Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Kořízek

O konstrukcích obecné plochy kubické, určené třemi mimoběžnými přímkami a 7 body, z nichž alespoň 3 jsou reálné

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 3-4, 304--314

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/124011`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1929

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

O konstrukcích obecné plochy kubické, určené třemi mimoběžnými přímkami a 7 body, z nichž alespoň 3 jsou reálné.

Napsal Karel Kořízek.

Jest známo, že obecnou plochu kubickou vytvoří 3 trilineární svazky rovinové o mimoběžných osách průsečíky trojic sobě příslušných rovin.[1])

Poněvadž trilinearita tří útvarů 1. řádu jest obecně jednoznačně stanovena 7 trojicemi prvků sobě příslušných,[2]) jest též kubická plocha jednoznačně určena třemi mimoběžnými površkami a 7 body, které mohou býti ovšem podvojně sdruženě imaginární. Konstrukce jednotlivých bodů plochy P^3 takto určené jest tedy konstrukcí trojic sobě příslušných rovin 3 trilineárních svazků rovinových, určených 7 trojicemi, která se řeší, jak známo, pomocí 2 svazků trilinearit.[3])

V dalším odvodím syntheticky jinou konstrukci, která jest sice částečně kvadratická (na rozdíl od výše jmenované), ale jednodušší pro skutečné provedení a výhodná v případech, kdy 2 nebo 4 z daných bodů jsou sdruženě imaginární.

I.

1. Uvažujme tři řady bodové R, R', R'' na kuželosečkách K, resp. K', K'', náležejících témuž svazku kuželoseček o základních bodech α, β, γ, δ.

Zvolme body v, v', v'' na kuželosečkách K, resp. K', K'' a přidružme sobě tři body k, k', k'' řad R, resp. R', R'' té vlastnosti, že spojnice kv, $k'v'$, $k''v''$ procházejí týmž bodem $\varkappa$. Poněvadž libovolnými dvěma z těch 3 bodů jest třetí jednoznačně určen, jest zvolenými body v, v', v'' stanovena trilinearita ($\mathfrak{T}_v$) řad R, R', R'', ovšem speciální, kterou nazývejme *trilinearitou perspektivní se základními body* v, v', v''.

---

[1]) R. Sturm: „Die Lehre von den geom. Verwandtschaften", I. díl, str. 324. (V dalším označ. pouze Sturm.)

[2]) Sturm, str. 327.

[3]) Tamtéž str. 370.

Spojnice vv' protne kuželosečky K, K' v bodech s, resp. t', spojnice $v'v''$ kuželosečky K', K'' v bodech s', t'' a spojnice $v''v$ kuželosečky K'', K v bodech s'', t. Potom tvoří zřejmě body s, t'; t, s'; s', t''; t', s''; s'', t; t'', s 6 t. zv. *neutrálních párů*, které mají vlastnost, že každému z nich přísluší všechny body řady, k níž nenáleží.

Na spojnici $v'v''$ označme $v' \equiv 1$, $s' \equiv 1'$, $v'' \equiv 2$, $t'' \equiv 2'$. Body v, s, t a involucí, určenou páry $1, 1'$; $2, 2'$, jest určen, jak známo, svazek kuželoseček Σ, jehož čtvrtý základní bod w musí ležeti na kuželosečce K, poněvadž tato, náležejíc svazku kuželoseček o základních bodech $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta$, protíná spojnici $v'v''$ v páru $3, 3'$ involuce $I \equiv (11', 22')$. Bodem w musí však také procházeti degenerované kuželosečky $L \equiv (vs, ts')$; $M \equiv (st'', vt)$ svazku Σ. Spojnice st'' a ts' se tedy protínají na kuželosečce K v bodě w. Obdobně bychom dokázali, že se spojnice $s't$ a $t's''$ protínají v bodě w' na kuželosečce K', jakož i spojnice st'' a $t's''$ v bodě w'' na kuželosečce K''.

Existují-li tedy na kuželosečkách K, K', K'' téhož svazku páry bodů s, t; s', t'; s'', t'' té vlastnosti, že průsečíky $(st', ts'') \equiv v$; $(s't'', t's) \equiv v'$; $(s''t, t''s') \equiv v''$ leží na kuželosečkách K, K', K'', pak také průsečíky $(ts', st'') \equiv w$; $(t's'', s't) \equiv w$ a $(t''s, s''t') \equiv w''$ leží na kuželosečkách K, K', K''.

K bodům w, w', w'', jakožto bodům základním, přísluší opět perspektivní trilinearita (T_w), o které však snadno dokážeme, že jest totožná s trilinearitou (T_v).

Zvolíme-li body k, k' na kuželosečkách K, resp. K', protnou se spojnice $kv, k'v'$ v bodě $\varkappa_v$ a spojnice $kw, k'w'$ v bodě $\varkappa_w$. Jest třeba jenom dokázati, že spojnice $\varkappa_v v'' \equiv L_v''$ a $\varkappa_w w'' \equiv L_w''$ se protínají v témž bodě k'' na kuželosečce K''. Paprsek L_v'' považujme za osu perspektivity svazků v, v'. Jelikož svazky v, w a v', w' jsou projektivní (příslušné sobě paprsky se protínají na kuželosečkách K, resp. K'), přísluší k té perspektivitě svazků v, v' projektivita svazků w, w'. Tato projektivita musí však býti rovněž perspektivitou, neboť má samodružný paprsek $wt \equiv w's'$ (k němuž dospějeme, uvažujeme-li $k \equiv t$, $k' \equiv s'$) a vytvořuje tedy přímku L_w'', procházející bodem w'', příslušným k průsečíku $m \equiv (L_v'', vv')$. Paprsku L_v'' svazku v'' přísluší tedy určitý paprsek L_w'' svazku w'' a naopak, následkem čehož jsou svazky v'' a w'' projektivní a vytvořují kuželosečku L^2, jdoucí body v'', w''. Ale paprskům $v''\alpha$, $v''\beta$, $v''\gamma$, $v''\delta$ přísluší v té projektivitě paprsky $w''\alpha$, $w''\beta$, $w''\gamma$, $w''\delta$, tedy kuželosečka L^2 musí procházeti body $v'', w'', \alpha, \beta, \gamma, \delta$, čili jest totožná s kuželosečkou K'', čímž též totožnost obou trilinearit dokázána.

Zvláštní případy nastanou, zvolíme-li některé z bodů v, v', v'', nebo všecky, v základních bodech svazků kuželoseček. Je-li ku př. $v \equiv \alpha$, bude $s'' \equiv t' \equiv v$, tedy spojnice $s''t'$ neurčitá, ale body w, w', w'' určité. Jsou-li body $v \equiv \alpha, v' \equiv \beta$, jest $v \equiv s'' \equiv t'$,

$v' \equiv s \equiv t''$, spojnice $s''t'$ a st'' neurčité, ale body w, w', w'' vzdor tomu určité, neboť spojnice ww' jest určena body s', t. Zvolíme-li však $v \equiv \alpha$, $v' \equiv \beta$, $v'' \equiv \gamma$, bude $v \equiv s'' \equiv t'$; $v' \equiv s \equiv t''$; $v'' \equiv \equiv s' \equiv t$, všechny 3 spojnice st'', $s't$, $s''t'$ jsou neurčité, tedy i trojice bodů w, w', w'', ale zvolíme-li jednu z nich, určí 2 z bodů w, w', w'' a tím i bod třetí.

Můžeme tedy vysloviti větu:

a) K libovolným 3 bodům v, v', v'' na kuželosečkách K, resp. K', K'' téhož svazku, přísluší určitá trojice bodů w, w', w'', která určuje tutéž perspektivní trilinearitu, jako body v, v', v''. Výjimku tvoří pouze základní body svazku.

2. Uvažujme dále 3 perspektivní trilinearity (T), (T_1), (T_2) mezi řadami bodovými R, R', R'' na kuželosečkách K, K', K'' téhož svazku, určené 3 trojicemi základních bodů v, v', v''; v_1, v_1', v_1''; v_2, v_2', v_2''. Řady R, R', R'', příslušné sobě trilinearitou (T), promítají se z bodů v, v', v'' perspektivně trilineárními svazky paprskovými, t. j. svazky, v nichž si přísluší takové trojice paprsků, které procházejí týmž bodem. Perspektivní trilinearity (T_1) a (T_2) mezi týmiž řadami R, R', R'' promítají se však z bodů v, v', v'' obecně trilineárními svazky. Označme takto vzniklé trilinearity mezi svazky paprskovými o vrcholech v, v', v'' : (T^v), T^v_1, T^v_2. Jest známo, že 3 obecně trilineární svazky paprskové téže roviny vytvoří obecnou křivku 3. řádu, jakožto geometrické místo bodů, jimiž procházejí tři sobě příslušné paprsky těch svazků.[4]) Tato křivka prochází vrcholy svazků a 6 průsečíky neutrálních párů. Trilinearitami T_1^v a T_2^v se tedy vytvoří 2 křivky kubické K_1^3 a K_2^3, které musí procházeti body v, v', v'' a čtyřmi základními body $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ svazku, jemuž kuželosečky K, K', K'' náležejí, poněvadž v každém z těch bodů se ztotožňují 3 body sobě příslušné trilinearitami (T), (T_1), (T_2). Trilinearity (T^v), T_1^v mají ∞^1 společných trojic, t. j. těch trojic, které vytvořují křivku K_1^3, a podobně trilinearity (T^v), T_2^v mají společné trojice, které vytvořují křivku K_2^3. Společné body křivek K_1^3 a K_2^3 určují tedy společné trojice trilinearit (T^v), T_1^v, T_2^v, které zřejmě určují na kuželosečkách K, K', K'' společné trojice trilinearit (T), (T_1), (T_2). Poněvadž křivky K_1^3, K_2^3 mají mimo 4 body $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a 3 body v, v', v'' pouze ještě 2 body ξ, η společné, můžeme vysloviti větu:

b) Tři perspektivní trilinearity mezi řadami bodovými na 3 kuželosečkách téhož svazku mají 2 společné trojice příslušných sobě bodů.

Z věty *b)* snadno odvodíme, kolika trojicemi jest určena perspektivní trilinearita bodových řad na 3 kuželosečkách téhož svazku. Jsou-li e, e', e''; f, f', f''; g, g', g'' ... atd. trojice libovolné perspektivní trilinearity (T), dané trojicí základních bodů v, v', v'', musí tyto body hověti podmínce, že spojnice $ev, e'v', e''v''$ procházejí týmž bodem ε, podobně spojnice $fv, f'v', f''v''$ bodem φ.

[4]) Sturm, str. 324.

atd., čili body v, v', v'' tvoří společnou trojici všech perspektivních trilinearit (T_e), (T_f), (T_g) ..., určených jednotlivými trojicemi trilinearity (T). Trilinearity (T_e), (T_f), (T_g) mají však podle výše uvedené věty pouze 2 společné trojice x, x', x''; y, y', y'', takže musí platiti totožnosti: $x \equiv v$, $x' \equiv v'$, $x'' \equiv v''$; $y \equiv w$, $y' \equiv w'$, $y'' \equiv w''$, při čemž w, w', w'' jest druhá trojice základních bodů, určujících tutéž trilinearitu (T) (odst. 1).

Tedy platí věta:

c) Tři perspektivně trilineární řady bodové na kuželosečkách K, K', K'' téhož svazku jsou jednoznačně určeny třemi trojicemi příslušných sobě bodů.

3. Na základě předchozího můžeme rozřešiti úlohu:

Jsou dány 3 kuželosečky K, K', K'' téhož svazku o základních bodech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a 3 trojice bodů e, f, g; e', f', g'; e'', f'', g'' na kuželosečkách K, resp. K', K''. Sestrojiti libovolnou trojici perspektivně trilineárních řad bodových, určených trojicemi e, e', e''; f, f', f''; g, g', g''.

Sestrojíme trojice v, v', v''; w, w', w'' základních bodů, určujících tu perspektivní trilinearitu, jakožto společné trojice 3 perspektivních trilinearit, příslušných k trojicím e, e', e''; f, f', f''; g, g', g'' základních bodů, podle odst. 2. Řady bodové, příslušející si trilinearitou (T_f), promítají se z bodů e, e', e'' svazky paprskovými, příslušejícími si trilinearitou T_f^e a podobně trilinearita (T_g) bodových řad promítá se z týchž bodů e, e', e'' trilinearitou svazků paprskových T_g^e.

Křivky K_f^3, K_g^3, příslušné trilinearitám T_f^e, T_g^e, procházejí body $e, e', e'', \alpha, \beta, \gamma, \delta$, a každá z nich bude tedy určena ještě dvěma body. Tyto sestrojíme nejvýhodněji takto:

Trilineární řady bodové, příslušející si perspektivní trilinearitou (T_f), mají singulární body, které jsou v průsečících spojnic ff', $f'f''$, $f''f$, s příslušnými kuželosečkami. Tyto body tvoří neutrální páry (odst. 1), které se promítají z bodů e, e', e'' neutrálními páry trilinearity T_f^e. Průsečíky neutrálních párů musí však křivka K_f^3 procházeti, i stačí tedy určiti 2 neutrální páry. Vyhledáme na př. průsečík s_f přímky ff' s kuželosečkou K a spojíme jej s bodem e přímkou S_f, dále určíme průsečík t_f' téže přímky s kuželosečkou K' a spojíme s bodem e' přímkou T'_f. Přímky S_f, T_f' se protínají v bodě m_f křivky K_f^3. Obdobně určíme jiný neutrální pár trilinearity T_f^e a tím 9. bod n_f křivky K_f^3.

Podobně jako jsme určili body m_f, n_f křivky K_f^3, určíme také body m_g, n_g křivky K_g^3, takže každá křivka bude určena 9 body, z nichž 7 jest oběma společných.

Zbývající 2 společné body ξ, η obou křivek sestrojíme touto kvadratickou konstrukcí:

K základním bodům $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ svazku kuželoseček sestrojíme t. zv. protilehlé body p_f, p_g na křivkách K_f^3 a K_g^3, t. j. vrcholy svazků paprskových, které vytvořují s tím svazkem kuželoseček křivky K_f^3 a K_g^3. Jsou-li $T, T', T'', T_f^m, T_f^n, T_g^m, T_g^n$ tečny ke kuželosečkám svazku $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$, procházejícím body e, e', e'', m_f, n_f, m_g, n_g, v libovolném ze základních bodů, na př. α, jsou body p_f, p_g určeny, jak známo, projektivitami

$$p_f\,(e\,e'\,e''\,m_f\,n_f\ldots)\,\pi\,\alpha(T\,T'\,T''\,T_f^m\,T_f^n\ldots)$$
$$p_g\,(e\,e'\,e''\,m_g\,n_g\ldots)\,\pi\,\alpha(T\,T'\,T''\,T_g^m\,T_g^n\ldots)$$

Konstrukce těchto bodů jest známa. Přiřaďme sobě ony 2 paprsky svazků p_f, p_g, které příslušejí téže kuželosečce svazku $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$.

Potom můžeme psáti

$$p_f(e\,e'\,e''\ldots)\,\pi\alpha\,(T\,T'\,T''\ldots)\,\pi\,p_g(e\,e'\,e''\ldots).$$

Tedy paprskové svazky o vrcholech p_f, p_g jsou projektivní a vytvoří kuželosečku L, určenou body p_f, p_g, e, e', e''. Každým z hledaných společných bodů křivek K_e^3 a K_g^3 musí zřejmě procházeti sobě příslušné paprsky projektivních svazků p, p_g, čili oba body leží na kuželosečce L.

Zvolíme-li dále za základní body svazku kuželoseček, pomocí něhož se vytvoří křivky K_f^3, K_g^3, jiné 4 ze známých společných bodů, na př. α, β, γ, e, obdržíme uvedeným způsobem jiné 2 protilehlé body p_f^*, p_g^* a kuželosečku L^*, určenou body p_f^*, p_g^*, δ, e', e'', na které musí rovněž ležeti body hledané. Kuželosečky L a L^* mají mimo body e', e'' ještě 2 body společné, a to jsou hledané průsečíky ξ, η křivek K_f^3, K_g^3.

Body ξ a η jsou buď reálné, nebo sdruženě imaginární. V prvém případě je promítneme prostě z bodů e, e', e'' na kuželosečky K, resp. K', K'' a obdržíme tím 2 trojice bodů v, v', v''; w, w', w'', které určují jakožto trojice základních bodů tutéž perspektivní trilinearitu, určenou trojicemi e, e', e''; f, f', f''; g, g', g'' (odst. 1).

Jsou-li však body ξ a η sdruženě imaginární, promítají se z bodu e sdruženě imaginárními paprsky na kuželosečku K do bodů sdruženě imaginárních v_i, w_i, jichž reálnou spojnici snadno sestrojíme.[5]) Podobně z bodu e' promítají se tytéž body do sdruženě imaginárních bodů v_i', w_i' na kuželosečku K' a z bodu e'' do bodů v_i'', w_i'' na kuželosečku K''. Reálné spojnice $v_i'w_i'$, $v_i''w_i''$ sestrojíme rovněž.

V prvém případě protíná spojnice vv' kuželosečky K, K' v bodech s, t', spojnice $v'v''$ kuželosečky K', K'' v bodech s', t'' a spojnice $v''v$ kuželosečky K'', K v bodech s'', t.

Mimoto podle věty a) bude přímka ww' protínati kuželosečky K, resp. K' v bodech t, s', spojnice $w'w''$ kuželosečky K', K'' v bodech t', s'' a konečně přímka $w''w$ kuželosečky K'', K v bodech t'', s. Každá z těch dvojic průsečíků jest neutrálním párem příslušné perspektivní trilinearity.

V druhém případě jsou spojnice v_iv_i', w_iw_i' sdruženě imaginární přímky, tudíž jejich průsečík z'' je reálný. Konstrukce jeho

[5]) Ed. Weyr: Projektivní geometrie . . ., str. 135.

jest známa.[6]) Z tohoto bodu z'' promítají se sdruženě imaginární body v_i, w_i kuželosečky K do sdruženě imaginárních bodů s, t téže kuželosečky a sdruženě imaginární body v_i', w_i' do rovněž sdruženě imaginárních bodů t_i', s_i' kuželosečky K'. Podobně seznáváme, že jsou sdruženě imaginární body s_i'', t_i'' kuželosečky K'', do nichž se promítají body v_i, w_i z reálného průsečíku $z' \equiv (v_i v_i''; w_i w_i'')$ a. body v_i', w_i' z reálného průsečíku $z \equiv (v_i' v_i''; w_i' w_i'')$.

Tedy v každé ze 3 perspektivně trilineárních bodových řad na 3 kuželosečkách téhož svazku existují 2 body singulární, reálné nebo sdruženě imaginární, a ty 3 dvojice tvoří 6 neutrálních párů, jak výše uvedeno. Zároveň patrno, že vyskytují-li se singulární body sdruženě imaginární v jedné z těch řad, musí býti sdruženě imaginární i v ostatních 2 řadách.

Jedná se ještě o konstrukci libovolné trojice naší perspektivní trilinearity, t. j. k 2 zvoleným bodům, na př. l, l' kuželoseček K, K', konstruovati příslušný bod l'' kuželosečky K''. Tu jest třeba povšimnouti si případu, kdy trojice základních bodů v, v', v''; w, w', w'' dané perspektivní trilinearity jsou imaginární. Pak musíme postupovati takto:

Bod l promítá se z bodů v_i, w_i dvěma sdruženě imaginárními paprsky L_{vi}, L_{wi}, bod l' z bodů v_i', w_i' rovněž dvěma sdruženě imaginárními paprsky L'_{vi} L'_{wi}. Průsečík $(L_{vi} L'_{vi}) \equiv \lambda_{vi}$ jest tedy sdruženě imaginární bod k průsečíku $\lambda_{wi} \equiv (L_{wi} L'_{wi})$, a proto spojnice $\lambda_{vi} \lambda_{wi}$, kterou určíme známou konstrukcí, jest reálná. Spojnice $\lambda_{vi} v''_i$, $\lambda_{wi} w_i''$ jsou sdruženě imaginární, tedy jejich průsečík, snadno sestrojitelný, jest reálný a musí ležeti na kuželosečce K'', což lze dokázati tak, jak bylo dokázáno v případě reálných trojic základních bodů na počátku tohoto pojednání. Tento průsečík jest tedy bodem l'', příslušným trilineárně k bodům $l\,l'$.

4. Je-li dána *obecná trilinearita* T jakýchkoliv tří útvarů 1. řádu U, U', U'' (nebo obecně 3 útvarů unikursálních) 7 trojicemi

$$A,A',A''; B,B',B''; C,C',C''; D,D',D''; E,E',E''; F,F',F''; G,G',G''$$

příslušných sobě elementů, můžeme určiti její neutrální páry a konstruovati další trojice pomocí perspektivně trilineárních řad bodových na 3 kuželosečkách téhož svazku.

Zvolme čtyři body $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ v rovině ϱ a sestrojme kuželosečky K, K', K'' svazku o základních bodech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, hovící podmínkám:

$$\begin{aligned} k\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\ldots) &\;\pi\; U\,(A\;\;B\;\;C\;\;D\;\ldots), \\ k'(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\ldots) &\;\pi\; U'(A'\;B'\;C'\;D'\ldots), \\ k''(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\ldots) &\;\pi\; U''(A''\;B''\;C''\;D''\ldots), \end{aligned}$$

při čemž k, k', k'' značí obecné body kuželoseček K, resp. K', K''. Dále sestrojme na kuželosečce K body e, f, g tak, aby platila projektivita

[6]) Tamtéž.

$$K(\alpha\beta\gamma\delta efg\ldots)\ \pi\ U(ABCDEFG\ldots); \quad \text{I.}$$

na kuželosečce K' určeme body e', f', g', hovící projektivitě:

$$K'(\alpha\beta\gamma\delta e'f'g'\ldots)\ \pi\ U'(A'B'C'D'E'F'G'\ldots) \quad \text{II.}$$

a konečně na K'' sestrojme body e'', f'', g'', určené projektivitou:

$$K''(\alpha\beta\gamma\delta e''f''g''\ldots)\ \pi\ U''(A''B''C''D''E''F''G''\ldots) \quad \text{III.}$$

Třemi trojicemi e, e', e''; f, f', f''; g, g', g'' jest určena podle předchozího perspektivní trilinearita (T) bodových řad na kuželosečkách K, K', K'', která se transformuje projektivitami I, II, III v danou trilinearitu T, což vyplývá z této úvahy:

Mimo trojice e, e', e''; f, f', f''; g, g', g'' známe ještě 4 zvláštní trojice perspektivní trilinearity (T):

$$a \equiv a' \equiv a'' \equiv \alpha;\ b \equiv b' \equiv b'' \equiv \beta;\ c \equiv c' \equiv c'' \equiv \gamma;\ d \equiv d' \equiv d'' \equiv \delta,$$

tedy celkem 7 trojic, jimž odpovídají projektivitami I, II, III dané trojice

A, A', A''; B, B', B''; C, C', C''; D, D', D''; E, E', E''; F, F', F''; G, G', G'' trilinearity T. Ke každé další trojici trilinearity (T) obdrželi bychom projektivitami I, II, III určitou trojici jisté obecné trilinearity, která by však byla totožná s danou trilinearitou T, neboť by s ní měla daných 7 trojic společných, jimiž je obecná trilinearita jednoznačně určena.[7])

K libovolným dvěma elementům, na př. L, L' útvarů U, U' určíme tedy příslušný element L'' útvaru U'' takto:

Sestrojíme body l, l' kuželoseček K, K', příslušné projektivitami I, II k elementům L, L', určíme příslušný bod l'' v perspektivní trilinearitě (T) výše odvozenou konstrukcí a k bodu l'' najdeme element útvaru U'', příslušný projektivitou III, kterýž jest hledaným elementem L''.

II.

5. Jsou-li danými, obecně trilineárními útvary, 3 svazky rovinové o mimoběžných osách U, U', U'', vytvoří se jimi, jak již na počátku uvedeno, obecná plocha kubická P^3, která mimo přímky U, U', U'' jest ještě určena 7 body. Naší konstrukcí lze výhodně plochu konstruovati, jsou-li: *a*) všechny body reálné, *b*) 5 bodů reálných a 2 sdruženě imaginární, *c*) 3 body reálné a 2 páry bodů sdruženě imaginárních.

a) *Konstrukce plochy kubické* P^3, *dané třemi mimoběžkami* U, U', U'' *a 7 reálnými body*

$$a^\circ, b^\circ, c^\circ, d^\circ, e^\circ, f^\circ, g^\circ.$$

Rovinu $(a^\circ b^\circ c^\circ) \equiv \varrho$ zvolíme za průmětnu, která protíná přímky U, U', U'' v bodech u, u', u''. Body $a^\circ, b^\circ, c^\circ, d^\circ, e^\circ, f^\circ, g^\circ$ se promítají z přímek U, U', U'' svazky rovinovými

7) Sturm, str. 327.

$$U(\mathrm{A\,B\,C} \dots \mathrm{G});\ U'(\mathrm{A'\,B'\,C'} \dots \mathrm{G'});\ U''(\mathrm{A''\,B''\,C''} \dots \mathrm{G''}),$$

které průmětna ϱ protíná ve svazcích paprskových

$$u(A\,B\,C \dots G);\ u'(A'\,B'\,C' \dots G');\ u''(A''\,B''\,C'' \dots G'').$$

7 trojicemi A, A', A''; B', B', B''; ... G, G', G'' jest určena obecná trilinearita těch svazků paprskových u, u', u'', jejíž další trojice sestrojíme podle odst. 4. Jest výhodné pro konstrukci více trojic, zvoliti základní body $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ příslušného svazku kuželoseček na kružnici K, určené body $a^\circ\ b^\circ\ c^\circ$, a to tak, že $a^\circ \equiv \alpha$, $b^\circ \equiv \beta$, $c^\circ \equiv \gamma$ a že bod δ určuje projektivita

$$K(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \dots)\ \pi\ u(A\,B\,C\,D \dots).$$

Jinak se konstrukce neliší od konstrukce uvedené v odstavci 4. Je-li L, L', L'' libovolná trojice trilineárních svazků paprskových u, u', u'', protnou se roviny $(UL) \equiv \mathrm{L}$; $(U'\,L') \equiv \mathrm{L'}$ a $(U''L'') \equiv \mathrm{L''}$ v bodě l° dané plochy kubické.

b) Kubická plocha P^3 *jest určena třemi mimoběžkami* U, U', U'', *dvěma sdruženě imaginárními body* a_i°, b_i° *a pěti reálnými body*, $c^\circ, d^\circ, e^\circ, f^\circ, g^\circ$. Průmětnu ϱ položme libovolně, na př. přímkou $c^\circ d^\circ$, takže svazky u, u', u'', ve kterých protíná svazky rovinové U, U', U'', budou obsahovati dvojice sdruženě imaginárních paprsků A_i, B_i; resp. A_i', B_i'; A_i'', B_i''.

Základní body $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ svazku kuželoseček v rovině ϱ zvolme tentokráte tak, že $\alpha \equiv i_\infty$, $\beta \equiv j_\infty$, jsou imaginární body kruhové v nekonečnu a $\gamma \equiv c^\circ$, $\delta \equiv d^\circ$.

Potom lze body $i_\infty, j_\infty, c^\circ, d^\circ$ sestrojiti kružnice K, K', K'' (jichž obecné body označíme k, resp. k' k'') tak, aby platily projektivity:

$$\begin{aligned} k\,(i_\infty\,j_\infty\,c^\circ\,d^\circ \dots)\ &\pi\ u\,(A_i\ B_i\ C\ D\ \dots), \\ k'(i_\infty\,j_\infty\,c^\circ\,d^\circ \dots)\ &\pi\ u'(A_i'\ B_i'\ C'\ D' \dots), \\ k''(i_\infty\,j_\infty\,c^\circ\,d^\circ \dots)\ &\pi\ u''(A_i''\ B_i''\ C''\ D'' \dots). \end{aligned}$$

Pro kružnici K (a obdobně pro obě ostatní) provedeme konstrukci tak, že určíme její tečnu T v bodě d°, příslušnou k paprsku D v projektivitě

$$d^\circ(i_\infty\,j_\infty\,c^\circ\,T \dots)\ \pi\ u(A_i\,B_i\,C\,D \dots),$$

známou konstrukcí,[8]) kterou získáme 3 reálné, sobě příslušné dvojice. Obdobně budeme postupovati při sestrojování kružnic K', K''.

Potom určíme na kružnici K body e, f, g, na kružnici K' body e', f', g' a na kružnici K'' body e'', f'', g'' tak, aby platily projektivity:

$$\begin{aligned} K\,(i_\infty\,j_\infty\,c^\circ\,d^\circ\,e\,\ f\,\ g\ \dots)\ &\pi\ u\,(A_i\ B_i\ C\ D\ E\ F\ G \dots), \\ K'(i_\infty\,j_\infty\,c^\circ\,d^\circ\,e'\,f'\,g' \dots)\ &\pi\ u'(A_i'\ B_i'\ C'\ D'\ E'\ F'\ G' \dots), \\ K''(i_\infty\,j_\infty\,c^\circ\,d^\circ\,e''\,f''\,g'' \dots)\ &\pi\ u''(A_i''\ B_i''\ C''\ D''\ E''\ F''\ G'' \dots). \end{aligned}$$

[8]) Sturm str. 98.

Křivky K_f^3, K_g^3, jichž společné body třeba podle odstavce 3. konstruovati, jsou určeny v tomto případě dvěma společnými imaginárními body kruhovými v nekonečnu i_∞, j_∞, dalšími reálnými společnými body $c^\circ, d^\circ, e, e', e''$ a mimo to ještě každá 2 reálnými body m_f, n_f; m_g, n_g. Zvolíme tedy za základní body svazku kuželoseček, pomocí něhož se obě křivky K_f^3, K_g^3 vytvoří, jednou body $i_\infty, j_\infty, c^\circ, d^\circ$, po druhé body $i_\infty, j_\infty, c^\circ, e$ a sestrojíme jejich společné body jako v odst. 3.

c) Plocha kubická $\mathbf{P}^3$ *jest určena dvěma dvojicemi sdruženě imaginárních bodů* a_i°, b_i°; c_i°, d_i°, *třemi reálnými body* e, f, g *a třemi mimoběžnými přímkami* U, U', U''.

Průmětnu ϱ zvolme libovolně, na př. přímkou $c_i^\circ d_i^\circ$, a potom sestrojme opět 3 kružnice K, K', K'' svazku o základních bodech $i_\infty, j_\infty, c_i^\circ, d_i^\circ$ tak, aby platily pro libovolné jejich body k, resp. k', k'' vztahy:

$$\begin{aligned} k\,(i_\infty\, j_\infty\, c_i^\circ\, d_i^\circ \ldots) &\;\pi\; u\,(A_i\; B_i\; C_i\; D_i\ \ldots) \\ k'(i_\infty\, j_\infty\, c_i^\circ\, d_i^\circ \ldots) &\;\pi\; u'(A_i'\; B_i'\; C_i'\; D_i'\ \ldots) \\ k''(i_\infty\, j_\infty\, c_i^\circ\, d_i^\circ \ldots) &\;\pi\; u''(A_i''\; B_i''\; C_i''\; D_i''\ \ldots) \end{aligned}$$

Při tom jsou A_i, B_i sdruženě imaginární průsečnice rovin $\mathbf{A}_i \equiv$ $\equiv (Ua_i^\circ)$ a $\mathbf{B}_i \equiv (Ub_i^\circ)$ s průmětnou ϱ atd.

Konstrukci kružnic K, K', K'' odvodíme v tomto případě takto:

Jsou-li a_ib_i, c_id_i 2 dvojice sdruženě imaginárních bodů kuželosečky K, pak průsečík $(a_i c_i, b_i d_i) \equiv r$ jest bod reálný, podobně $s \equiv (a_i d_i, b_i c_i)$ jest bod reálný a oba body leží na poláře M reálného průsečíku m přímek $a_i b_i$, $c_i d_i$, na níž leží také pól p spojnice $a_i b_i \equiv P$, protínající poláru M v bodě q. Poněvadž s bodu a_i se promítají body a_i, b_i, c_i, d_i na přímku M do reálných bodů p, q, r, s, jest dvojpoměrem $(p\,q\,r\,s)$ těchto 4 bodů vyjádřen dvojpoměr $(a_i\; b_i\; c_i\; d_i)$ 4 bodů a_i, b_i, c_i, d_i na kuželosečce K, jimi procházející, pro níž jest bod p pólem přímky $P \equiv a_i b_i$. Máme-li tedy sestrojiti kuželosečku K body a_i, b_i, c_i, d_i tak, aby pro libovolný její bod k platila projektivita

$$k(a_i\, b_i\, c_i\, d_i \ldots) \;\pi\; u(A_i\, B_i\, C_i\, D_i \ldots),$$

protneme svazek paprskový u libovolnou kružnicí K^*, procházející vrcholem jeho u v párech sdruženě imaginárních bodů a_i^*, b_i^*, c_i^*, d_i^*, určíme podle výše uvedeného příslušné body p^*, q^*, r^*, s^* a na přímce M sestrojíme k bodům q, r, s bod p tak, aby platila rovnost dvojpoměrů

$$(p\,q\,r\,s) = (p^*\,q^*\,r^*\,s^*).$$

Tím obdrželi jsme pól p přímky $a_i b_i \equiv P$ pro hledanou kuželosečku, jejíž další konstrukce jest již snadná. Každé kuželosečce svazku o základních bodech a_i, b_i, c_i, d_i přísluší určitý pól na přímce M a naopak, takže dvojpoměr 4 kuželoseček toho svazku jest vyjádřen dvojpoměrem příslušných 4 pólů.

Jest zřejmo, že kuželosečka K jest s kružnicí K^* ve vztahu obecně kolineárním, určeném 4 páry sobě příslušných bodů a_i, a_i^*; b_i, b_i^*; c_i, c_i^*; d_i, d_i^*.
Pomocí této kolineace určíme pak k libovolnému bodu l^* kružnice K^* příslušný bod l kuželosečky K a tento bod bude příslušeti paprsku ul^* svazku u poslední projektivitou.

Poněvadž v našem případě jsou body a_i, b_i imaginárními body kruhovými v nekonečnu i_∞, j_∞, obdržíme výše uvedenou konstrukcí přímo střed hledané kružnice. Další konstrukce kružnice z daného středu a 2 sdruženě imaginárních bodů je známa. Na kružnicích K, K', K'' sestrojíme potom, jak naznačeno, body e, f, g; e', f', g'; e'', f'', g'' a určíme body p_f, p_g, protilehlé čtveřici bodů $i_\infty, j_\infty, c_i^\circ, d_i^\circ$ na křivkách K_f^3, K_g^3, pomocí řady středů kružnic svazku $(i_\infty\, j_\infty\, c_i^\circ\, d_i^\circ)$. Takto obdržíme kuželosečku L, určenou body p_f, p_g a body e, e', e'', která protíná křivky K_f^3, K_g^3 v týchž 2 bodech ξ, η. Tyto body určíme tentokráte takto:

Najdeme ještě další 3 reálné body křivky, na př. K_f^3 pomocí neutrálních párů příslušné trilinearity (odst. 3), k bodům e, e', e'', p_f určíme příslušný protilehlý bod o, najdeme paprsek O svazku o, příslušný ke kuželosečce L ve známé projektivitě mezi svazkem kuželoseček a příslušným svazkem paprskovým o vrcholu o. Průsečíky přímky O s kuželosečkou jsou hledanými body ξ, η. Další konstrukce jednotlivých trojic provedeme jako v předchozích případech.

*

Sur les constructions d'une surface cubigue générale, déterminée par trois droites générales et par sept points, dont trois au moins réels.

(Extrait de l'article précédent.)

Les points donnés $a^\circ, b^\circ, c^\circ, d^\circ, e^\circ, f^\circ, g^\circ$ sont projetés des droites données U, U', U'' par sept triades de plans A, A', A''; B, B', B''; C, C', C''; D, D', D''; E, E', E''; F, F', F''; G, G', G'', par lesquelles sont déterminés des faisceaux trilinéaires de plans aux axes U, U', U'', engendrant la surface cubique en question P^3. La construction des points de cette surface se réduit à la détermination de nouvelles triades de la trilinéarité I, déteminée par les sept triades données. Pour ce but, on choisit un plan ϱ et quatre points qui lui appartiennent $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; par ceux-ci on fait passer trois coniques K, K', K'', contenant, respectivement, les groupes de points e, f, g; e', f', g'; e'', f'', g'' tels que les homographies aient lieu:

$$K\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,e\,f\,g\,\ldots)\,\pi\,U\,(A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,\ldots) \quad (1)$$
$$K'\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,e'\,f'\,g'\,\ldots)\,\pi\,U'\,(A'\,B'\,C'\,D'\,E'\,F'\,G'\,\ldots) \quad (2)$$
$$K''\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,e''\,f''\,g''\,\ldots)\,\pi\,U\,(A''\,B''\,C''\,D''\,E''\,F''\,G''\,\ldots). \quad (3)$$

Aux points f, f', f'' correspond, ceux-ci étant des points fondamentaux, une trilinéarité perspective (I_f) de ponctuelles situées, respectivement, sur les coniques K, K', K'', laquelle est projetée, des points e, e', e'', par deux faisceaux de droites aux sommets e, e', e'', liés par une trilinéarité générale. Ces faisceaux engendrent, par les triades de droites correspondantes et se coupant en un point, une cubique K_f^3, passant par les points de base du faisceau de coniques $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et par les points e, e', e''. Chaque couple de droites singulières des faisceaux trilinéaires e, e', e'', formant un couple neutre, a pour point d'intersection encore un point de la courbe K_f^3. On déterminera de la même manière encore deux points m_f, n_f de cette courbe, laquelle sera, par conséquent, déterminée par neuf points.

D'une manière analogue, aux points g, g', g'' correspond une trilinéarité perspective (I_g) et une courbe K_g^3, déterminée par les neuf points

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, e, e', e'', m_g, n_g.$$

Les courbes K_f^3, K_g^3 se coupent, en dehors des points communs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, e, e', e''$ encore en deux points ξ, η, réels ou imaginaires conjugués, lesquels sont projetés, des points e, e', e'', sur les coniques K, K', K'', respectivement, suivant les points v, w; v', w'; v'', w'', réels ou imaginaires conjugués. Les triades de points v, v', v''; w, w', w'' déterminent la même trilinéarité perspective (I); les points l, l', l'' qui se correspondent par cette trilinéarité sont tels que les droites $lv, l'v', l''v''$ se coupent en un point et les droites $lw, l'w', l''w''$ en un autre point. La trilinéarité perspective (I) se transforme par les homographies (1), (2), (3) en la trilinéarité générale I, de sorte qu'on peut continuer à determiner un nombre quelconque de triades de cette trilinéarité et, par conséquent, de points de la surface P^3.