odpovídají hodnotám x-ů a y-ů stejným pro oba sloupce různé hodnoty p a C.

Přemístíme-li v druhých sloupcích p a C, přijdeme ke vztahům

$$x = \varphi_1(p, C), \qquad x = \varphi_2(C, p),$$

$$y = \psi_1(p, C), \qquad y = \psi_2(C, p)$$

a

$$y = f_1(x, C), \qquad y = f_1(x, C),$$

$$y = f_2(x, p), \qquad y = f_2(x, p).$$

Nejjednodušeji bude vyhověno těmto vztahům, když zvolíme

$$\varphi_1(p, C) = \varphi_2(C, p) \quad \text{a} \quad \psi_1(p, C) = \psi_2(C, p).$$

Jsou-li C a p jednoznačně určeny rovnicemi

$$f_1(x, C) = y \quad \text{a} \quad f_2(x, p) = y,$$

je tato cesta jediná možná.

Připomeneme-li si, že pro první sloupec platí

$$p = \frac{dy}{dx},$$

a že v druhém sloupci písmena p a C jsou přemístěna, dostaneme

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial p} = p \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial p}, \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial C} = C \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial C}.$$

Postupujíce dále jako dříve, přijdeme konečně ke vztahům:

$$x = M(p) + N(C), \tag{3a}$$

$$y = \int pM'(p)\,dp + \int CN'(C)\,dC. \tag{3b}$$

Vyloučením p dostaneme první integrál

$$y = f_1(x, C),$$

a vyloučením C odpovídající diferenciální rovnici

$$y = f_2(x, p).$$

Přemístěním p a C ve výsledcích dostaneme druhý integrál a příslušné rovnice.

Zvolíme-li, na příklad

$$M = p^{-1/2}, \quad N = C^{-1/2},$$

dostaneme

$$y = \frac{Cx}{1 + x\sqrt{C}}, \quad y = \frac{Cx}{1 - x\sqrt{C}},$$

$$y = \frac{px}{1 - x\sqrt{p}}, \quad y = \frac{px}{1 + x\sqrt{p}}.$$

Konečně obdržíme následující rovnici kvadratickou v y, jejíž obecný integrál se určí přeměnou y' v C:

$$(x^2 y' - 1) \cdot y^2 + 2xy' \cdot y - x^2 y'^2 = 0.$$

Dříve probraný jednočlenný cyklus je patrně speciálním případem cyklu dvoučlenného, když funkce M a N jsou stejné, následkem čehož oba součinitelé

$$y - f_1(x, C) \quad \text{a} \quad y - f_2(x, C)$$

se stotožňují.

Z cyklů, obsahujících libovolný počet součinitelů, probereme jednodušší, kde

$$y = f_1(x, C) = g(x) \cdot C + h(x).$$

Příslušná diferenciální rovnice má patrně tvar

$$y = f_2(x, C) = \frac{g(x)}{g'(x)} \cdot y' + \left[h(x) - \frac{g(x)}{g'(x)} \cdot h'(x)\right]$$

a tedy integrál bude

$$y = f_2(x, C) = \frac{g}{g'} \cdot C + (h - \frac{g}{g'} \cdot h') \quad \text{atd.}$$

Operaci $\frac{g}{g'}$ označíme symbolem $\delta(g)$. Aby $n+1$ní integrál

$$y = f_{n+1}(x, C)$$

ztotožnil se s prvním $y = f_1(x, C)$

je nutno, aby $\underbrace{\delta\delta \ldots . \delta}_{n}(g) = g.$ (*)

Poslední diferenciální rovnici není asi možno integrovati kvadraturami. Na příklad obdržíme při $n=3$ po dvojnásobném snížení řádu rovnici Liouvilleovu.

Avšak při libovolném n rovnice (*) má zřejmě řešení

$$g(x) = x - a.$$

V tomto případě dojdeme pro určení $h'(x)$ k rovnici Eulerově řádu $n-1$.

Provedeme-li kvadratury, dostaneme definitivně

$$h(x) = b + k_1 \,.\, (x-a)^{1-\omega} + k_2 \,.\, (x-a)^{1-\omega^2} + \cdots$$
$$\cdots + k_{n-1} \,.\, (x-a)^{1-\omega^{n-1}}$$

a

$$y - b = C \,.\, (x-a) + k_1 \,.\, (x-a)^{1-\omega} + k_2 \,.\, (x-a)^{1-\omega^2} + \cdots$$
$$\cdots + k_{n-1} \,.\, (x-a)^{1-\omega^{n-1}},$$

kde ω je primitivní n-tý kořen jednotkový, a stálé koeficienty

$$a,\ b;\ k_1,\ k_2, \ldots, k_{n-1}$$

jsou libovolné.

Následující integrál bude míti tvar

$$y-b = C \,.\, (x-a) + \omega \,.\, k_1 \,.\, (x-a)^{1-\omega} + \omega^2 \,.\, k_2 \,.\, (x-a)^{1-\omega^2} + \cdots$$
$$\cdots + \omega^{n-1} \,.\, k_{n-1} \,.\, (x-a)^{1-\omega^{n-1}} \quad \text{atd.}$$

Součin ze všech n integrálů dá úplný cyklus

$$\prod_{i=0}^{i=n-1} \Big[(y-b) - C(x-a)\,\omega^i \,.\, k_1 (x-a)^{1-\omega} - \omega^{2i} \,.\, k_2 \,.\, (x-a)^{1-\omega^3} - \cdots$$
$$\cdots - \omega^{(n-1)i} \,.\, k_{n-1} (x-a)^{1-\omega^{n-1}} \Big] = 0. \tag{4}$$

Pro $n=3$; $a=0$, $b=0$ nalezneme

$$y - Cx = k_1 \,.\, x^{1-\omega} + k_2 \,.\, x^{1-\omega^2},$$
$$y - Cx = \omega k_1 \,.\, x^{1-\omega} + \omega^2 k_2 \,.\, x^{1-\omega^2},$$
$$y - Cx = \omega^2 k_1 \,.\, x^{1-\omega} + \omega k_2 \,.\, x^{1-\omega^2}.$$

Položíme-li $k_1 = k_2$, čehož je třeba, chceme-li míti rovnici s reálnými koeficienty a zvolíme-li dále pro stručnost $k_1 = k_2 = 1$, dospějeme konečně k následující nejjednodušší rovnici 3-ho stupně v y:

$$(y - xy')^3 - 3x^3 \,.\, (y - xy') = 2 \,.\, x^4 \,.\, \sqrt{x} \,.\, \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, ln\, x\right),$$

jejíž obecný integrál obdržíme proměnou y' v C.

Jest jasno, že součin několika cyklů tvaru (4) bude také obecným integrálem příslušné rovnice Clairautovy.

Sur les équations généralisées de Clairaut.

(Extrait de l'article précédent.)

1. La classification la plus commode des équations généralisées de Clairaut est celle faite d'après les puissances de y. Par rapport à x et $y' = p$ l'équation peut même être transcendante.

2. La recherche générale des équations de ce genre conduit à la détermination d'une fonction $f_1(x, p)$ donnant naissance à un cycle de l'ordre n:

$$[y - f_1(x, p)] \cdot [y - f_2(x, p)] \dots [y - f_n(x, p)] = 0;$$

l'équation $y = f_1(x, p)$ a l'intégrale $y = f_2(x, C)$ etc.

3. En supposant que $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ soit indépendante de x, le cycle se réduit à la forme

$$[y - xp + B(p)]^n = 0.$$

4. Pour obtenir un cycle à deux termes, nous supposons

$$x = M(p) + N(C) \quad \text{et} \quad y = \int p M'(p)\, dp + \int C N'(c)\, dC.$$

L'élimination de p fournit l'intégrale $y = f_1(x, C)$, et celle de C l'équation correspondante $y = f_2(x, p)$, et réciproquement. On obtient l'intégrale générale de l'équation

$$[y - f_1(x, p)] \cdot [y - f_2(x, p)] = 0$$

en remplaçant p par C.

5. Dans le cas d'égalité des fonctions M et N on arrive à un cycle à un terme.

6. En supposant que, dans le cycle de l'ordre n, la fonction $f_1(x, p)$ soit linéaire par rapport à p, on réduit le problème à la détermination de $g(x)$ de l'équation

$$\underbrace{\delta\delta \dots \delta}_{n}(g) = g,$$

$\delta(g)$ désignant l'opération différentielle $\frac{g(x)}{g'(x)}$.

7. Au moyen d'une intégrale particulière $g(x) = x - a$ on obtient le terme principal du cycle

$$y - b = (x - a) \cdot p + k_1 \cdot (x - a)^{1-\omega} + k_2 \cdot (x - a)^{1-\omega^2} + \dots$$
$$\dots + k_{n-1} \cdot (x - a)^{1-\omega^{n-1}},$$

ω étant une racine primitive de l'unité du n-me dégré. Les coefficients

$$a,\ b;\ k_1,\ k_2, \dots, k^{n-1}$$

sont arbitraires. On obtient les autres termes du cycle en remplaçant

$$k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \quad \text{par} \quad \omega^i k_1,\ \omega^{2i} k_2, \dots, \omega^{(u-1)i} k_{n-1},$$
$$(i = 1, 2, \dots, n-1).$$