Degenerace Bertiniovy involuce.[1])

Napsal † *B. Machytka.*

1. Osmi body A_1, $A_2 \ldots$, A_8 v rovině obecně zvolenými určena jest, jak známo, Bertiniova rovinná involuce J, vytvořená úplným lineárním systémem $S_3{}^6(A_1{}^2, A_2{}^2, \ldots, A_8{}^2)$ křivek šestého stupně K^6, které mají v bodech skupiny (A_i) body dvojnásobné. Tento lineární systém je totiž „složený“ v tom smyslu, že všechny jeho křivky, procházející libovolným bodem M, procházejí nutně dalším bodem M'. Plyne to z této jednoduché úvahy: Body (A_i) určen je svazek kubických křivek $S_1{}^3$ (A_i). Na každé křivce C^3 tohoto svazku vytvořuje systém $S_3{}^6$ centrickou involucí $g_2{}^1$, takže všechny křivky K^6 systému $S_3{}^6$ procházející libovolným bodem M na C^3 protínají ji v dalším bodě M', totiž v tom, který odpovídá bodu M v této involuci. Tím je definována v rovině involuce druhého řádu, zvaná Bertiniovou. Systém $S_3{}^6$ vytíná na libovolné své křivce K^6 charakteristickou soustavu $g_4{}^2$, jejíž skupiny bodové jsou složeny ze dvou bodových dvojic involuce J. Každé dvě křivky komplexu $S_3{}^6$, které se dotýkají v bodu M_1 obecně zvoleném, dotýkají se nutně také v bodě M'_1 jemu odpovídajícím.

Na každé křivce C^3 svazku $S_1{}^3$ jsou čtyři samodružné body příslušné centrické involuce $g_2{}^1$: je to jednak pevný bod O_9, devátý bod báse svazku $S_1{}^3$ (neboť dvě křivky svazku $S_1{}^3$ dávají dohromady jednu křivku komplexu $S_3{}^6$) a další tři samodružné body B_1, B_2, B_3, proměnné s křivkou C^3, z nichž každý je vyznačen tím, že křivky komplexu $S_3{}^6$ jdoucí bodem B_k a tvořící tudíž síť, mají v tomto bodě s křivkou C^3 průsečík dvojnásobný, t. j., v tomto bodě se této křivky obecně dotýkají (a tudíž také navzájem); ∞^1 z nich, tvořící svazek, mají tam devátý bod dvojnásobný. Geometrické místo bodů B_k je známý Jacobián 9. st. J^9 $(A_i{}^3)$, který má body A_i za trojnásobné a je součástí Jacobiánu všech sítí $S_2{}^6$ obsažených v komplexu $S_3{}^6$. Tento Jacobián J^9 jest ovšem geometrickým místem samodružných bodů involuce Bertiniovy. Jestliže bod M jest

---

[1]) Z rukopisů pozůstalých po Doc. B. Machytkovi je zřejmo, že chystal větší práci o Bertiniově involuci s nového hlediska. Jedna část jeho práce byla úplně propracována a redakce ji upravila k tisku pod hořejším titulem.

soumezný s některým bodem skupiny (A_i), na př. s bodem A_8 ve směru t, pak příslušný bod $M' \equiv A'_8$ nalézá se na té křivce C^3, která se v bodě A_8 tečny t dotýká a odpovídá bodu A_8 v příslušné korespondenci g_2^1. Avšak tímto bodem A'_8 musí procházeti též ta křivka K_8^6 komplexu, která má bod A_8 za trojnásobný. Se směrem t mění se příslušná křivka C^3 a příslušné body A_8' vytvoří tedy křivku K_8^6, která je svými multiplicitami v bodech (A_i) jednoznačně určena. Je to zřejmě hlavní křivka Bertiniovy involuce, odpovídající bodu A_8. Body skupiny (A_i) dávají tedy osm hlavních bodů šestého řádu Bertiniovy involuce.

Spočítá se snadno, že tato involuce, ježto reprodukuje každou kubiku svazku S_1^3 (a také každou křivku komplexu S_3^6), je stupně 17tého.

Vedle samodružných bodů (B), které vyplňují Jacobián J^9 (A_i^3), má involuce Bertiniova ovšem ještě isolovaný samodružný bod O_9, kterýžto bod při obecné volbě bodů skupiny (A_i) neleží na Jacobiánu J^9, neboť každá křivka C^3 svazku S_1^3 může protnouti křivku J^9 jen ve třech bodech, proměnných s křivkou, a to jsou právě body B_k, z nichž žádný obecně nesplývá s bodem O_9. Jen v tom případě, že bod O_9 splyne s některým bodem A_i, nemá Bertiniova involuce isolovaný bod samodružný. Skupina bodů (A_i) jest v tomto případě charakterisována tím, že kubické křivky C^3 příslušného svazku $S_1^3(A_i)$ se v jednom bodu báse navzájem dotýkají, takže tento bod báse je dvojnásobným bodem pro jednu křivku tohoto svazku. Leží tedy tento bod báse na Jacobiánu J^6 sítě S_2^3 kubických křivek, určené zbývajícími body báse.

Involuce Bertiniova je čtvrté třídy: na libovolné přímce leží totiž čtyři dvojice involuce. Neboť přímce m odpovídá touto involucí křivka stupně 17-ho, která seče přímku m v sedmnácti bodech; z nich devět je samodružných, jsou to průsečíky přímky m s Jacobiánem J^9; dalších osm bodů tvoří čtyři dvojice bodů involuce. Prochází-li přímka m isolovaným samodružným bodem O_9, musí se křivka jí odpovídající této přímky dotknouti v tomto bodě, ježto tento jeden bod musí nahraditi dvojici involuce. Isolovaný bod samodružný O_9 má tedy tu vlastnost, že směry z něho vycházející si v involuci Bertiniově odpovídají. Naproti tomu má bod B Jacobiánu J^9 tu vlastnost, že směry z tohoto bodu vycházející a odpovídající si Bertiniovou involucí tvoří involuci paprskovou, jejíž samodružné paprsky jsou jednak tečna t_1 v tomto bodě ke kubické křivce C^3 svazku S_1^3 tímto bodem procházející, jednak tečna t_2 v tomto bodě k Jacobiánu J^9. Dvojice t, t' této involuce jsou tečny v dvojnásobném bodu B těch křivek K^6 soustavy S_3^6, které mají v tomto bodě devátý dvojnásobný bod a tvoří svazek S_1^6 (B^2). Tečna t_2 jest zřejmě tečnou té křivky K_6 tohoto svazku, která má v bodě B bod úvratu. Pro směr t_1 jest příslušnou křivkou tohoto svazku dvojnásob vzatá kubická křivka s touto tečnou.

2. Každý bod B zvolený obecně na Jocobiánu J^9 jest devátým

bodem dvojnásobným pro křivky svazku S_1^6, složeného z eliptických sextik, obecně ireduktibilních, z nichž každá je invariantní pro involuci Bertiniovu. Výjimku činí — v obecném případě, kdy skupina bodů (A_i) je zcela obecná a Bertiniova involuce má tedy isolovaný bod samodružný — dvanáct význačných bodů Jacobiánu, které značme $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{12}$. Ve sbazku S_1^3 existuje totiž v tomto obecném případu dvanáct křivek kubických K_l^3 $(A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_8 Y_l^2)$, $l = 1, 2, \ldots, 12$, z nichž každá má jeden bod skupiny (Y_l) za dvojnásobný. Každá z těchto dvanácti křivek spojená s libovolnou křivkou C^3 svazku S_1^3 dává složenou sextiku s devátým bodem dvojnásobným Y_l, který tudíž leží na Jacobiánu J^9. Příslušný svazek $S_1^6(Y_l^2)$ skládá se v tomto případě ze samých křivek složených, neboť křivka K_l^3 má s kteroukoli křivkou K^6 tohoto svazku dvacet průsečíků společných a je tedy její součástí.

Ve svazku eliptických, ireduktibilních sextik $S_1^6(A_1^2, A_2^2, \ldots$ $\ldots, A_8^2, B^2)$ existuje, jak známo²), obecně dvanáct křivek racionálních, majících další, desátý bod dvojnásobný, které se obecně nerozpadají. Tyto desáté body dvojnásobné jsou průsečíky Jacobiánu J^9 s Jacobiánem kterékoli jiné skupiny osmibodové, vzaté ze skupiny devíti bodů (A_i, B), tedy na př. s Jacobiánem J_1^9 $(A_2^3, A_3^3, \ldots, A_8^3, B^3)$, který nutně obsahuje jednoduše bod A_1.

Z této úvahy je zřejmo, že je-li dán svazek S_1^6 $(X_1^2, X_2^2, X_3^2, \ldots$ $\ldots, X_9^2)$ sextik s devíti společnými dvojnásobnými body, existuje celkem devět rovinných involucí Bertiniových, které reprodukují každou křivku K^6 tohoto svazku. Vypustíme-li ze skupiny bodů (X) kterýkoli jeden bod, určuje zbývající skupina osmibodová, jakožto skupina hlavních bodů, jednu takovou involuci. Je-li naproti tomu dána racionální sextika s desíti body dvojnásobnými $K^6(X_1^2, X_2^2, \ldots$ $\ldots, X_{10}^2)$, existuje zřejmě obecně $\binom{10}{2} = 45$ Bertiniových involucí, z nichž každá reprodukuje tuto křivku.

3. Obraťme se k případu svrchu vyloučenému, kdy devátý bod base O_9 svazku S_1^3 (A_i) splývá s některým bodem skupiny (A_i); zvolme označení tak, že jest $O_9 \equiv A_8$. Křivky C^3 svazku S_1^3 se v tomto případě navzájem dotýkají a ve svazku je jedna křivka $K_8^3(A_1, A_2, \ldots, A_7, A_8^2)$, která má v bodě A_8 bod dvojnásobný. Bod A_8 leží tedy na Jacobiánu $J^6(A_1^2, A_2^2, \ldots, A_7^8, A_8)$ sítě $S_2^3(A_1, A_2, \ldots, A_7)$. Abychom prozkoumali Bertiniovu involuci, definovanou v tomto případě soustavou $S_3^6(A_i)$, hledejme k libovolnému bodu roviny M bod M' jemu odpovídající touto involucí.

Bodem M prochází jediná křivka $C^3(M)$ svazku $S_1^3(A_i)$. Křivky K^6 komplexu S_3^6 vytínají na ní centrickou involuci g_2^1, ve

²) *B. Bydžovský*: „Dvojnásobné body křivek šestého stupně". Rozpr. Č. Ak., tř. II. roč. XXI, č. 42, str. 12.

které bodu M odpovídá bod M'. Procházejí tedy bodem M' též ty reduktibilní křivky K^6 soustavy S_3^6, které jsou složeny z pevné křivky K_8^3 a z jednotlivých kubických křivek svazku $S_1^3(A_1, A_2 \ldots$ $\ldots, A_7, M)$. Dvojice bodů M, M' jsou tedy proměnné průsečíky dvou kubických křivek sítě $S_2^3(A_1, A_2, \ldots, A_7)$ a vytvořují tudíž známou Geiserovu rovinnou involuci 8-ho stupně, která je jednoznačně určena skupinou sedmi svých hlavních bodů $A_1, \ldots, A_7$ pomocí sítě $S_2^3(A_1 \ldots, A_7)$. Ostatně seznáme snadno přímo, že body $A_1, \ldots, A_7$ jsou skutečně hlavní body 3-ho řádu. Nalézá-li se totiž bod M v infinitesimálním okolí bodu A_1 ve směru t, leží příslušný bod M' na té křivce C_t^3 svazku $S_1^3(A_1, \ldots, A_7)$, která má v A_1 tečnu t a jest na ní vyťat tou křivkou K^6 soustavy S_3^6, která má v bodě A_1 bod trojnásobný, t. j. rozpadající se křivkou

$$[(K_1^3(A_1^2, A_2, A_3, \ldots, A_7) + K_8^3(A_1, A_2, \ldots, A_7, A_8^2),]$$

tedy kubickou křivkou K_1^3. Otáčí-li se tečna t kol bodu A_1 vyplňují příslušné body M' na příslušných křivkách C_t^3 zřejmě křivku K_1^3, která odpovídá jako hlavní křivka bodu A_1. Totéž platí i pro další body $A_2, \ldots, A_7$. Obdobná úvaha, vykonaná pro bod A_8, ukazuje, že tento bod je samodružný. Jacobián $J^9(A_1^3, \ldots$ $\ldots, A_8^3)$ rozpadá se v tomto případě na Jacobián $J^6(A_1^2, A_2^2, \ldots$ $\ldots, A_7^2, A_8)$ sítě $S_2^3(A_1 \ldots, A_7)$ a na kubickou křivku K_8^3. Jacobián J^6 jest geometrickým místem samodružných bodů Geiserovy transformace. Jacobián J^9 jest totiž geometrickým místem bodů B_1, B_2, B_3, které doplňují na jednotlivých křivkách C^3 svazku $S_1^3(A_1, \ldots, A_8)$ bod O_9 na čtveřinu samodružných bodů téže centrické involuce g_2^1. V našem případě bod $O_9 \equiv A_8$ leží na Jacobiánu J^6 sítě $S_2^3(A_1, \ldots, A_7)$; leží tedy i body B_1, B_2, B_3 jednotlivých křivek C^3 opět na této křivce J^6, neboť, jak známo, kubická křivka C^3 sítě S_2^3 protíná Jacobián této sítě ve čtyřech bodech navzájem sdružených[3]). Geometrickým místem bodů B je tedy křivka J^6. Pro křivku K_8^3 svazku S_1^3 nelze příslušné body B určiti, neboť bod $O_9 \equiv A_8$ jest jejím bodem dvojnásobným; avšak křivka ta je zřejmě součástí Jacobiánu J^9, neboť je geometrickým místem dvojnásobných bodů těch křivek K^6 soustavy S_3^6, které jsou složeny z této křivky K_8^3 a z jednotlivých křivek sítě S_2^3. Geiserova transformace vytvořuje na křivce K_8^3 involuci g_2^1, která má, — ježto křivka je racionální — jen dva samodružné body, jež jsou další dva průsečíky této křivky s Jacobiánem J^6.

4. Vezměme opět v úvahu lineární komplex $S_3^6(A_1^2, \ldots, A_8^2)$ složený z křivek K^6, z nichž každá se reprodukuje Geiserovou involucí. Deváté dvojnásobné body nerozpadajících se křivek K^6 této soustavy mohou ležeti toliko na Jacobiánu J^6. Bod B, zvolený

[3]) Kubická křivka C^3 sítě S_2^3 protne totiž Jacobián J^6 ve čtyřech bodech té vlastnosti, že v každém z nich dotýká se křivky C^3 ∞^1 křivek sítě, takže tvoří čtveřinu samodružných bodů centrické involuce g_2^1, vyťaté na C^3 sítí S_2^3.

na křivce $K_8{}^3$, jakožto součásti Jacobiánu J^9, nemůže býti devátým bodem dvojnásobným nerozpadající se křivky $K^6(A_1{}^2, \ldots$ $\ldots, A_8{}^2, B^2)$, neboť tato křivka by měla s křivkou $K_8{}^3$ celkem dvacet průsečíků, takže by křivka $K_8{}^3$ byla její součástí. Svazek $S_1{}^6$ příslušný takovému bodu B obsahuje tedy vesměs křivky K^6 takové, které jsou složeny z křivky $K_8{}^3$ a z křivek svazku $S_1{}^3(A_1, \ldots$ $\ldots, A_7, B)$. Je-li naproti tomu B bod obecně zvolený na Jacobiánu J^6, pak příslušný svazek $S_1{}^6(A_1{}^2, \ldots, A_8{}^2, B^2)$ obsahuje dvě rozpadající se křivky, a to dvojnásob počítanou křivku $C^3(A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_7, A_8, B)$ a křivku K^6 složenou z kubických křivek $K_8{}^3(A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_7, A_8{}^2)$ a $K_B{}^3(A_1, A_2, \ldots, A_7, B^2)$. Ostatní křivky svazku obecně se nerozpadnou, neboť jiné rozpadnutí obecně není možné a při zvláštní poloze bodů base může nastati jen konečným počtem způsobů. Vede tedy obecně zvolený bod B na Jacobiánu J^6 ke svazku $S_1{}^6$ křivek nerozpadajících se. Výjimku od toho činí jen ty dva body, v nichž J^6 seče křivku $K_8{}^3$ a potom ty body (Y) Jacobiánu J^6, které jsou dvojnásobnými body kubických křivek svazku $S_1{}^3(A_1, \ldots, A_8)$. Snadno totiž seznáme, že v tomto svazku existuje v našem případě deset křivek racionálních, jichž dvojnásobné body $Y_1, \ldots, Y_{10}$ leží ovšem na J^6. Tyto dvojnásobné body (Y) jsou zřejmě průsečíky Jacobiánu $J^6(A_1{}^2, \ldots, A_7{}^2, A_8)$ sítě $S_2{}^3(A_1, \ldots, A_7)$ s Jacobiánem $J_1{}^6(A_2{}^2, A_3{}^2, \ldots, A_7{}^2, A_8{}^2)$ sítě $\Sigma_2{}^3(A_2, A_3, \ldots, A_8)$, který ovšem neobsahuje obecně bod A_1. Obě tyto křivky mají v bodech skupiny (A) celkem dvacetšest průsečíků; dalších průsečných bodů je tedy deset. Pro každý bod Y takto určený existují tedy křivky $C^3(A_1, A_2, \ldots, A_7, Y^2)$ a $K^3(A_2, A_3, \ldots, A_7, A_8, Y^2)$, které mají deset průsečíků a jsou tedy totožné. Existuje tedy ve svazku $S_1{}^3(A_i)$ deset křivek $K_l{}^3(A_1, \ldots, A_8, Y_l{}^2)$; $l = 1, \ldots, 10$. Každý z těchto desíti bodů (Y) Jacobiánu J^6 vede ke svazku ${}_lS_1{}^6(A_1{}^2, \ldots, A_8{}^2, Y_l{}^2)$, který obsahuje křivky K^6 složené z křivky $K_l{}^3$ a z jednotlivých křivek svazku $S_1{}^3(A_1, \ldots, A_8)$.

Vraťme se opět ke svazku $S_1{}^6(A_1{}^2, \ldots, A_8{}^2, B^2)$, který je složen z nerozpadajících se křivek K^6, invariantních vůči Geiserově involuci, tedy za předpokladu, že B je obecný bod Jacobiánu J^6, různý od bodů skupiny (Y) a neležící na $K_8{}^3$. Hledejme v tomto svazku křivky racionální, mající desátý dvojnásobný bod. Svazek $S_1{}^6(A_1{}^2, \ldots, A_8{}^2, B^2)$ vytíná na křivce $J^6(A_1{}^2, \ldots, A_7{}^2, A_8, B)$ lineární soustavu bodovou $g_4{}^1$. Poněvadž křivka J^6 je rodu 3, má tato soustava 12 bodů dvojnásobných.[4]) Dva z těchto bodů jsou zřejmě vyťaty na křivce J^6 kubickou křivkou $K^3(A_1, \ldots, A_8, B)$, neboť tato křivka, vzata dvojnásob, patří do svazku $S_1{}^6$. Vyloučíme-li tedy tyto dva body, které vedou k případům triviálním, zbývá skupina desíti bodů $Z_1, \ldots, Z_{10}$, které vedou k desíti křivkám

---

[4]) Lineární soustava bodová $g_n{}^r$ na křivce rodu p má počet bodů $(r + 1)$-násobných dán výrazem: $(r + 1)(n + rp - r)$. V. na př. *Severi-Löffler*: Algebraische Geometrie, str. 188.

svazku S_1^6, o nichž snadno seznáme, že v těchto bodech mají vždy desátý dvojnásobný bod. Křivka K^6 našeho svazku S_1^6, procházející na př. jedním bodem Z_i této skupiny — značme ji stručně $K^6(Z_i)$ — má v bodě Z_i s křivkou J^6 nutně dva průsečíky. Buď se jí tedy v bodě Z_i dotýká anebo má v tomto bodě bod dvojnásobný. Případ první však není možný, neboť všechny křivky K^6 soustavy S_3^6, jdoucí bodem Z_i a mající tam bod jednoduchý, mají v tomto bodě společnou tečnu a, jak jsme již dříve seznali, obecně různou od tečny Jacobiánu. Ostatně plyne to i z toho, že v tomto případě křivka $K^6(Z_i)$ by byla eliptickou, Geiserova involuce by na ní vytvořila involuci, mající čtyři body samodružné, z nichž dva by v bodě Z_i splynuly, což u křivky rodu 1 není možno. Křivka $K^6(Z_i)$ má tedy v bodě Z_i nutně desátý bod dvojnásobný a je tedy racionální. Involuce na ní vytvořená involucí Geiserovou má dva body samodružné v dalších dvou průsečících této křivky s J^6; oba parametry jejího dvojnásobného bodu Z_i si v této involuci navzájem odpovídají. Snadno také seznáme, že žádná z těchto desíti křivek $K^6(Z_i)$ se obecně nerozpadne tak, aby se skládala z kubických křivek $K_8^3(A_1, A_2, \ldots, A_7, A_8^2)$ a $K_B^3(A_1, \ldots, A_7, B^2)$. Příslušný bod Z_i musil by totiž v tomto případě býti nezávislý na volbě bodu B na křivce J^6, neboť by musil býti jedním ze dvou dalších průsečíků křivky K_8^3 s Jacobiánem J^6, takže by tímto bodem musilo procházeti ∞^1 křivek K_B^3, jichž dvojnásobný bod B by byl kdekoli na J^6. Skupina 10 bodů (Z) leží zřejmě jak na Jacobiánu $J^6(A_1^2, \ldots, A_7^2, A_8, B)$ lineárního systému $S_3^6(A_1^2, \ldots, A_7^2, A_8^2)$, tak i na Jacobiánu $J_1^9(A_2^3, A_3^3, \ldots, A_7^3, A_8^3, B^3, A_1)$ systému $S_3^6(A_2^2, A_3^2, \ldots, A_8^2, B^2)$. Obě tyto křivky protínají se vskutku v desíti bodech, mezi nimiž se nenalézají oba průsečíky křivky $K^3(A_1, \ldots, A_8, B)$ s Jacobiánem J^6. Tato křivka K^3 seče totiž J^6 v bodové dvojici, která doplňuje body A_8 a B na čtveřinu konjugovaných bodů. Naproti tomu seče tato křivka K^3 Jacobián J_1^9 v bodové dvojici konjugované s bodem A_1, tedy v jiné dvojici bodů.

Skupina desíti bodů (Z) jest při pevné poloze bodu A_8 závislá toliko na volbě bodu B a je tímto bodem dokonale určena. Již z toho je zřejmo, že neobsahuje obecně žádný bod skupiny (Y). Je-li za bod B zvolen některý bod ze skupiny (Y), na př. Y_1, obsahuje příslušná skupina bodů (Z) zřejmě body (Y), neboť ve svazku $S_1^6(A_1^2, \ldots, A_8^2, Y_1^2)$, složeném z dvojic kubických křivek, jsou křivky K^6 obsahující další bod dvojnásobný zřejmě složeny z křivek $(K_1^3 + K_i^3)$, při čemž je $K_i^3 \equiv K^3(A_1, \ldots, A_8, Y_i^2)$.

Ve svazku $S_1^6(A_1^2, \ldots, A_8^2, B^2)$, kde B je libovolný bod Jacobiánu J^6 s výjimkou bodů skupiny (Y) a bodů křivky K_8^3, existuje tudíž obecně 10 racionálních nerozpadajících se křivek K^6 s desátým dvojnásobným bodem.

5. Můžeme tedy vysloviti výsledek:

Je-li dáno v rovině osm bodů $A_1 \ldots, A_8$ té vlastnosti, že devátý *bod base svazku kubických křivek, určeného těmito body, splyne s jedním z těchto bodů, na př. A_8, degeneruje rovinná involuce Bertiniova, určená touto skupinou osmi bodů, v Geiserovu rovinnou involuci 8-ho stupně, určenou sítí kubických křivek $S_2^3(A_1, \ldots, A_7)$[5]. V rovině existuje pak ∞^1 lineárních komplexů $S_3^6(A_1^2, \ldots, A_7^2, B^2)$ a ∞^2 svazku $S_1^6(A_1^2, \ldots, A_7^2, B^2, C^2)$, které jsou složeny z křivek 6. st. o společných osmi, resp. devíti dvojnásobných bodech, z nichž každá je reprodukována touto Geiserovou involucí; při tom jsou B, C libovolné body Jacobiánu $J^6(A_1^2, \ldots, A_7^2)$ sítě $S_2^3(A_1, \ldots, A_7)$. Svazek $S_1^6(A_1^2, \ldots, A_7^2, B^2, C^2)$ obsahuje obecně toliko dvě křivky rozpadající se, totiž dvojnásobně vzatou kubickou křivku $C^3(A_1, \ldots, A_7, B, C)$ a křivku složenou z křivek $K_B^3(A_1, \ldots, A_7, B^2)$ a $K^3_C(A_1, \ldots, A_7, C^2)$; ostatní křivky K^6 tohoto svazku se obecně nerozpadnou. Při pevné poloze bodu B na Jacobiánu J^6 existuje na této křivce toliko 10 bodů, z nichž každý má tu vlastnost, že zvolen za devátý dvojnásobný bod C, vede ke svazku S_1^6, který se skládá vesměs z křivek K^6, rozpadajících se ve dvě kubické křivky. V obecném svazku $S_1^6(A_1^2, \ldots, A_7^2, B^2, C^2)$ existuje 10 obecně se nerozpadajících racionálních sextik s dalším desátým bodem dvojnásobným.*

*

La dégénération de l'involution de Bertini.

(Extrait de l'article précédent.)

Étant donné, dans le plan, un groupe de huit points $A_1, \ldots, A_8$ tel que le neuvième point de base du faisceau de cubiques, déterminé par ces points, coïncide avec un de ces points, p. ex. avec le point A_8, l'involution plane de Bertini, déterminée par ce groupe de huit points, se réduit à l'involution du 8e ordre de Geiser, déterminée par le réseau des cubiques S_2^3 $(A_1, \ldots, A_7)$. Il existe alors une infinité simple de complexes linéaires $S_3^6(A_1^2, \ldots, A_7^2, B^2)$ et une infinité double de faisceaux $S_1^6(A_1^2, \ldots, A_7^2, B^2, C^2)$ de sextiques ayant, respectivement, huit ou neuf points doubles communs, dont chacune se reproduit par cette involution de Geiser. Ici B, C sont deux points arbitraires de la jacobienne $J^6(A_1^2, \ldots, A_7^2)$ du réseau $S_2^3(A_1, \ldots, A_7)$. Un faisceau $S_1^6(A_1^2, \ldots, A_7^2, B^2, C^2)$ ne contient, en général, que deux courbes composées, à savoir la cubique double $C^3(A_1, \ldots, A_7, B, C)$ et la courbe composée des cubiques $K_B^3(A_1, \ldots, A_7, B^2)$, $K_C^3(A_1, \ldots, A_7, C^2)$. Le point B étant fixe, il existe sur la jacobienne seulement dix points, dont chacun, pris pour point C, fournit un faisceau S_1^6 dont tous les membres sont composés de deux cubiques. Dans un faisceau général $S_1^6(A_1^2, \ldots, A_7^2, B^2, C^2)$ il y a dix courbes rationnelles, en général simples, ayant un dixième point double.

[5]) *V. B. Bydžovský*: Contribution à la théorie de la sextique à huit points doubles. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Toronto, 1924.