Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Jeřábek

O vnitřní souvislosti některých úloh Appoloniova problému. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 4, 511--522

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124036

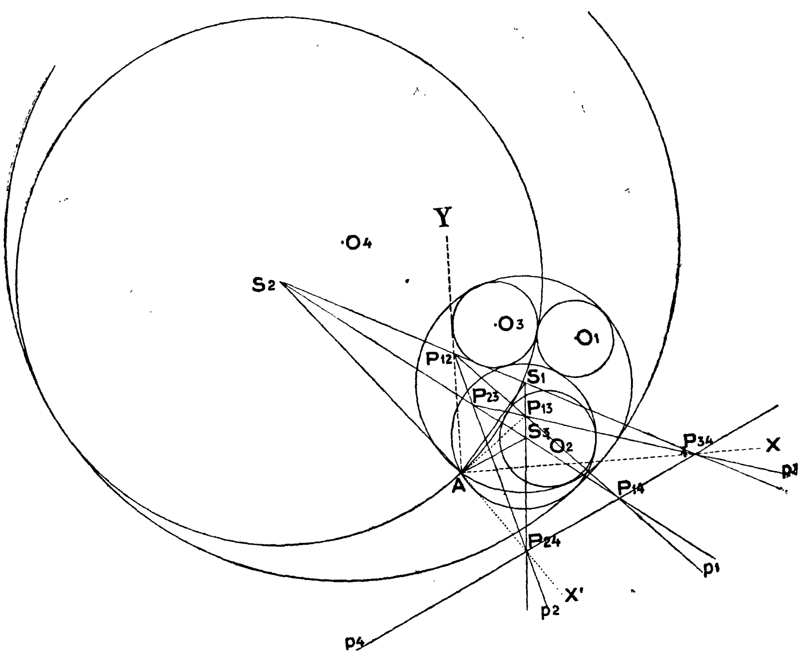
O vnitřní souvislosti některých úloh Apolloniova problému.†)

Napsal **Ant. Jeřábek.**

(Dokončení.)

IV.

Pošineme-li *dané kružnice* K_1, K_2, K_3 *), *až všechny tři* probíhají *společným* bodem A, můžeme položiti úlohu další:



Obr. 5.

Úloha IV. *Sestrojiti střed kružnice, která se dotýká tří kružnic* K_1, K_2, K_3, *procházejících daným bodem* A, *jsou-li dány jejich středy* S_1, S_2, S_3 (obr. 5.).

---

†) Oprava. Na str. 370. ř. 4. a 11. má býti ($\varrho \mp r_1$) místo ($\varrho \pm r_1$).

*) Dané a hledané kružnice jsou zde označeny opačně než ve II. vzhledem ku V. — Kružnice K_1, K_2, K_3 poznáme v obr. 5. dle jejich středů S_1, S_2, S_3.

Úlohu IV. můžeme pokládati za *zvláštní* případ úlohy *obecné*; avšak řešení provedeme též na základě dosavadních výsledků.

I. Řešení užitím algebry.

Bod A jakožto *nekonečně malá kružnice* vyhovuje sám *čtyřikrát* danému úkolu, stávaje se *jedním členem* každé ze *čtyř* hledaných dvojic (AO_1), (AO_2), (AO_3), (AO_4). —

Dle věty B úlohy II. jsou *chordály těchto dvojic* p_1, p_2, p_3, p_4 *čtyřmi osami podobnosti daných tří kružnic* K_1, K_2, K_3.

Vyhledejme tedy čtyři osy podobnosti kružnic K_1, K_2, K_3 a na jejich kolmicích AX_1, AX_2, AX_3, AX_4 sestrojme středy O_1, O_2, O_3, O_4 způsobem známým z úlohy předešlé. (1. sestrojení.)

2. Řešení užitím podobnosti.

Budiž K *kterákoliv* ze *tří daných* kružnic K_1, K_2, K_3, a S její *střed*; budiž dále p_i *chordála* bodu A a hledané kružnice O_i, i $SN_i \perp p_i$. Dle předešlého řešení lze p_i pokládati za *danou*.

Je-li $AX_i \perp p_i$, *leží* O_i *na* AX_i, a dle (3) jest

$$\frac{SN_i}{SA} = \frac{r_i}{O_iA}. \qquad (19)$$

Sestrojení *a*) *Chordála* p_i protíná *danou* kružnici K v bodech *reálných* T (obr. 6.).

Učiňme $AX_i \perp p_i$, $AR \# TS$, $\sphericalangle ARQ = R$ (Q na AX_i); *hledaný dotyčný* bod Z leží pak na *rovnoběžce* ku QS *bodem* A *vedené*. — (Prodloužíme-li SZ, až protne AX_i, získáme *hledaný střed* O_i.)

Důkaz.

$$\frac{SN_i}{SA} = \frac{SN_i}{ST} = \frac{AR}{AQ} = \frac{ZS}{AQ} = \frac{O_iZ}{O_iA},$$

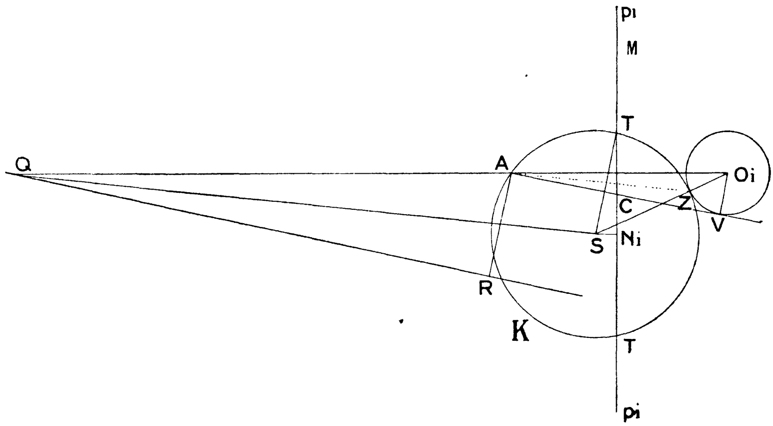
čímž podmínce (19) jest vyhověno.

Sestrojení. *b*) *Chordála* p_i protíná *danou* kružnici K v bodech *imaginárných* (obr. 7.). Veďme tečnu N_iT ku K, $AV \| p_i$ $LQ \# ST$ (L na AX_i, Q na AV); *hledaný dotyčný* bod Z leží potom na *rovnoběžce*, ku LS *bodem* A *vedené*. — *Důkaz obdobou* snadno provede čtenář.

3. Řešení. *a*) *Rozbor* (obr. 6.). Je-li AV tečnou *hledané* kružnice, musí *pravoúhlé* trojúhelníky STN_i a O_iAV býti podobny, má-li vyhověno býti podmínce (19)

$$\frac{SN_i}{ST} = \frac{O_iV}{O_iA};$$

ale potom $AV \perp ST$. Mimo to $AC = CV$, jak z pojmu *chordály* p_i vyplývá.



Obr. 6.

Sestrojení. Spusťme $AC \perp ST$ (C na p_i) a prodlužme kolmici AC o vlastní délku do V, i učiňme $\sphericalangle AVO_i = R$.

b) *Rozbor* (obr. 7.). Je-li $\left\{\begin{matrix} N_iT \\ VC \end{matrix}\right\}$ *tečnou* $\left\{\begin{matrix} \text{dané} \\ \text{hledané} \end{matrix}\right\}$ kružnice, musí *pravoúhlé* trojúhelníky STN_i a O_iAV dle (19) býti podobny, a proto $\sphericalangle AVO_i = \sphericalangle SN_iT$.

Mimo to musí $VC = CA$, jak vysvítá z pojmu *chordály* p_i. Je-li $CE \perp AV$, jest $\sphericalangle AVO_i = \sphericalangle VCE = \sphericalangle ECA$ a tedy též $\sphericalangle ECA = \sphericalangle SN_iT$.

Sestrojení. Veďme $AC \parallel TN_i$, učiňme $CV = CA$, a $VO_i \perp CV$.

4. Řešení. Pokládejme (obr. 7.) chordálu p_i za *poláru* ku K, sestrojme její *pól* H; i jest *hledaný dotyčný bod* Z na *spojnici* AH.

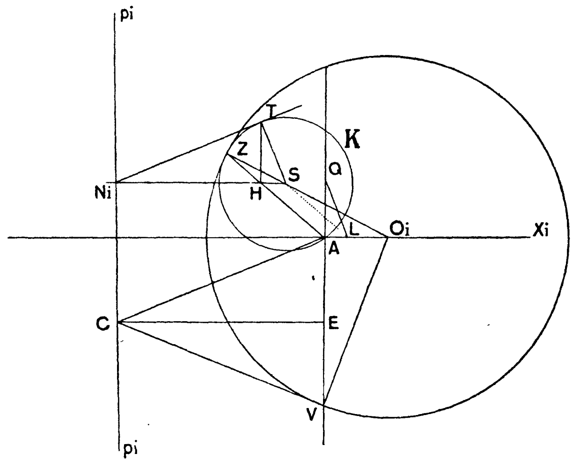
Důkaz. Dle sestrojení jest

$$\frac{SN_i}{ST}=\frac{ST}{SH}=\frac{SZ}{SH}=\frac{O_iZ}{O_iA},$$

čímž podmínka (19) je splněna. —

Obdobně provede se řešení, když *polára p_i* protíná *danou* kružnici K v *bodech reálných*, což zůstavuje se laskavému čtenáři.

Poznámka. Toto řešení vyplývá též z obecného řešení Gergonnova; bod A totiž je *středem chordálným daných kružnic, a chordály p_1, p_2, p_3, p_4* jsou *osami podobnosti těchže.*



Obr. 7.

5. Řešení plyne *z obecného II. γ.* (obr. 6.).

Společný bod *tří daných* kružnic A jest nejen *chordálným jejich středem*, ale také *nekonečně malou* kružnicí Π (srov. II. γ); *chordála* kružnic K a Π jeví se *tečnou t* kružnice K v bodě A. Zbývá tudíž jen *kolem M* (průsečíku přímek p_i a t) opsati kružnici, *procházející bodem A* a najíti tak na K *dotyčný* bod Z. — (Srov. též 2. sestrojení úlohy III.)

V.

O poměru úlohy IV. k úloze I.

Úloha IV. vznikla ze II. tím, že jsme změnili obecnou polohu daných kružnic; můžeme však ukázati, že ji i s I. úlohou lze uvésti v poměr, užije-li se *změny logické* tak *zvaného obratu* (*conversio*). Poměru úloh obrácených IV. a I. není zde ovšem rozuměti tak, že by v *soudech hypothetických*, k nimž vede řešení *jednoho* a *druhého* úkolu, *podmínka* s *podmíněným* naprosto byly zaměněny, jako se stalo v úloze III., ale že přidáno býti musí *látky v podmínce* (*conditio*) úlohy IV., aby získáno bylo *podmíněné* (*conditionatum*) pro úlohu I.

Za tím účelem přidružme v *mysli* k daným kružnicím ještě *čtvrtou*

$$\left\{\begin{matrix} K_4^{\mathrm{I}} \\ K_4^{\mathrm{II}} \end{matrix}\right\},$$

která (srov. poznámku k úloze I.) na př. s K_3 *tvoříc dvojici*, *prochází bodem* A a *kružnic* $\left\{\begin{matrix} O_1, O_2 \\ O_3, O_4 \end{matrix}\right\}$ *se dotýká.*

Patrně lze potom učiniti *obrat souvětím*:

Sestrojiti kružnici $\left\{\begin{matrix} K^{\mathrm{I}} \\ K^{\mathrm{II}} \end{matrix}\right\}$, *jež probíhajíc bodem* A *kružnic* $\left\{\begin{matrix} O_1, O_2 \\ O_3, O_4 \end{matrix}\right\}$ *se dotýká.*

Jsme předem přesvědčeni, že řešením odpoví se na K^{I} dvojicemi (K_1K_2), $(K_3K_4^{\mathrm{I}})$ a na K^{II} dvojicemi (K_1K_2), $(K_3K_4^{\mathrm{II}})$. Soudíme tudíž dle *důsledku* I. úlohy I., že v této *dvojité úloze* chordálný střed $\left\{\begin{matrix} P_{12} \\ P_{34} \end{matrix}\right\}$*) kružnic $\left\{\begin{matrix} O_1, O_2, A \\ O_3, O_4, A \end{matrix}\right\}$ jest *společným středem podobnosti dvojic* $\left\{\begin{matrix} (K_1K_2), (K_3K_4^{\mathrm{I}}) \\ (K_1K_2), (K_3K_4^{\mathrm{II}}) \end{matrix}\right\}$. —

*) Měli bychom psáti $P_{1,2}$ a $P_{3,4}$; však i nadále budeme užívati označení udavatelů bez čárky, takže P_{ij} znamenati bude chordálný střed kružnic O_i, O_j a bodu A, neboli průsečík chordál p_i a p_j. — Dle toho leží $\left\{\begin{matrix} S_4^{\mathrm{I}} \\ S_4^{\mathrm{II}} \end{matrix}\right\}$ na $\left\{\begin{matrix} P_{12}S_3 \\ P_{34}S_3 \end{matrix}\right\}$.

Patrně přichází dvojice (K_1K_2) *společně v obou řádcích* našeho souvětí; *nemůže tedy býti jinak než*, že v jednom *chordálný střed* je *vnitřním* a v druhém řádku *vnějším středem podobnosti dvojice* (K_1K_2). Snadno tudíž získáme *chordálné středy* P_{12}, P_{34} jako *průsečíky ramen pravého úhlu* XAY se *střednou* S_1S_2, je-li totiž AY *symmetrálou úhlu* S_1AS_2 (obr. 5.). —

Uvažujme dále. —

1. (K_1K_2) odpovídá páru dvojic $\begin{pmatrix} O_1O_2 \\ O_3O_4 \end{pmatrix}$, když ku K_3 přidružíme kružnici $\begin{Bmatrix} K_4^{\mathrm{I}} \\ K_4^{\mathrm{II}} \end{Bmatrix}$.

Však můžeme též ku K_2 přidružiti kružnici $\begin{Bmatrix} K_4^{\mathrm{III}} \\ K_4^{\mathrm{IV}} \end{Bmatrix}$ a konečně i ku K_1 kružnici $\begin{Bmatrix} K_4^{\mathrm{V}} \\ K_4^{\mathrm{VI}} \end{Bmatrix}$.

Jinými slovy:

Ze *tří daných* kružnic lze sestaviti v úloze IV. *tři páry skupin*

$$\begin{Bmatrix} (K_1K_2), & (K_3K_4^{\mathrm{I}}) \\ (K_1K_2), & (K_3K_4^{\mathrm{II}}) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} (K_1K_3), & (K_2K_4^{\mathrm{III}}) \\ (K_1K_3), & (K_2K_4^{\mathrm{IV}}) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} (K_2K_3), & (K_1K_4^{\mathrm{V}}) \\ (K_2K_3), & (K_1K_4^{\mathrm{VI}}) \end{Bmatrix}$$

se *společnými* dvojicemi *obou řádků*

$$(K_1K_2), \quad (K_1K_3), \quad (K_2K_3).$$

Právě tolik lze utvořiti *párů dvojic ze čtyř hledaných* kružnic

$$\begin{pmatrix} O_1O_2 \\ O_3O_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O_1O_3 \\ O_2O_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O_2O_3 \\ O_1O_4 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Protože řešením IV. úlohy vždy jen *tytéž čtyři* kružnice O_1, O_2, O_3, O_4 vyplynou, ať sdružíme ve dvojici (K_1K_2) nebo (K_1K_3) nebo (K_2K_3), budou i *chordály hledaných kružnic a bodu* A i jejich *průsečíky* P_{ij} na tom kterém sdružení daných kružnic *nezávislé a tedy stále tytéž*. —

2. Přepokládáme-li, že p_4 značí chordálu, jež jest *vnější osou podobnosti kružnic* K_1, K_2, K_3, pak jsou P_{34}, P_{24}, P_{14}, *ležíce na* p_4, *vnějšími středy podobnosti dvojic*, sestavených

$$\text{z } K_1, K_2, K_3. \tag{21}$$

Důsledně jsou potom zbývající P_{12}, P_{13}, P_{23} *vnitřními středy podobnosti těchže.* (22)

3. Aby též $(K_1 K_3)$ odpovídalo páru dvojic $\begin{pmatrix} O_1 O_3 \\ O_2 O_4 \end{pmatrix}$, označme p_1 onu *chordálu,* která vybíhajíc z P_{12} prochází mezi S_1 a S_3, což dle (22) jest přípustno.

Potom ovšem nezbývá než, že *třetí* dvojice $(K_2 K_3)$ odpovídá jen *zbývajícímu páru* $\begin{pmatrix} O_2 O_3 \\ O_1 O_4 \end{pmatrix}$ dle (20), což právě s (21) a (22) souhlasí; neboť dle předcházejícího předpokladu P_{23} nutně *vnitřním* a P_{14} *vnějším* středem podobnosti byly předurčeny. —

Shrneme-li učiněné předpoklady, že totiž

1. *dvojici* $(K_1 K_2)$ odpovídá *sdružení dvojic* $(O_1 O_2)$ a $(O_3 O_4)$,
2. p_4 jest *vnější osou* kružnic K_1, K_2, K_3,
3. p_1 prochází *mezi* S_1 a S_3,

shledáváme, že *jednoznačně* určeno jest jimi jakožto *přípustnými**) řešení a to tak, že důsledně *dvojici* $(K_1 K_3)$ přísluší *sdružení dvojic* $(O_1 O_3)$ a $(O_2 O_4)$, a *dvojici* $(K_2 K_3)$ opět *sdružení dvojic* $(O_2 O_3)$ a $(O_1 O_4)$.

Jest tedy zároveň

$$\left\{\begin{matrix} P_{12} \\ P_{34} \end{matrix}\right\} \text{ středem chordál. } \left\{\begin{matrix} O_1 O_2 A \\ O_3 O_4 A \end{matrix}\right\} \text{ a středem podobn. } \left\{\begin{matrix} \textit{vnitřním} \\ \textit{vnějším} \end{matrix}\right\}$$

dvojice $(K_1 K_2)$,

$$\left\{\begin{matrix} P_{13} \\ P_{24} \end{matrix}\right\} \text{ středem chordál. } \left\{\begin{matrix} O_1 O_3 A \\ O_2 O_4 A \end{matrix}\right\} \text{ a středem podobn. } \left\{\begin{matrix} \textit{vnitřním} \\ \textit{vnějším} \end{matrix}\right\}$$

dvojice $(K_1 K_3)$,

$$\left\{\begin{matrix} P_{23} \\ P_{14} \end{matrix}\right\} \text{ středem chordál. } \left\{\begin{matrix} O_2 O_3 A \\ O_1 O_4 A \end{matrix}\right\} \text{ a středem podobn. } \left\{\begin{matrix} \textit{vnitřním} \\ \textit{vnějším} \end{matrix}\right\}$$

dvojice $(K_2 K_3)$.

---

*) Předpokladem

[1]) rozlišeny dvě dvojice očekávaných kružnic, t. j. pojmenovány dvojice,

[2]) rozlišeny p_3 a p_4 t. j. pojmenovány kružnice ve druhé dvojici,

[3]) rozlišeny p_1 a p_2 t. j. pojmenovány kružnice v první dvojici.

Užitím *logického obratu* tudíž dospěli jsme k výsledku:

Středné daných kružnic (v úloze IV.) rozděleny jsou harmonicky chordálnými středy „bodu A a příslušných hledaných dvojic“.

Výsledku téhož lze docíliti cestou *geometrickou* na základě *úplného čtyřstranu* $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$, jehož *rohy* jsou *chordálné středy* P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34} a jehož *diagonálné rohy* jsou *středy daných kružnic* S_1, S_2, S_3. (Srov. Ed. Weyr: *Projektivná geom.* str. 28.)

Poznámka. Sestrojením *symmetrály úhlu* $\left\{ \begin{matrix} S_1AS_2 \\ S_2AS_3 \end{matrix} \right\}$ nabudeme bodů $\left\{ \begin{matrix} P_{12}, P_{34} \\ P_{23}, P_{14} \end{matrix} \right\}$. Spojíme-li pak P_{12} s $\left\{ \begin{matrix} P_{14} \\ P_{23} \end{matrix} \right\}$, obdržíme $\left\{ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right\}$; učiníme-li tak s P_{34} a $\left\{ \begin{matrix} P_{23} \\ P_{14} \end{matrix} \right\}$, získáme $\left\{ \begin{matrix} p_3 \\ p_4 \end{matrix} \right\}$. (Srov. s důsledkem II. úlohy I.)

Návodu tohoto mohlo by na př. užito býti v řešení 2., 3. 4. a 5. úlohy IV., aby sestrojeny byly chordály p_1, p_2, p_3, p.

VI.

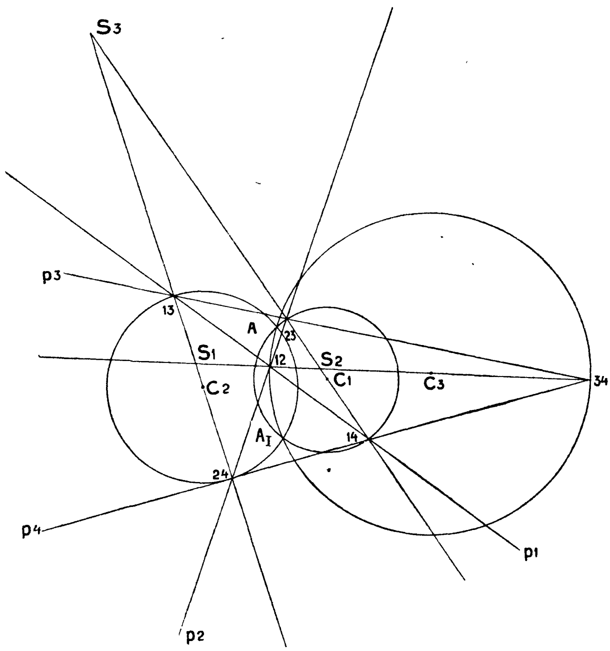
O poměru úlohy IV. k úloze II.

Abychom vyšetřili poměr úlohy IV. ke II. zevrubněji, předešleme úlohu, jež poskytujíc látku k úloze IV., má se k této jako *důvod k následku.*

Úloha V. *Jsou dány čtyři osy podobnosti* p_1, p_2, p_3, p_4; *sestrojiti tři příslušné kružnice, které procházejí společným bodem.*

Řešení. $p_1p_2p_3p_4$ tvoří *úplný čtyřstran* (obr. 8.). Spojíme-li *protější rohy* a prodloužíme-li spojnice až k průsečíkům, obdržíme *diagonálné rohy čtyřstranu* buď $S_1S_2S_3$ nebo S_1, S_2, S_4 nebo S_1. S_3, S_4 nebo S_2, S_3, S_4 jakožto *středy hledaných kružnic.*

Dejme tomu, že vznikne trojstran $S_1S_2S_3$. — Sestrojme pak *nad kterýmikoli dvěma diagonálnými stranami* na př. $P_{12}P_{34}$, $P_{13}P_{24}$ jakožto *průměry* dvě kružnice, (C_3, C_2), které se protnou ve *dvou bodech* A (A_1), [tak zvané **Apolloniovy***) *kružnice trojúhelníku* S_1AS_2 *a trojúhelníku* S_1AS_3].



Obr. 8.

Konečně opišme kružnice $\left\{ \begin{matrix} K', K'', K''' \\ K'_1, K''_1, K'''_1 \end{matrix} \right\}$ kolem S_1, S_2, S_3 pomocí poloměrů $\left\{ \begin{matrix} S_1A, S_2A, S_3A \\ S_1A_1, S_2A_1, S_3A_1 \end{matrix} \right\}$; a ty činí již úloze zadost.

Úloha je *dvojznačná*; i stává se *nemožnou*, když *zmíněné Apolloniovy kružnice* protínají se v bodech imaginárných.

---

*) t. j. *kružnice*, jejichž *průměr* danými body $\left\{ \begin{matrix} S_1, S_2 \\ S_1, S_3 \end{matrix} \right\}$ *harmonicky* jest rozdělen.

V obr. 8. místo P_{12}, P_{13}, ..., položeno prostě $_{12}$, $_{13}$, ...

Důkaz. Dle sestrojení *Apolloniových* kružnic nad průměry $P_{12}P_{34}$ a $P_{13}P_{24}$ jest

$$\frac{S_2A}{S_1A} = \frac{S_2P_{12}}{S_1P_{12}} \tag{23}$$

$$\frac{S_3A}{S_1A} = \frac{S_3P_{24}}{S_1P_{24}}$$

a tedy

$$\frac{S_2A}{S_3A} = \frac{S_2P_{12} \, . \, S_1P_{24}}{S_1P_{12} \, . \, S_3P_{24}} . \tag{24}$$

Avšak dle věty *Menelaovy* ve $\triangle\, S_1S_2S_3$ vzhledem ku příčce p_2 jest

$$\frac{S_2P_{12} \, . \, S_1P_{24} \, . \, S_3P_{23}}{S_1P_{12} \, . \, S_2P_{23} \, . \, S_3P_{24}} = 1 ;$$

a se zřetelem ku (24)

$$\frac{S_2A}{S_3A} = \frac{S_2P_{23}}{S_3P_{23}} \tag{25}$$

Z poslední úměry vysvítá, že bod A leží též na (třetí) *Apolloniově kružnici trojúhelníku* S_2AS_3 (sestrojené kolem C_1 nad průměrem $P_{23}P_{14}$) (26), která je *geometrickým místem* bodů, jichž *vzdálenosti* od S_2 a S_3 jsou v *poměru* $S_2P_{23} : S_3P_{23}$. Odtud zároveň patrno, že kdyby *první dvě Apolloniovy kružnice* se neprotínaly, nemohla by je protíti *třetí*; neboť kdyby *třetí první kružnici protala*, musil by průsečík jejich *dle dokázané věty* ležeti na *kružnici druhé*, což býti nemůže. — Co bylo dokázáno o bodu A, platí v plném rozsahu též o bodu A_1. —

Všecky tři tak zvané Apolloniovy kružnice mají tudíž dva body společné anebo nemají vůbec společného bodu; tvoří svazek se základnými body A (A_1) buď reálnými nebo imaginárnými.

Označíme-li $S_1A = \varrho_1$, $S_2A = \varrho_2$, $S_3A = \varrho_3$, jest dle sestrojení

$$S_1P_{12} : S_2P_{12} = S_1A : S_2A = \varrho_1 : \varrho_2,$$
$$S_1P_{13} : S_3P_{13} = S_1A : S_3A = \varrho_1 : \varrho_3,$$

a dle (25)

$$S_2P_{23} : S_3P_{23} = S_2A : S_3A = \varrho_2 : \varrho_3.$$

Mimo to jest

$$S_1P_{34} : S_2P_{34} = S_1A : S_2A = \varrho_1 : \varrho_2,$$
$$S_1P_{24} : S_3P_{24} = S_1A : S_3A = \varrho_1 : \varrho_3, \quad \text{a dle 26.,}$$
$$S_2P_{14} : S_3P_{14} = S_2A : S_3A = \varrho_2 : \varrho_3.$$

Z toho vyplývá, že $\left\{ \begin{matrix} P_{12}, P_{13}, P_{23} \\ P_{34}, P_{24}, P_{14} \end{matrix} \right\}$ jsou $\left\{ \begin{matrix} \text{vnitřní} \\ \text{vnější} \end{matrix} \right\}$ *středy podobnosti* kružnic K', K'', K''', a že tudíž dané přímky p_1, p_2, p_3, p_4 jsou *osami podobnosti* kružnic K', K'', K''', (K'_1, K''_1, K'''_1).

Úvaha. Jsou-li dány v Apolloniově problému *tři kružnice*†), ustanovíme snadno *čtyři příslušné osy podobnosti* a k těm pak tak zvané *Apolloniovy kružnice*, které náležejí *svazku* se *základnými* body buď *a*) *reálnými* nebo *b*) *imaginárnými*.

Dle toho *dělidla* sluší tedy rozeznávati *dva* případy *obecné úlohy Apolloniovy*:

a) v němž *základné body* příslušných *Apolloniových kružnic* jsou *reálné*,

b) v němž tyto body jsou *imaginárné*.

V případě *a*) pak všecky *tři* dané kružnice buď *α*) *mají bod společný* nebo *β*) *nemají bodu společného*. Obdobné *poddělení* (subdivisio) případu *b*) jest *vyloučeno*.

Úloha IV. jest tedy na druhém stupni podřaděna úloze II.

Z úvahy této vysvítá, že jen *podmínečně* úloha IV. z úlohy *obecné* může vzniknouti *úměrnou změnou velikosti* daných poloměrů, aniž by se měnila poloha daných středů, náleží-li totiž *danou látkou obecná* úloha do případu *a*).

Od úlohy $\left\{ \begin{matrix} \text{I.} \\ \text{IV.} \end{matrix} \right\}$ lze postoupiti k *obecné úloze Apolloniově* *změnou* poloměrů dle $\left\{ \begin{matrix} \text{arithmetické} \\ \text{geometrické} \end{matrix} \right\}$ *úměry*.

Následující příbuzné úlohy zůstavujeme čtenáři:

Úloha VI. *Jsou dány tři kružnice*†); *ustanoviti tři jiné s nimi soustředné tak, aby všecky probíhaly společným bodem, a poloměry jejich byly k daným v poměru stálém.*

---

†) svými *středy* a svými *poloměry*.

Úloha VII. *Jsou dány tři kružnice*†), *jež mají jeden bod společný; ustanoviti tři jiné s nimi soustředné tak, aby všecky probíhaly jiným společným bodem, a poloměry jejich byly k daným v poměru stálém.*

VII.

Úloha VIII. *Jsou dány svazky kružnic* Σ_1, Σ_2, Σ_3, *určené* **bodem** A *náležejícím do těch svazků a příslušnými* **chordálami** p_1, p_2, p_3, *které se toliko po dvou protínají; sestrojiti tři kružnice* K', K'', K''', *jež procházejíce bodem* A *dotýkají se všecky jedné kružnice z každého svazku.*

Řešení. Vztyčíme-li $\left\{ \begin{matrix} AX \perp AP_{12} \\ AX' \perp AP_{13} \end{matrix} \right\}$ (obr. 5.), až se protne s $\left\{ \begin{matrix} p_3 \\ p_2 \end{matrix} \right\}$ v bodě $\left\{ \begin{matrix} P_{34} \\ P_{24} \end{matrix} \right\}$, získáme spojením P_{34} s P_{24} *chordálu* p_4 a tím *úplný čtyřstran* $p_1 p_2 p_3 p_4$.

Spojíme-li *protější rohy*, obdržíme *tři středy* kružnic K', K'', K''' jakožto průsečíky těchto spojnic; (jsou-li to na př. S_1, S_2, S_4, poznáváme již předem, že bude p_3 *vnější osou popobnosti* kružnic těch, jež dle V. budou všecky dotýkati se *kružnice* ze svazku Σ_3 *uvnitř*).

Řešením úlohy IV. obdržíme pak po *jedné kružnici* ze svazků Σ_1, Σ_2, Σ_3, které se kružnic K', K'', K''' dotýkají; kromě toho získáme ještě kružnici O_4, jež přísluší *k přidružené chordále* p_4. Kružnice O_1, O_2, O_3 nemajíce dle předpokladu s *bodem* A *společného chordálného středu* (p_1, p_2, p_3 neprotínají se v jediném bodě), nebudou se dotýkati *všecky tři téže* dvojice, z kružnic K', K'', K''' *sestavené*, jak byly ve II. uvedeny.

Poznámka. Kdyby všecky *tři* chordály p_1, p_2, p_3 *v jediném* bodě P se protínaly, splynuly by všecky *tři hledané* kružnice K', K'', K''' *v jedinou* K, jejíž *střed* by byl *bod* P a jež by procházela *bodem* A. Kružnice O_1, O_2, O_3 staly by se *pouhými* body, *souměrnými* k bodu A dle průměrů p_1, p_2, p_3; kružnice O_4 přešla by v bod A, *a přidružená chordála v tečnu trojnásobné kružnice* K.

---

†) svými *středy* a svými *poloměry.*