Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Schuster

O simplexech

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 3-4, 268--299

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124007

O simplexech.

Dr. Jan Schuster.

I. Poznámky o objemu.

V této první části podám několik formulí, jimiž doplním úvahy, uveřejněné r. 1923 v práci „Contribution á la théorie du volume", v Comptes rendus du Congrès de l'Association Française pour l'Avancement des sciences tenu à Bordeaux. Tam byl vyjádřen objem n-rozměrného simplexu objemy jistých $(n-1)$-rozměrných hranolů, jež pro tři rozměry mají svoji obdobu v rovnoběžnících, a jsou rovny objemu opsanému simplexem o dva rohy nižším, pošinutým o úsečku spojující tyto vynechané rohy.

Je tedy H_{12} hranol, odpovídající vynechaným rohům 1 a 2, objemu

$$(n-2)!\,H_{12} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \dots x_1^{(n)} \\ 1 & x_3^{(1)} & x_3^{(2)} \dots x_3^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} \; x_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ 1 & x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & \dots & x_3^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & \dots & x_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x_1^{(1)} - x_2^{(1)} & x_1^{(2)} - x_2^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} - x_2^{(n)} \\ 1 & x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & \dots & x_3^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & \dots & x_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (1a)$$

Obvyklý způsob násobení pak dá: $-((n-2)!\,H_{12})^2 =$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & & 1 \\ 0 & \sum_k (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})^2 & \sum_k (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})\, x_3^{(k)} & & \sum_k (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})\, x_{n+1}^{(k)} \\ 1 & \sum_k (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})\, x_3^{(k)} & \sum_k x_3^{(k)2} & \dots & \sum_k x_3^{(k)}\, x_{n+1}^{(k)} \\ 1 & \sum_k (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})\, x_4^{(k)} & \sum_k x_3^{(k)}\, x_4^{(k)} & \dots & \sum_k x_4^{(k)}\, x_{n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \sum_k (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})\, x_{n+1}^{(k)} & \sum_k x_3^{(k)}\, x_{n+1}^{(k)} & \dots & \sum_k x_{n+1}^{(k)2} \end{vmatrix}$$

Znásobme každý součet dvěma a odečtěme první řádek a sloupec znásobené čísly

$$\sum_k (x_1^{(k)2} - x_2^{(k)2}),\ \sum_k x_3^{(k)2},\ \sum_k x_4^{(k)2}, \dots \sum_k x_{n+1}^{(k)2}$$

od ostatních. Obdržíme ve druhém řádku a sloupci členy tvaru

$$2\sum_k (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})\, x_3^{(k)} - \sum_k (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})\,(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) =$$

$$= \sum_k (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})\,(x_3^{(k)} - x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - x_2^{(k)}) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_k [-(x_1^{(k)} - x_2^{(k)})^2 - (x_3^{(k)} - x_1^{(k)})^2 +$$

$$+ (x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + x_3^{(k)} - x_1^{(k)})^2 + (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})^2 + (x_3^{(k)} - x_2^{(k)})^2$$
$$- (x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + x_2^{(k)})^2] = a_{23}^2 - a_{13}^2, \text{ atd.}$$

Ostatní členy jsou dobře známy, takže celkem platí

$$(-1)^{n+1}\, 2^{n-1}\, [(n-2)!\, H_{12}]^2 =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -2a_{12}^2 & a_{13}^2 - a_{23}^2 & \dots & a_{1,n+1}^2 - a_{1,n+1}^2 \\ 1 & a_{13}^2 - a_{23}^2 & 0 & \dots & a_{3,n+1}^2 \\ 1 & a_{14}^2 - a_{24}^2 & a_{34}^3 & \dots & a_{4,n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & a_{1,n+1}^2 - a_{2,n+1}^2 & a_{3,n+1}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Abychom obdrželi jednodušší tvar, vsuňme mezi první a druhý sloupec nový: 0, 1, a_{12}^2, a_{13}^2, ... $a_{1,n+1}^2$, a odečtěme jej od (-1) násobného druhého: Vykonejme obdobný úkon na řádcích. Bude pak

$$(-1)^{n+3} \,.\, 2^{n-1}\, [(n-2)!\, H_{12})]^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & a_{12}^3 & a_{13}^3 & a_{14}^3 & a_{15}^3 & \dots \\ 0 & 1 & a_{12}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & a_{25}^2 & \dots \\ 1 & 0 & a_{13}^2 & a_{23}^2 & 0 & a_{34}^2 & a_{35}^2 & \dots \\ 1 & 0 & a_{14}^2 & a_{24}^2 & a_{34}^2 & 0 & a_{45}^2 & \dots \\ 1 & 0 & a_{15}^2 & a_{25}^2 & a_{35}^2 & a_{45}^2 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Jde-li o čtyřstěn, vystupuje v prvním a v druhém řádku a sloupci po dvou jedničkách, takže $H_{12} = H_{34}$ atd., kteráž okolnost činí toto těleso útvarem vyjimečným, kde hranoly (rovnoběžníky) H_{ik} nestačí k jeho určení.

K odvození jistých obdob, platných obecně pro souměrné determinanty s prázdnou hlavní úhlopříčkou, vrátíme se k jistým úvahám, rozvinutým v citované práci. Známo, že položíme-li počátek soustavy do $(n+1)$ -ho rohu, platí pro objem simplexu

$$n!\,S = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{2}$$

a pro jeho $(n-1)$ mocninu přidružený determinant

$$(n!\,S)^{n-1} = \begin{vmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \dots & X_1^{(n)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & \dots & X_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_n^{(1)} & X_n^{(2)} & \dots & X_n^{(n)} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

kde $X_k^{(i)}$ značí minor, příslušný k prvku $x_k^{(i)}$.

Výrazy (2) a (3) upravíme nyní na řád $(n+1)$-ní tím, že ve (2) provedeme posun počátku soustavy do libovolného bodu, předsuneme sloupec z nul a připojíme řádek z prvků $1, x_{n+1}^{(1)}. x_{n+1}^{(2)} \dots . x_{n+1}^{(n)}$, a tento přičteme ke všem předchozím, což dá

$$n!\,S = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ 1 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \\ 1 & x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & \dots & x_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix} \tag{2 a}$$

Potom však jsou předchozí $X_k^{(i)}$ zase minory tohoto determinantu pro prvky stejnoznačné, ale jsou vázány, spojeny jsouce s prvky prvního sloupce, vztahy

$$X_1^{(k)} + X_2^{(p)} + X_3^{(k)} + \dots + X_{n+1}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{4}$$

Když tedy ve (3) vsuneme nový první sloupec

$$1,\ 1, \dots,\ 1,\ n+1$$

a na zbývajících všech místech posledního řádku nahradíme nuly levými stranami rovnic (4) s odpovídajícími horními indexy, můžeme od tohoto řádku odečíst součet všech ostatních, čímž vznikne

$$(n+1)(n!\,S)^{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \dots & X_1^{(n)} \\ 1 & X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & \dots & X_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n+1}^{(1)} & X_{n+1}^{(2)} & \dots & X_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (3a)$$

Další důsledky ze (4) zde pomijím, a vytknu jen, že $X_k^{(i)}$ značí průměty $(n-1)$ rozměrných stěn simplexu do souřadných nadrovin, takže je-li α_{ij} úhel dvou takových stěn S_i a S_j, platí

$$X_i^{(1)} X_j^{(1)} + X_i^{(2)} X_j^{(i)} + \dots + X_i^{(n)} X_j^{(n)} = -(n-1)^2 S_i S_j \cos \alpha_{ij} \qquad (4a)$$

Označíme-li $X_{ij}^{(k)}$ průmětům hranolu H_{ij} odpovídající hodnoty, takže

$$X_{ij}^{(k)} = X_i^{(k)} + X_j^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \dots (n+1),$$

plyne sečtením čtverců, těchto rovnic

$$\frac{1}{(n-1)^2} H_{ij}^2 = S_i^2 + S_j^2 - 2\, S_i\, S_j \cos \alpha_{ij} \qquad (5)$$

Když nyní $(2a)$ známým způsobem převedeme na čtverec, bude

$$(-1)^n\, 2\, (n!\, S)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_{13}^2 & a_{12}^2 & \dots & a_{1,n+1}^2 \\ 1 & a_{12}^2 & 0 & a_{23}^2 & \dots & a_{2,n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{1,n+1}^2 & a_{2,n+1}^2 & & \dots & 0 \end{vmatrix} = D \quad (6)$$

Když srovnáme výraz (1), jejž možná rozvinout podle prvků druhého řádku a sloupce se (6), vidíme, že

$$(-2)^{n-1} [(n-2)!\, H_{12}]^2 = A_{11} + A_{22} + 2\, A_{12} \qquad (7),$$

kde A_{ij} značí minor, přidružený prvku a_{ij}^2 v D (6), při čemž

$$A_{ii} = (-2)^{n-1} [(n-1\,!\, S_i]^2,\ A_{ij} = -(-2)^{n-1} (n-1)^2 S_i\, S_j \cos \alpha_{ij} \qquad (8)$$

V citované práci jsem převedl $(3a)$ na podobný čtverec s plnou úhlopříčkou. Avšak nyní chci odvodit výraz obdobný k (6) s prázdnou úhlopříčkou.

Zvolme za určovací prvky objemy simplexů $(n-1)$-rozměrných, které obsahují jako rohy těžiště o souřadnicích

$$x_t^{(k)} = \frac{1}{n+1} (x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + \dots + x_{n+1}^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

a dalších $(n-1)$ rohů, takže je těchto útvarů $\binom{n+1}{2}$, tedy počet dostatečný k určení simplexu. Označíme-li průměty těchto simplexů Y_{ij}, kde se vztahuje na souřadnou nadrovinu, $i \,.\, j$ na vynechané rohy, bude na př.

$$(n-1)!\, Y_{1,2}^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & x_t^{(2)} & x_t^{(3)} & \dots & x_t^{(n)} \\ 1 & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} & \dots & x_3^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1}^{(2)} & x_{n+1}^{(3)} & \dots & x_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

Když dosadíme výše udané prvky $x_t^{(k)}$, můžeme znásobiti první řádek číslem $(n+1)$, odečíst od něho součet ostatních, takže v něm zbudou prvky

$$2,\ x_1^{(2)} + x_2^{(2)} \,.\, x_1^{(3)} + x_2^{(3)}, \dots x_1^{(n)} + x_2^{(n)}$$

a můžeme pravou stranu štěpit na dvě části, jež po srovnání se $(2a)$ ukazují, že

$$(n+1)\,.\,(n-1)!\, Y_{12}^{(1)} = X_1^{(1)} - X_2^{(1)}.$$

Utvoříme-li tyto rovnice pro všech n horních indexů, a sečteme-li jejich čtverce, obdržíme

$$[(n+1)\,.\,(n-1)!\, T_{12}]^2 = [(n-1)!]^2\, [S_1^2 + S_2^2 + 2\, S_1 S_2 \cos \alpha_{12}]$$

a podle (8) platí obecně

$$(n+1)^2\, T_{ij} = A_{ii} + A_{jj} - 2\, A_{ij}. \tag{9}$$

Když nyní utvoříme čtverec výrazu $(3a)$, vystoupí v něm jako prvky součty $(4a)$, které podle (9) jsou rovny

$$\tfrac{1}{2}\, [A_{ii} + A_{jj} - (n+1)^2\, T_{ij}^2]\,.$$

Znásobíme-li ještě pravou i levou stranu číslem 2^n, bude

$$-\,2^n\,(n+1)^2\,(n!\,S)^{2(n-1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & -(n-1)^2 T_{12}^2 & \dots \\ 1 & -(n+1)^2 T_{12}^2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{vmatrix}$$

a po odstranění činitele $-(n+1)^2$ vznikne

$$(-1)^{n-1}\, 2^n \left[+\frac{n!\,S}{n+1}\right]^{2(n+1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & T_{12}^2 & T_{13}^2 & \dots \\ 1 & T_{12}^2 & 0 & T_{23}^2 & \dots \\ 1 & T_{13}^2 & T_{13}^2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{vmatrix} \tag{10}$$

Tím jsme získali výraz zcela obdobně stavěný jako (6).

Když bereme výraz (10) jako determinant přidružený D' k deterninantu D v (6), obdržíme vztah:

$$\boxed{D' = (-2)^{-(n-1)^2}(n+1)^{-2(n-1)}D^{n-1}}, \tag{11}$$

při čemž je D' determinant mající s D stejné prvky v prvním řádku i sloupci, ale ostatní prvky nejsou přímo minory determinantu D, nýbrž lineární jejich kombinace

$$\boxed{\frac{1}{(n+1)^2}[(A_{ii} + A_{jj} - 2A_{ij}]}.$$

Jako jsem v citované práci udal pro objem duální výraz s plnou úhlopříčkou, odvodím nyní ještě podobný výraz pro hranové vyjádření jako protějšek k formuli (6)

Spojme rohy simplexu hranami tak, aby vznikl jednoduchý polygon s vrcholy číslovanými od 1 do $(n+1)$. Simplex, který vznikne pošinutím těchto hran do libovolného bodu, má stejný objem s původním. Tedy

$$n!\,S = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} - x_2^{(1)} & x_1^{(2)} - x_2^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} - x_2^{(n)} \\ x_2^{(1)} - x_3^{(1)} & x_2^{(2)} - x_3^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} - x_3^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} - x_{n+1}^{(1)} & x_n^{(2)} - x_{n+1}^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} - x_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Avšak řada identit

$$(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) + (x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) + \dots + (x_n^{(k)} - x_{n+1}^{(k)}) + (x_{n+1}^{(k)} - x_1^{(k)}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots n) \tag{13}$$

nás vede k opakování úkonu provedeného na (3): když předsuneme sloupec 1, 1, . . ., 1 . $n+1$, a na ostatních nulových místech posledního řádku zavedeme levé strany rovnic (13), můžeme odečíst všecky řádky od posledního, čímž vznikne

$$(-1)(n+1)\,n!\,S = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} - x_2^{(1)} & \dots & x_1^{(n)} - x_2^{(n)} \\ 1 & x_2^{(1)} - x_3^{(1)} & \dots & x_2^{(n)} - x_3^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^{(1)} - x_{n+1}^{(1)} & \dots & x_n^{(n)} - x_{n+1}^{(n)} \\ 1 & x_{n+1}^{(1)} - x_1^{(1)} & \dots & x_{n+1}^{(n)} - x_1^{(n)} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Určeme zase čtverec této rovnice, při čemž vystoupí členy

$$\sum_{k=1}^{n+1} (x_m^{(k)} - x_n^{(k)}) = a_{m,n}^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})(x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) = -\tfrac{1}{2}(a_{12}^2 + a_{23}^2 - a_{13}^2)$$

$$\sum_k (x_1^{(k)} - x_2^{(k)})(x_4^{(k)} - x_5^{(k)}) = \sum_k x_1^{(k)} - x_2^{(k)})(x_4^{(k)} - x_1^{(k)} + x_1^{(k)} - x_5^{(k)})$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum\Big\{(x_4 - x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (x_4 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_5)^2 -$$
$$- (x_2 - x_5)^2\Big\} = \tfrac{1}{2}\Big\{(a_{24}{}^2 + a_{15}{}^2 - a_{14}{}^2 - a_{25}{}^2)\Big\}.$$

Násobíme-li determinant číslem 2^n, a přičteme-li první řádek a sloupec, násobené resp. čísly $a_{12}{}^2, a_{23}{}^2, a_{34}{}^2, \ldots, a_{n,n+1}{}^2, s_{n+1,1}{}^2$, k následujícím, budou členy úhlopříčky $4a_{k,k+1}{}^2$, kdežto ostatní budou tvaru

$$a_{24}{}^2 + a_{15}{}^2 + a_{12}{}^2 + a_{45}{}^2 - a_{14}{}^2 - a_{25}{}^2 = (14, 25),$$

při čemž opakování indexu vede ke zjednodušení, na př.

$$(14,\ 24) = a_{12}{}^2 + a_{42}{}^2 + a_{41}{}^2 + a_{44}{}^2 - a_{14}{}^2 - a_{24}{}^2 = a_{12}{}^2 = (12)$$

Možná tedy psáti výsledek symbolicky takto:

$$-(n+1)^2\,(n!\,S)^2\,.\,2^n = \tag{15}$$
$$= \begin{vmatrix} 0, & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1, & 4\,(12) & (13) & (13,\ 24) & (14,\ 25) & \ldots & (1, n+1,\ 21) \\ 1, & (13) & 4(23) & (24) & (24,\ 35) & \ldots & (2; n+1,\ 31) \\ 1, & (13,\ 24) & (24) & 4(34) & (35) & \ldots & (3, n+1,\ 41) \\ 1, & (14,\ 25) & (24,\ 35) & (35) & 4\,(45) & \ldots & (4, n+1,\ 51) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & (2, n+1) & (2, n+1; 31) & (3, n+1; 41) & (4, n+1; 51) & \ldots & 4(n+1,\ 1) \end{vmatrix}$$

Omezíme-li se na tři rozměry, obdržíme formuli, již jsem udal v práci o čtyřstěnu z r. 1923 v jubilejním svazku p. prof. Dra V. Lásky, neboť

$$(13,\ 24) = c^2 + a'^2 + a^2 + c'^2 - b^2 - b'^2 = b''^2,$$
$$(14,\ 21) = c^2 + 0 + b'^2 + a'^2 - a'^2 - c^2 = b'^2,$$

akže

$$16\,.\,48^2\,.\,T^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4\,c^2 & b^2 & b''^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & 4\,a^2 & b'^2 & b''^2 \\ 1 & b''^2 & b'^2 & 4\,c'^2 & b^2 \\ 1 & b'^2 & b''^2 & b^2 & 4\,a'^2 \end{vmatrix} =$$

Formulí tvaru (15) možná ovšem utvořit pro týž simplex tolik, kolika polygony lze spojit $(n+1)$ roh, totiž $\dfrac{n!}{2}$.

O simplexech tečnových.

Tímto jménem označujme simplexy, jejichž hrany se dotýkají téže hypersféry. Tečny z téhož rohu k vedené mají tutéž délku t_k, z čehož

$$a_{ik} = t_i + t_k \tag{16}$$

a

$$a_{hi} + a_{kl} = a_{hk} + a_{il} = a_{hl} + a_{ik}.$$

Všecky částečné čtyřstěny $(hikl)$ jsou tedy rovněž tečnové.

Abychom obdrželi poloměr tečné hypersfery, vzpomeňme, že vymizí determinant s prvky rovnými čtvercům vzdáleností mezi $(n + 2)$ body v prostoru n-rozměrném. Zvolíme-li tedy za $(n + 2)$-hý bod střed tečné hypersfery, jenž má od rohů simplexu vzdálenosti $\mathfrak{R}^2 + t^2$, obdržíme:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (t_1 + t_2)^2 & (t_1+t_3)^2 \dots & (t_1 + t_{n+1})^2, & t_1^2 + \mathfrak{R}^2 \\ 1 & (t_2 + t_1)^2 & 0 & (t_2+t_3)^2 \dots & (t_2 + t_{n+1})^2, & t_2^2 + \mathfrak{R}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & (t_{n+1}+t_1^2) & (t_{n+1}+t_2)^2 & \dots & 0 & t_{n+1}^2 + \mathfrak{R}^2 \\ 1 & \mathfrak{R}^2+t_1^2 & \mathfrak{R}^2+t_2^2 & \dots & \mathfrak{R}^2 + t_{n+1}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Odečtěme první řádek a sloupec, znásobené resp. čísly t_1^2, $t_2^2, \dots t_{n+1}^2$, $\mathfrak{R}^2$, od ostatních. Pak bude poslední řádek a sloupec mít nuly mimo krajní členy 1, $-2\mathfrak{R}^2$, 1 resp., takže, rozvineme-li determinant podle prvků posledního řádku, vidíme, že minor patřící $k - 2\mathfrak{R}^2$ není než $(n!\,S)^2$, totiž

$$(n!S)^2 = (-1)^{n-1}\, 2^{-n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & -2\,t_1^2 & 2\,t_1t_2 & \dots & 2\,t_1t_{n+1} \\ 1 & 2\,t_2t_1 & -2\,t_2^2 & \dots & 2\,t_2t_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & 2\,t_{n+1}t_1 & & \dots & -2t_{n+1}^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\,2^{n-1}\,(t_1t_2 \dots t_{n+1})^2 \begin{vmatrix} n-1 & \sum \frac{1}{t_k} \\ \sum \frac{1}{t_k} & \sum \frac{1}{t_k^2} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Druhý člen je první hlavní minor posledního determinantu a proto

$$-\,2\,\mathfrak{R}^2\,(-1)^{n-1}\,2^n(n!S)^2 = (n-1)\,(-1)^n\,2^{2n+1}\,(t_1t_2 \dots t_{n+1})^2,$$

nebo

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{(n-1)\,2^n}{(n!\,S)^2}\,(t_1t_2 \dots t_{n+1})^2. \tag{17}$$

Střed hypersféry právě uvažované určuje s hypersférou $(n-1)$-rozměrnou, vepsanou do stěny, nadkužel, jehož površky skloněny k základně pod týmž úhlem δ_k. Dvě sousední stěny $[(n-1)$-rozměrné$]$ svírají pak úhel

$$\alpha_{ik} = \delta_i + \delta_k. \tag{18}$$

Když tedy dosadíme výrazy

$$\cos \alpha_{ik} = \sin \delta_i \sin \delta_k\,[\operatorname{cotg} \delta_i \operatorname{cotg} \delta_k - 1],$$

do výsledku eliminace stěn simplexy z rovnic vyjadřujících jednu stěnu průměty všech ostatních, vznikne rovnice tvaru:

$$\| -\operatorname{cosec}^2 \delta_1, \operatorname{cotg} \delta_1 \operatorname{cotg} \delta_2 - 1, \operatorname{cotg} \delta_1 \operatorname{cotg} \delta_3 - 1, \ldots, \operatorname{cotg} \delta_1 \operatorname{cotg} \delta_{n+1} - 1 \| = 0,$$

což je první řádek determinantu řádu $(n + 1)$-ho

Vložme nový sloupec ze samých jedniček a přičtěme jej ke všem ostatním sloupcům. Znásobme pak determinant součinem $(\operatorname{tg} \delta_1 \ldots \operatorname{tg} \delta_{n+1})^2$, čímž vznikne

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg} \delta_1 & \operatorname{tg} \delta_2 & \ldots & \operatorname{tg} \delta_{n+1} \\ \operatorname{tg} \delta_1 & -1 & 1 & \ldots & 1 \\ \operatorname{tg} \delta_2 & 1 & -1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

což lze přepsat na

$$\begin{vmatrix} n-1 & \sum \operatorname{tg} \delta_k \\ \sum \operatorname{tg} \delta_k & 2 + \sum \operatorname{tg}^2 \delta_k \end{vmatrix} = 0. \qquad (19)$$

Označíme-li ϱ_k sférický poloměr nadkužele tečného, opsaného z rohu k hypersféře dotýkající se hran, bude

$$\operatorname{tg} \varrho_k = \frac{\Re}{t_k} \qquad (20)$$

a podle (16) a (17)

$$-\begin{vmatrix} n-1 & \sum \operatorname{tg} \varrho_k \\ \sum \operatorname{tg} \varrho_k & \sum \operatorname{tg}^2 \varrho_k \end{vmatrix} = 2\,(n-1) \qquad (21)$$

nebo

$$(\operatorname{tg} \varrho_1 \operatorname{tg} \varrho_2 \ldots \operatorname{tg} \varrho_{n+1})^2 = \frac{\Re^2}{(t_1 \ldots t_{n+1})^2} = -\frac{\Re^{2n}\,(n-1)\,2^n}{(n!\,S)^2}$$

Úhly ϱ_k a δ_k vázány relací, již poskytuje vztah objemu S a objemů částí, určených stěnami a středem hypersféry

$$nS = \sum_{k=1}^{n+1} S_k\, \Re_k \operatorname{tg} \delta_k,$$

je-li $\Re_k$ poloměr $(n-1)$-rozměrné hypersféry, vepsané do stěny S_k a dotýkající se jejích hran. Ale podle (20) platí

$$\Re_k S_k = \frac{\sqrt{(n-2)\,(-1)\,2^{n+1}}}{(n-1)!} \cdot \frac{t_1 t_2 \ldots t_{n+1}}{t_k} = \frac{\sqrt{(n-2)\,(-1)\,2^{n-1}}}{(n-1)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Re S \,.\, n!}{\sqrt{(n-1)\,(-1)\,2^n}} \cdot \frac{1}{t_k} = n \sqrt{\frac{n-2}{2\,(n-1)}}\, \frac{\Re S}{t_k} = n \sqrt{\frac{n-2}{2\,(n-1)}}\, S \operatorname{tg} \varrho_k.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do předposledního výrazu, je

$$\operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\delta_2 \operatorname{tg}\varrho_2 + \ldots + \operatorname{tg}\delta_{n+1} \operatorname{tg}\varrho_{n+1} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{n-2}}. \quad (22)$$

Vyjádříme-li ze (16) a (17) reciproký poloměr tečné koule reciprokými úseky tečen, bude

$$-\frac{2(n-1)}{\mathfrak{R}^2} = (n-1)\sum\frac{1}{t_k^2} - \left(\sum\frac{1}{t_k}\right)^2 \quad (23)$$

a podobně pro poloměr $\mathfrak{R}_k$:

$$-\frac{2(n-2)}{\mathfrak{R}_k^2} = (n-2)\left(-\frac{1}{t_k^2}+\sum\frac{1}{t_l^2}\right) - \left(-\frac{1}{t_k}+\sum\frac{1}{t_l}\right)^2,$$

takže sečtením podle indexu k plyne

$$-2(n-2)\sum\frac{1}{\mathfrak{R}_k^2} = (n-2)\,n\sum\frac{1}{t_l^2} - (n-1)\left(\left(\sum\frac{1}{t_l}\right)^2 - \sum\frac{1}{t_l^2}\right),$$

nebo

$$-2(n-2)\sum\frac{1}{\mathfrak{R}_k^2} = (n^2-2n-1)\sum\frac{1}{t_l^2} - (n-1)\left(\sum\frac{1}{t_l}\right)^2. \quad (24)$$

Utvořme nyní mocnost p bodu, jehož souřadnice homogenní podle daného simplexu jako útvaru souřadného jsou

$$\frac{1}{t_1} : \frac{1}{t_2} : \ldots : \frac{1}{t_{n+1}},$$

totiž

$$p = -\frac{(n+1)(n-1)}{\left(\sum\frac{1}{t_k}\right)^2}. \quad (25)$$

Dá tedy vyloučení veličiny $\sum\frac{1}{t_k}$ z rovnice (23)

$$-\frac{2}{\mathfrak{R}^2} = \sum\frac{1}{t_k^2} + \frac{n+1}{p} \quad (26)$$

a vyloučíme-li ještě $\sum\frac{1}{t_k^2}$ z (24), obdržíme

$$(n-2)\sum\frac{1}{\mathfrak{R}_k^2} + \frac{n+1}{p} = \frac{n^2-2n+1}{\mathfrak{R}^2}. \quad (27)$$

Vyšetřme ještě poloměry hypersfér vně vepsaných, z nichž každá se dotýká jedné hrany v bodě ležícím mezi rohy ostatních hran, procházejících těmito rohy, na jejich prodloužení. Jsou-li u_k délky tečen z rohu k vedených, platí na př.

$$u_1 + u_2 = t_1 + t_2, \qquad u_k - u_1 = t_k + t_1, \qquad u_k - u_2 = t_k + t_2,$$

$$(k = 3, 4, \ldots, n + 1),$$

z čehož

$$u_1 = t_2, \quad u_2 = t_1, \quad u_k = t_1 + t_2 + t_k.$$

Předchozí odvození se pak doslovně opakuje pro prvky u_k, a plyne

$$\mathfrak{R}_{12} = \frac{\sqrt{(n-1)\,2^n}}{n!\,S} u_1 u_2 \ldots u_{n+1} = \frac{\sqrt{(n-1)\,2^n}}{n!\,S} t_1 t_2 \prod_{k=3}^{n+1} (t_k + t_1 + t_2) \tag{28}$$

pro hypersféru ležící v klínu hrany $\overline{12}$.

Je-li Δ_{klm} plocha trojúhelníka s vrcholy k, l, m, jest

$$\Delta_{klm}^2 = (t_k + t_l + t_2)\, t_k t_l t_2, \qquad \prod_{k=3}^{n+1} (t_k + t_1 + t_2) = \frac{\Pi \Delta_{k12}^2 t_1 t_2}{(t_1 t_2)^{n+1} \Pi t_k}$$

a

$$\mathfrak{R}\mathfrak{R}_{12} = \frac{(n-1)\,2^n}{(n!\,S)^2} \frac{\prod_3^{n+1} \Delta^2_{k12}}{(t_1\ t_2)^{n-2}} \tag{29}$$

Kdybychom užili formule (28) na čtyřstěn tečnový T, bude

$$\mathfrak{R}_{12} = \frac{6}{4T} t_1 t_2 (t_3 + t_1 + t_2)(t_4 + t_1 + t_2) = \frac{4}{6T} \frac{\Delta_3^2 \Delta_4^2}{t_1 t_2 t_3 t_4}.$$

Odtud plyne složená rovnice

$$\mathfrak{R}_{23} \mathfrak{R}_{14} = \mathfrak{R}_{31} \mathfrak{R}_{24} = \mathfrak{R}_{12} \mathfrak{R}_{34} = \frac{4}{9T^2} \left(\frac{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}{t_1 t_2 t_3 t_4}\right)^2 = \left(\frac{4}{9} \frac{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}{T^2 \mathfrak{R}}\right)^2 \tag{30}$$

V dalším se omezíme na vyšetření $(n + 1)$-úhelníku n-rozměrného, jenž určen $(n + 1)$ rohy uvažovaného simplexu, a všimneme si, jak položeny dotykové body. Jde-li o 4-stěn, dá součin dělicích poměrů podle rohů součin $+ 1$, tedy leží ty body v rovině, a určují proto tětivový čtyřúhelník. Jde tedy o rozhodnutí, kdy dotykové body tvoří $(n + 1)$-úhelník tětivový, položený v prostoru $(n - 1)$- rozměrném a o určení poloměru příslušné $(n - 1)$-rozměrné hypersféry.

Především patrno, že součin dělicích poměrů uvažovaných dotykových bodů jest $(-1)^{n+1}$.

Označíme-li strany uvažovaného polygonu b_{kl}, spojují-li dotykový bod hrany $a_{k,k+1}$ s dotykovým bodem $a_{l,l+1}$, bude

$$b_{kl}^2 = \frac{8 t_k t_{k+1} t_l t_{l+1}}{a_{k,k+1}\, a_{l,l+1}}, \qquad b_{k,k+1}^2 = \frac{4 t_k t_{k+1}^2 t_{k+2}}{a_{k,k+1}\, a_{k+1,k+1}} \tag{31}$$

a podmínka pro položení těchto $(n + 1)$ bodů na $(n - 1)$-rozměrné hypersféře zní, jak známo

$$\begin{vmatrix} 0 & b_{12}^2 & b_{13}^2 & \dots & b_{1,n+1}^2 \\ b_{21}^3 & 0 & b_{23}^2 & \dots & b_{2,n+1}^2 \\ b_{31}^2 & b_{32}^2 & 0 & \dots & b_{3,n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{n+1,1}^2 & b_{n+1,2}^2 & b_{n+1,3}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (32)$$

Když sem dosadíme hodnoty (31), možná hned odstraníť jmenovatele, potom dělit po řádcích a sloupcích stejnými činiteli, neboť předpokládáme hrany simplexu i délky tečen hypersféry vesměs od 0 různé.

Tím přejde (32) v cyklický determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & 2 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

který znásoben podle Hankela od 0 různým determinantem

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n+1} \\ x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} = V,$$

kde $x_1, \dots, x_{n+1}$ jsou kořeny binomické rovnice $x^{n+1} - 1 = 0$, vyžaduje jako podmínku vymizení, aby

$$x_k + x_k^3 + 2x_k^4 + \dots + 2x_k^{n+1} = 0,$$

nebo vzpomeneme-li, že platí identita

$$2(x_k + x_k^2 + x_k^3 + \dots + x_k^{n+1}) = 0,$$

již možná od předchozí rovnice odečíst, aby

$$x_k + 2x_k^2 + x_k^3 = 0,$$

což jest aequivalentní s

$$(x_k + 1)^2 = 0 \text{ nebo } x_k = -1.$$

Z toho plyne, že musí binomická rovnice (33) míti kořen -1, tedy $(n + 1)$ musí být sudé

Odtud theorem: V tečnovém simplexu leží dotykové body stran polygonu spojujícího jednoduše všecky rohy jen tehdy na hypersféře $(n - 1)$-rozměrné, je-li simplex lichorozměrný.

Tento podstatný rozdíl prostorů licho- a sudorozměrných jest už viditelný na 2 a 3 rozměrech. V rovině (sudorozměrná) neleží dotykové body trojúhelníka s vepsanou kružnicí na množině rozměru o 1 nižšího, totiž přímce, ale v prostoru (lichorozměrný) jsou dotykové body tečnového čtyřúhelníka v rovině (rozměru o 1 nižšího) na kružnici.

Nyní nám jde o určení poloměru R této hypersfery. K tomu cíli znásobme obě strany rovnice (1a) na 1. str. číslem R., předpokládajíce střed soustavy položený ve středu této hypersfery, takže

$$\sum_{l=1}^{n} x_k^{(l)^2} = R^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Potom platí při $n + 1 = 2m$

$$(-1)^{n+1}\, 2^n[(n-2)!\, H_{12}]^2\, R^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} -2b_{12}^2 & b_{23}^2 - b_{13}^2 & \ldots & b_{2,n+1}^2 - b_{1,n+1}^2 \\ b_{23}^2 - b_{13}^2 & 0 & \ldots & b_{3,n+1}^2 \\ b_{24}^2 - b_{14}^2 & b_{34}^2 & \ldots & b_{4,n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \end{vmatrix}$$

nebo

$$-\,2R^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & b_{12}^2 & b_{13}^2 & b_{14}^2 & \ldots \\ 0 & 1 & b_{12}^2 & 0 & b_{23}^2 & b_{24}^2 & \ldots \\ 1 & 0 & b_{13}^2 & b_{23}^2 & 0 & b_{34}^2 & \ldots \\ 1 & 0 & b_{14}^2 & b_{24}^2 & b_{36}^2 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & b_{12}^2 & b_{13}^2 & b_{14}^2 & \ldots \\ 1 & b_{12}^2 & 0 & b_{23}^2 & b_{24}^2 & \ldots \\ 0 & b_{13}^2 & b_{23}^2 & 0 & b_{34}^2 & \ldots \\ 0 & b_{14}^2 & b_{24}^2 & b_{34}^2 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{vmatrix} \qquad (33)$$

Dosaďme sem hodnoty (31) a znásobme postupně na obou stranách řádky a sloupce, kde b_{kl}, vystupují, čísly $\frac{a_{12}}{t_1 t_2}, \frac{a_{23}}{t_2 t_3}, \ldots$ $\frac{a_{n+1,1}}{t_{n+1}\, t_1}$.

Potom můžeme na ~~levo~~ od třetího řádku počínajíc vytknout z každého členu 4, t. j. celkem 4^{2m+2}, hledíc k prvním dvěma sloupcům. Stejně vpravo se vytkne 4^{2m+1}, což dá po úpravě

$$-\frac{2}{R^2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_{34}}{t_3t_4} & \dots & \frac{a_{2m,1}}{t_{2m,}t_1} \\ 0 & 0 & \frac{a_{12}}{t_1t_2} & \frac{a_{23}}{t_2t_3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{a_{12}}{t_1t_2} & 0 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ 0 & \frac{a_{23}}{t_2t_3} & 1 & 0 & 1 & \dots & 2 \\ \frac{a_{34}}{t_3t_4} & 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{a_{2n,1}}{t_{2n,}t_1} & 0 & 1 & 2 & 2 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{t_1t_2} & \frac{a_{23}}{t_2t_3} & 0 & & \dots & 0 \\ \frac{a_{12}}{t_1t_2} & 0 & 1 & 2 & & \dots & 1 \\ \frac{a_{23}}{t_2t_3} & 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{vmatrix}$$

V této rovnici přičtěme na levo k prvnímu řádku a sloupci druhý. Potom počnouce $\left\{\begin{array}{l}\text{nalevo třetím}\\ \text{napravo druhým}\end{array}\right.$, znásobme řádky resp. sloupce střídavě číslem + 1 a — 1 a sečtěme je. Tím zbude ve $\left\{\begin{array}{l}\text{třetím}\\ \text{druhém}\end{array}\right.$ řádku, resp. sloupci jen jediný člen od 0 různý, $\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_3}$ možná obě strany snížiti a tímto faktorem zkrátit, takže značí-li

$(kl) = \frac{a_{kl}}{t_kt_l}$, bude

$$-\frac{R^2}{2}\begin{vmatrix} 0 & (23) & (34) & \dots & (2m,1) \\ (23) & 0 & 1 & \dots & 1 \\ (34) & 1 & 0 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ (2m,1) & 2 & 2 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Pravá strana je hlavní minor levé. Když tedy znásobíme od druhého řádku počínajíc, všecky řádky determinantu levé strany takovými čísly $u_2, u_3, \dots, u_{2m}$, aby po přičtení v prvém řádku zmizely všecky členy mimo první, stane se hlavní minor faktorem levé strany a dá se proti pravé straně zkrátiti.

Právě vylíčený pochod pak vede na rovnice tvaru

$$ou_2 + u_3 + 2u_4 + \dots + 2u_{2m} = -(23)$$

Zaveďme zkratku:

$$\sum_2^{2m} u_k = U,$$

čímž vzniknou rovnice

$$\left.\begin{aligned}
2u_2 + u_3 \qquad\qquad &= (23) + 2U, \\
u_2 + 2\,u_3 + u_4 \qquad &= (34) + 2U, \\
u_3 + 2\,u_4 + u_5 &= (45) + 2U, \\
\cdot \qquad\qquad &\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad &\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad &\qquad \cdot \\
u_{2m-1} + 2u_{2m-1} + u_{2m} &= (2m - 1, 2m) + 2U, \\
u_{2m-1} + 2u_{2m} &= (2m, 1) + 2U.
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Sečtením všech rovnic vznikne

$$4U - u_2 - u_{2m} = \sum_k (k, k+1) + 2\,(2m-1)\,U$$

nebo
$$u_2 + u_{2m} = -\sum_k (k, k+1) - 2\,(2m-3)\,U.$$

Znásobme rovnice (34) střídavě čísly $+1$ a -1 a zase sečtěme; bude

$$u_2 + u_{2m} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_1} + 2U$$

Srovnáním obou posledních výsledků vychází

$$4\left(m-1\right)U = -\sum\left(k, k+1\right) - \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$$

a ježto

$$\sum\left(k, k+1\right) = 2\left(\frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_1}\right) - \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right) = 2M - \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right),$$

kde zavedeno
$$M = \sum_1^{2m} \frac{1}{t_k},$$

bude
$$U = -\frac{1}{2\,(m-1)}\,M.$$

Nyní znásobme rovnice (34) postupně čísly $+1, -2, +3, -4, \dots, -(2m-2), +(2m-1)$ a sečtěme, což dá

$$2mu_{2m} = \sum (-1)^k\,(k+1)\,(k, k+1) + 2m\,U,$$

kdež

$$\sum (-1)^k\,(k+1)\,(k, k+1) = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} - \frac{2}{t_3} - \frac{2}{t_4} + \frac{3}{t_4} + \frac{3}{t_5} - \frac{4}{t_5} + \frac{4}{t_6} + \cdots$$

$$\cdots = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} - \frac{1}{t_5} + \dots - \frac{1}{t_{2m-1}} + \frac{1}{t_{2m}} - \frac{1}{t_1} + \frac{2m}{t_1}$$

Značíme-li
$$N = -\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} - \dots - \frac{1}{t_{2m-1}} + \frac{1}{t_{2m}},$$

máme
$$2mu_{2m} = N + \frac{2m}{t_1} + 2mU$$

nebo $$u_{2m} = \frac{N}{2m} + \frac{1}{t_1} + U, \quad \text{tedy} \quad u_2 = -\frac{N}{2m} + \frac{1}{t_2} + U \tag{35}$$

Očekávaný výsledek bude tvaru

$$-\frac{2}{R^2} = \sum_{k=2}^{2m} (k, k+1)\, u_k,$$

kde hodnotu součtu obdržíme z rovnic (34), když pravou stranu jejich postupně znásobíme čísly $u_2, u_3, \ldots, u_{2m}$, což dá

$$\sum (k, k+1)\, u_k = u_2^2 + (u_2 + u_3)^2 + (u_3 + u_4)^2 + \cdots + (u_{2m-1} + u_{2m})^2 + u_{2m}^2 - 2U^2.$$

Pro jednotlivé členy pravé strany obdržíme postupným dosazováním hodnot (35) do (34)

$$u_2 + u_3 = (23) - u_2 + 2U = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{N}{2m} - \frac{1}{t_2} - U + 2U = \frac{N}{2m} + \frac{1}{t_3} + U,$$

$$u_3 + u_4 = \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} - 2U + \frac{N}{2m} - \frac{1}{t_3} - U = -\frac{N}{2m} + \frac{1}{t_4} + U,$$

$$u_4 + u_5 = \frac{1}{t_4} + \frac{1}{t_5} - 2U + \frac{N}{2m} - \frac{1}{t_4} - U = +\frac{N}{2m} + \frac{1}{t_5} + U,$$

atd. Celkem je tedy

$$\begin{aligned}\sum \Big(k, k+1\Big) u_k = &\left(U + \frac{1}{t_2} - \frac{N}{2m}\right)^2 + \left(U + \frac{1}{t_3} + \frac{N}{2m}\right)^2 \\ &+ \left(U + \frac{1}{t_4} - \frac{N}{2m}\right)^2 + \left(U + \frac{1}{t_5} + \frac{N}{2m}\right)^2 \\ &\quad\vdots \\ &+ \left(U + \frac{1}{t_{2m}} - \frac{N}{2m}\right)^2 + \left(U + \frac{1}{t_1} + \frac{N}{2m}\right)^2 = \\ = &\; 2mU^2 + 2UM + \sum \frac{1}{t_k^2} - \frac{N}{m} \cdot N + \frac{N^2}{4m^2} \cdot 2m - 2U^2 = \\ = &\; UM - \frac{N^2}{2m} + \sum \frac{1}{t_k^2}.\end{aligned}$$

Odtud tedy výsledek

$$-\frac{2}{R^2} = \frac{1}{2(m-1)} \left(\sum \frac{1}{t}\right)^2 - \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \cdots\right)^2 + \sum \frac{1}{t^2} \tag{36}$$

Když zase užijeme rovnic (25) a (26), obdržíme

$$\frac{2}{R^2} = \frac{2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} - \dots\right)^2 \tag{37}$$

Vidíme, že všech různých poloměrů tečných hypersfér $(n-1)$-rozměrných jest tolik, co je hodnot druhého výrazu pravé strany, totiž $\binom{2m-1}{m}$. Kdybychom chtěli určiti součet reciprokých čtverců těchto poloměrů, nutno uvážit, že čtverce $\frac{1}{t_k^2}$ ve (37) budou vesměs kladné, a že se budou dvojnásobné součiny z části rušiti, při čemž bude kladných tolik, co je kombinací sudých a lichých indexů zvláště, totiž $2\binom{m}{2} = m\,(m-1)$, kdežto záporných bude m^2, všech $\binom{2m}{2} = m\,(2m-1)$, takže celkem se členů $2\sum\frac{1}{t_k t_l}$ vyskytne kladných $\binom{2m-1}{m}\frac{m\,(m-1)}{m\,(2m-1)}$, záporných $\binom{2m-1}{m}\frac{m^2}{(2m-1)\,m}$ a úhrnný součet všech, když se první $\sum$ vztahuje na podstatně různé představy prvků $\frac{1}{t_k}$,

$$\sum\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \dots\right)^2 = \binom{2m-1}{m}\sum\frac{1}{t^2} - \binom{2m-1}{m}\frac{1}{2m-1}\sum\frac{2}{t_k t_l} =$$

$$= \binom{2m-1}{m}\sum\frac{1}{t^2} - \binom{2m-1}{m}\frac{1}{2m-1}\left[\left(\sum\frac{1}{t}\right)^2 - \sum\frac{1}{t^2}\right] =$$

$$= \binom{2m-1}{2m}\frac{2m}{2m-1}\sum\frac{1}{t^2} - \binom{2m-1}{m}\frac{1}{2m-1}\left(\sum\frac{1}{t}\right)^2.$$

Máme tedy pro součet všech různých rovnic (37)

$$\sum\frac{1}{R^2} = \binom{2m-1}{m}\frac{1}{\mathfrak{R}^2} + \binom{2m-1}{m}\frac{1}{2\,(2m-1)}\sum\frac{1}{t^2} -$$

$$\binom{2m-1}{m}\frac{1}{4m\,(2m-1)}\left(\sum\frac{1}{t}\right)^2$$

$$= \binom{2m-1}{m}\left\{\frac{1}{\mathfrak{R}^2} - \frac{1}{2m-1}\frac{1}{\mathfrak{R}^2} + \frac{m}{2m-1}\frac{1}{p} + \frac{m-1}{2m-1}\frac{1}{p}\right\}$$

$$= \binom{2m-1}{m}\frac{1}{2m-1}\cdot\left\{\frac{2\,(m-1)}{\mathfrak{R}^2} - \frac{1}{p}\right\} \tag{38}$$

Tyto výsledky lze ověřiti na tečnovém čtyřstěnu, kde jsou tři různé poloměry R_{23}, R_{31}, R_{12} a tedy při $m = 2$

$$\frac{1}{R_{23}^2} + \frac{1}{R_{31}^2} + \frac{1}{R_{12}^2} = \frac{2}{\mathfrak{R}^2} - \frac{1}{p}. \tag{39}$$

III. O simplexech kolmohranných.

Kolmohranný simplex je takový, v němž každá hrana je kolmá k doplňkovému simplexu, t. j. onomu, jenž určen ostatními rohy. Obě výšky, spuštěné s konců téže hrany, jsou komplanární, takže se všechny výšky protínají v témž bodě, orthickém středu.

Právě stanovené vlastnosti vedou na dvě řady vlastností, jež se týkají hran a stěn.

Barycentrické souřadnice pat výšek h_1 a h_2 atd., dány resp. úměrami

$$\xi_1^{(1)} : \xi_1^{(2)} : \xi_1^{(3)} : \ldots : \xi_1^{(n+1)} = \\ = 0 : S_2 \cos \alpha_{12} : S_3 \cos \alpha_{13} : \ldots : S_{n+1} \cos \alpha_{1,n+1}$$

$$\xi_2^{(1)} : \xi_2^{(2)} : \xi_2^{(3)} : \ldots : \xi_2^{(n+1)} = \\ = S_1 \cos \alpha_{12} : 0 : S_3 \cos \alpha_{23} : \ldots : S_{n+1} \cos \alpha_{2,n+1}$$

a všecky se dají splnit, položíme-li

$$\cos \alpha_{ik} = \mu_i \, \mu_k, \tag{40}$$

kde veličiny μ_k vázány identitou, platnou pro cosiny stěnových úhlů, jež se redukuje na

$$\left(1 - \sum_k \frac{\mu_k^2}{1 + \mu_k^2}\right) \prod_k \left(\frac{1}{\mu_k^2} + 1\right) = 0.$$

Ježto faktory uvnitř $\prod$ nemohou vymizet identicky, musí býti

$$1 - \sum \frac{\mu_k^2}{1 + \mu_k^2} = 0. \tag{41}$$

Z rovnice (40) pak plynou četné identity tvaru:

$$\mu_h \, \mu_i \, \mu_k \, \mu_l = \cos \alpha_{hi} \cos \alpha_{kl} = \cos \alpha_{hk} \cos \alpha_{il} = \cos \alpha_{hl} \cos \alpha_{ik} \tag{42}$$

ukazující, že také

$$\left(S_h^2 + S_i^2 - \frac{H_{pi}^2}{(n-1)^2}\right)\left(S_k^2 + S_l^2 - \frac{H_{kl}^2}{(n-1)^2}\right) = \\ = \left(S_h^2 + S_k^2 - \frac{H_{hk}^2}{(n-1)^2}\right)\left(S_i^2 + S_l^2 - \frac{H_{il}^2}{(n-1)^2}\right) = \\ = \left(S_h^2 + S_l^2 - \frac{H_{hl}^2}{(n-1)^2}\right)\left(S_i^2 + S_k^2 - \frac{H_{ik}^2}{(n-1)^2}\right) \tag{43}$$

Následkem vytčené kolmosti hran možná jejich čtverce psát ve tvaru

$$a_{ik}^2 = o_i^2 + o_k^2, \tag{44}$$

z čehož

$$a_{hi}^2 + a_{kl}^2 = a_{hk}^2 + a_{il}^2 = a_{hl}^2 + a_{ik}^2 . \tag{45}$$

Pak se dá objem simplexu psát jednoduše

$$S^2 = \frac{1}{(n\,!)^2}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{o_k^2}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n+1} o_k^2. \tag{46}$$

Použijeme-li téhož vyjádření pro stěny, jež jsou simplexy $(n-1)$-rozměrné, a značí-li $\sum', \prod'$ úkony, v nichž vynechány prvky s indexy určujícími stěnu, bude

$$S_l^2 = \frac{1}{[(n-1)\,!\,]^2}\sum{}'\frac{1}{o_k^2}\cdot\prod{}' o_k^2 =$$

$$= \frac{1}{[(n-1)\,!\,]^2}\left[-\frac{1}{o_l^2}+\sum\frac{1}{o_k^2}\right]\cdot\frac{1}{o_l^2}\prod_k o_k^2. \tag{47'}$$

Máme tudíž

$$o_l^2\,S_l^2 = n^2\,S^2 - \frac{1}{[(n-1)\,!\,]^2}\frac{1}{o_l^2}\prod o_k^2. \tag{47}$$

Součet těchto výrazů pro $l = 1, 2, \cdots, n+1$ pak dá

$$\sum o_l^2\,S_l^2 = (n+1)\,n^2\,S^2 - \frac{1}{[(n-1)\,!\,]^2}\sum_l\frac{1}{o_l^2}\cdot\prod o_k^2 =$$

$$= (n+1)\,n^2\,S^2 - n^2S^2 = n^3\,S^2.$$

Ale ježto lze stěny počítat z objemu, známe-li výšky v_k, takže $S_l = \dfrac{nS}{v_l}$, plyne z poslední rovnice jednoduché totožnost

$$\frac{o_1^2}{v_1^2}+\frac{o_2^2}{v_2^2}+\cdots+\frac{o_{n+1}^2}{v_{n+1}^2} = n. \tag{48}$$

Když dosadíme hodnoty (44) do rovnice (1b) na str. 2, budou mít od třetího počínajíc členy druhého řádku touž hodnotu $o_1^2 - o_2^2$, dají se tedy pomocí prvního odstranit, determinant snížit, při čemž vystoupí činitel $-2\,a_{12}^2 = -2\,(o_1^2+o_2^2)$, a celkem plyne

$$\left[\left(n-2\right)!\,H_{12}\right]^2 = \left(o_1^2+o_2^2\right)\left(\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{o_k^2}\right)\cdot\prod_{k=3}^{n+1} o_k^2, \tag{49}$$

nebo značí-li $\sum'$ a $\prod'$ vynechaný index 2, bude

$$\left[\left(n-2\right)!\,H_{12}\right]^2 = \left[-\frac{1}{o_2^2}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{o_k^2}\right]\prod_{k=2}^{n+1} o_k^2 +$$

$$+\left[-\frac{1}{o_1^2}+\sum_{k=1}^{n+1}{}'\frac{1}{o_k^2}\right]\prod_{k=1}^{n+1}{}' o_k^2,$$

což se podle (47′) přepíše na

$$[(n-2)' H_{12}]^2 = -2\prod_{k=3}^{n+1} o_k^2 + [(n-1)!\, S_1)]^2 + [(n-1)!\, S_2)]^2,$$

tudíž

$$S_1^2 + S_2^2 - \frac{1}{(n-1)^2} H_{12} = 2 S_1 S_2 \cos\alpha_{12} = \frac{2}{[(n-1)!]^2} \prod_{k=3}^{n+1} o_k^2\,, \tag{50}$$

z čehož

$$\cos\alpha_{12} = \frac{1}{o_1 o_2 \sqrt{\left(-\frac{1}{o_1^2} + \sum\frac{1}{o_k^2}\right)\left(-\frac{1}{o_2^2} + \sum\frac{1}{o_k^2}\right)}} = \mu_1 \mu_2\,. \tag{51}$$

Zákon tvoření této rovnice hned ukazuje, že

$$\mu_l^2 = \frac{1}{o_l^2 \sum \frac{1}{o_l^2} - 1} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{52}$$

čímž rovnice (41) splněna totožně, neboť

$$1 - \sum \frac{1}{1 + o_l^2 \sum \frac{1}{o_l^2} - 1} = 1 - \sum \frac{1}{o_l^2} \cdot \frac{1}{\sum \frac{1}{o_k^2}} = 0.$$

Ježto se výšky protínají, dovolují úseky od orthického středu k vrcholu p_k, p_l a doplňky týchž výšek mezi týmž bodem a podstavou, q_k, q_l, vyjádřiti úhel stěn S_k, S_l ve tvaru

$$\cos\alpha_{kl} = \frac{q_k}{p_l} = \frac{q_l}{p_k} \tag{53}$$

Odtud plyne

$$p_l\, q_l = p_k\, q_k = x^2, \tag{54}$$

kde veličina x^2, součin úseků na téže výšce je pro všechny výšky táž. Dány-li úseky p_k, vidíme, že

$$\cos\alpha_{kl} = \frac{x^2}{p_k\, p_l} \tag{55}$$

a dosazení do identity, platné pro cosiny sklonů stěn, dá pro x^2 rovnici stupně $(n+1)$;

$$\begin{vmatrix} -p_1^2 & x^2 & \ldots & x^2 \\ x^2 & -p_2^2 & \ldots & x^2 \\ x^2 & x^2 & \ldots & x^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x^2 & x^2 & \ldots & -p^2_{n+1} \end{vmatrix} = 0, \tag{56}$$

nebo
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^2}{p_k^2 + x^2} = 1, \tag{57}$$
již lze obdržeti vyjádřením objemu simplexu S jako součtu částí tvořených stěnami a orthickým středem, neboť ony části jsou $S\,\frac{q_k}{p_k + q_k}$. Tytéž částečné simplexy nás však vedou ještě k jinému vyjádření objemu S. Neboť jejich hrany p_k svírají úhly rovné stěnovým úhlům α_{ik}, a tedy rožný sinus pro orthický střed je σ_k. Platí tedy
$$nS = \prod_{k=1}^{n+1} p_k \,.\sum_{l=1}^{n+1} \frac{\sigma_l}{p_l} \tag{58}$$
Sférické siny dány rovnicemi tvaru
$$(-1)^n \sigma_1^2 = \frac{1}{p_2^2 p_3^2 \dots p_{n+1}^2} \begin{vmatrix} -p_2^2 & x^2 & x^2 & \dots \\ x^2 & -p_3^2 & x^2 & \dots \\ x^2 & x^2 & -p_4^2 & \dots \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix},$$
takže
$$(-1)^{\frac{n}{2}} nS = \sum_{k=1}^{n+1} \begin{vmatrix} -p_1^2 & x^2 & x^2 & \dots & x^2 & x^2 & \dots & x^2 \\ x^2 & -p_2^2 & x^2 & \dots & x^2 & x^2 & \dots & x^2 \\ . & . & . & & . & . & & . \\ . & . & . & & . & . & & . \\ . & . & . & & . & . & & . \\ x^2 & x^2 & x^2 & \dots & -p_{k-1}^2 & x^2 & \dots & x^2 \\ x^2 & x^2 & x^2 & \dots & x^2 & -p_{k+1}^2 & \dots & x^2 \\ . & . & . & & . & . & & . \\ . & . & . & & . & . & & . \\ . & . & . & & . & . & \dots & . \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

Ale tyto determinanty lze redukovat vložením prvního sloupce, složeného z jedniček, odstraněním x^2 ze členů stojících vně hlavní úhlopříčky a potom postupným rozvinováním podle prvků jednoho řádku nebo sloupce, takže značí-li D_k determinant v (59) obsažený bude
$$D_k = \left(1 - \sum_{l=1}^{n+1}{}' \frac{x^2}{p_l^2 + x^2}\right)\left(-1\right)^n \cdot \prod_{l=1}^{n+1}{}' \left(p_l^2 + x^2\right) =$$
$$= \left(1 - \sum_{l=1}^{n+1} \frac{x^2}{p_l^2 + x^2} + \frac{x^2}{p_k^2 + x^2}\right)\left(-1\right)^2 \frac{1}{p_k^2 + x^2} \prod_{l=1}^{n+1}\left(p_l^2 + x^2\right).$$
Podle (52) zbude v první závorce napravo jen druhý člen, takže
$$D_k = \left(-1\right)^n \left(\frac{x^2}{p_k^2 + x^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2} \prod_{l=1}^{n+1}\left(p_l^2 + x^2\right).$$

Když dosadíme do (59), zkrátí se činitel $(-1)^{\frac{n}{2}}$ a zbude

$$nS = \frac{1}{x}\left\{\prod_{l=1}^{n+1}\left(p_l^2 + x^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^2}{p_k^2 + x^2}.$$

Součet napravo je podle (57) roven 1, a vzniká tím konečný výsledek

$$n^2S^2 = \frac{1}{x^2}\prod_{l=1}^{n+1}(p_l^2 + x^2). \qquad (60)$$

Tím vyjádřen objem z daných úseků na výškách, když ovšem napřed x^2 určeno řešením rovnice (56).

Rovnici (53) možná přepsat na

$$\mu_k\,\mu_l = \frac{x^2}{p_kp_l}, \text{ z čehož } \mu_k = \frac{x}{p_k} = \sqrt{\frac{q_k}{p_k}}.$$

Tedy vidíme, že rovnice (41) a (57) jsou aequivalentní.

Potom učí rovnice (52), že

$$q_k : p_k : h_k = \frac{1}{o_k^2} : \left(-\frac{1}{o_k^2} + \sum\frac{1}{o_l^2}\right) : \sum\frac{1}{o_l^2}, \qquad (61)$$

t. j. bod v normálních souřadnicích, daných poměry

$$\frac{1}{o_1^2} : \frac{1}{o_2^2} : \ldots : \frac{1}{o_{n+1}^2},$$

jest orthický střed.

Vyjádřeme nyní x^2 veličinami o_k^2. Vyjdeme od rovnic (61)

$$p_kq_k = x^2 = \frac{\frac{1}{o_k^2}\left(-\frac{1}{o_k^2} + \sum\frac{1}{o_l^2}\right)}{\left(\sum\frac{1}{o_k^2}\right)^2} \cdot \frac{n^2S^2}{S_k^2} = \frac{1}{\sum\frac{1}{o_k^2}} = \frac{\prod o_k^2}{(n!S)^2}. \qquad (62)$$

Veličiny o_k^2 a x^2 souvisejí jednoduše s poloměrem R_0^2 hypersféry opsané simplexeu S. Neboť

$$-(n!SR_0)^2 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & \ldots & a_{1,n+1}^2 \\ a_{12}^2 & 0 & a_{23}^2 & \ldots & a_{2,n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \end{vmatrix} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Napravo dosadíme hodnoty (44), předsuneme dva řádky a sloupce z jedniček a nul a vhodným odečtením vznikne

$$-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sum\frac{1}{o_k^2} & 1-\frac{n+1}{2} \\ 1-\frac{n+1}{2} & \frac{1}{2}\sum o_k^2 \end{vmatrix}(-1)^{n+1}\,2^{n+1}\prod o_k^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\sum \frac{1}{o_k^2} \cdot \sum o_k^2 - (n-1)^2\right]\prod o_k^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(n!S)^2 \sum o_k^2 - (n-1)^2 x^2 (n!S)^2\right].$$

Máme tedy

$$4 R_0^2 = \sum o_k^2 - (n-1)^2 x^2. \tag{63}$$

Pro trojúhelník n = 2,

$$4 R_0^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - x^2.$$

pro kolmohranný čtyřstěn $n = 3$.

$$4 R_0^2 = \sum o_k^2 - 4x^2.$$

Jako poslední předmět vyšetříme $(n + 1)$-úhelník, vzniklý na uvažovaném simplexu spojením rohů 1, 2, ... $(n + 1)$ jednoduchou lomenou čarou a určíme, kde leží paty kolmic, spuštěných s orthického středu na strany polygonu. Strany děleny v poměru veličin $o_k^2 : o_l^2$, takže úseky na straně a_{kl} jsou: $a_{kl}\dfrac{o_k^2}{o_k^2 + o_l^2}$, $a_{kl}\dfrac{o_l^2}{o_k^2 + o_l^2}$ a dají se podle (44) psát $\dfrac{o_k^2}{a_{kl}}$, $\dfrac{o_l^2}{a_{kl}}$.

Dělicí body určují $(n + 1)$-úhelník, jehož strana b_{kl} spojuje paty výšek na stranách $a_{k,k+1}$ a $a_{l,l+1}$ ležící.

Délku strany $b_{k,k+1}$ se vypočte podle věty cosinové, když za cosinus úhlu stran $a_{k,k+1}$, $a_{k+1,k+2}$ dosadíme

$$\frac{a_{k,k+1}^2 + a_{k+1,k+2}^2 - a_{k,k+2}^2}{2a_{k,k+1}\,a_{k+1,k+2}},$$

tedy platí:

$$b_{k,k+1}^2 = \frac{o_{k+1}^4}{a_{k,k+1}^2} + \frac{o_{k+1}^4}{a_{k+1,k+2}^2} - 2\,\frac{o_{k+1}^4}{a_{k,k+1}\,a_{k+1,k+2}} \cdot \frac{2o_{k+1}^2}{2a_{k,k+1}\,a_{k+1,k+2}} =$$

$$= \frac{o_{k+1}^4\, a_{k,k+2}^2}{a_{k,k+1}^2\, a_{k+1,k+2}^2}. \tag{64}$$

Hodnotu b_{kl} obdržíme jako délku příčky ve čtyřrohu s vrcholy k, $k + 1$, l, $l + 1$, spojující stopy výšek na $a_{k,k+1}$, $a_{l,l+1}$. Věta Stewartova, applikována na trojúhelník $(k, k + 1, l)$ dá pro transversalu t_l rovnici

$$t_l^2 a_{k,k+1} + \frac{o_k^2 \cdot o_{k+1}^2}{a_{k,k+1}} = \frac{a_{k,l}^2\, o_{k+1}^2}{a_{k,k+1}} + \frac{a_{k+1,l}^2\, o_k^2}{a_{k,k+1}^2},$$

z níž $t_l^2 a_{k,k+1}^2 = (o_k^2 + o_l^2)\, o_{k+1}^2 + (o_{k+1}^2 + o_l^2)\, o_k^2 - o_k^2\, o_{k+1}^2$,

a tedy $\quad t_l^2 a_{k,k+1}^2 = o_k^2 o_{k+1}^2 + o_l^2 o_{k+1}^2 + o_l^2 o_k^2$

a podobně $\quad t_{l+1}^2 a_{k,k+1}^2 = o_k^2 o_{k+1}^2 + o_{l+1}^2 o_{k+1}^2 + o_{l+1}^2 o_k^2$

pro trojúhelník $(k, k + 1, l + 1)$. Opětné užití téže věty na trojúhelník o stranách t_l, t_{l+1}, $a_{l,l+1}$ pak dá

$$b_{kl}^2 a_{l,l+1} + \frac{o_l^2 o_{l+1}^2}{a_{l,l+1}} = t_l^2 \frac{o_{l+1}^2}{a_{l,l+1}} + t_{l+1}^2 \frac{o_l^2}{a_{l,l+1}}.$$

Když vše zjednodušíme, možná $b_{k,l}^2$ štěpit na dva díly

$$b_{kl}^2 = \frac{o_k^2 o_{k+1}^2}{a_{k,k+1}^2} + \frac{o_l^2 o_{l+1}^2}{a_{l,l+1}^2}. \tag{65}$$

Aby všechny paty byly na hypersféře $(n - 1)$-rozměrné, musí být

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{o_2^4 a_{13}^2}{a_{12}^2 a_{23}^2} & \frac{o_1^2 o_2^2}{a_{12}^2} + \frac{o_3^2 o_4^2}{a_{34}^2} & \frac{o_1^2 o_2^2}{a_{12}^2} + \frac{o_4^2 o_5^2}{a_{45}^2} & \dots \\ \frac{a_2^4 a_{13}^2}{a_{12}^2 a_{23}^2} & 0 & \frac{o_3^4 a_{24}^2}{a_{23}^2 a_{34}^2} & \frac{o_2^2 o_3^2}{a_{23}^2} + \frac{o_4^2 o_5^2}{a_{45}^2} & \dots \\ \frac{o_1^2 o_2^2}{a_{12}^2} + \frac{o_3^2 o_4^2}{a_{34}^2} & \frac{o_4^2 a_{24}^2}{a_{23}^2 a_{34}^2} & 0 & \frac{o_4^4 a_{35}^2}{a_{34}^2 a_{35}^2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Předsuňme schema

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \tag{66}$$

a odečtěme první řádek a sloupec, znásobené resp. čísly $\frac{o_1^2 o_2^2}{a_{12}^2}$, $\frac{o_2^2 o_3^2}{a_{23}^2}$, $\frac{o_3^2 o_4^2}{a_{34}^2}$, $\cdots$ atd. Z původních členů zmizí všecky mimo prvky hlavní úhlopříčky a obou s ní sousedících. Při tom je na př.

$$\frac{o_2^4 (o_1^2 + o_3^2)}{a_{12}^2 a_{23}^2} - \frac{o_1^2 o_2^2}{a_{12}^2} - \frac{o_2^2 o_3^2}{a_{23}^2} =$$

$$= \frac{o_2^4 (o_1^2 + o_3^2) - o_1^2 o_2^2 (o_2^2 + o_3^2) - o_2^2 o_3^2 (o_1^2 + o_2^2)}{a_{12}^2 a_{23}^2} = -\frac{2 o_1^2 o_2^2 o_3^2}{a_{12}^2 a_{23}^2},$$

a plyne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & -\frac{o_1^2 o_2^2}{a_{12}^2} & -\frac{o_2^2 o_3^2}{a_{23}^2} & -\frac{o_3^2 o_4^2}{a_{34}^2} & \dots \\ 1 & -\frac{o_1^2 o_2^2}{a_{12}^2} & -\frac{2 o_1^2 o_2^2}{a_{22}^2} & -\frac{2 o_1^2 o_2^2 o_3^2}{a_{12}^2 a_{23}^2} & 0 & \dots \\ 1 & -\frac{o_2^2 o_3^2}{a_{23}^2} & -\frac{2 o_1^2 o_2^2 o_3^2}{a_{12}^2 a_{13}^2} & -\frac{2 o_2^2 o_3^2}{a_{23}^2} & -\frac{2 o_2^2 o_3^2 o_4^2}{a_{24}^2 a_{34}^2} & \dots \\ 1 & -\frac{o_3^2 o_4^2}{a_{34}^2} & 0 & -\frac{2 o_2^2 o_3^2 o_4^2}{a_{23}^2 a_{34}^2} & -\frac{2 o_3^2 o_4^2}{a_{34}^2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{vmatrix} = 0. \tag{67}$$

Nyní znásobme od třetího řádku a sloupce počínajíc každý řádek a sloupec reciprokou hodnotou čísla, stojícího ve druhém řádku resp. sloupci. I bude

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & \frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & \frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & \frac{a_{34}^2}{o_3^2 o_4^2} & \frac{a_{45}^2}{o_4^2 o_5^2} & \cdots & & \frac{a_{n+1,1}^2}{o_{n+1}^2 o_1^2} \\
1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & & -1 \\
\frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & -1 & -\frac{2a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & -\frac{2}{o_2^2} & 0 & 0 & \cdots & & -2\frac{1}{o_1^2} \\
\frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & -1 & -2\frac{1}{o_2^2} & -2\frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & -2\frac{1}{o_3^2} & 0 & \cdots & & 0 \\
\frac{a_{34}^2}{o_3^2 o_4^2} & -1 & 0 & -2\frac{1}{o_3^2} & -2\frac{a_{34}^2}{o_3^2 o_4^2} & -2\frac{1}{o_4^2} & \cdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & -2\frac{a_{n,n+1}^2}{o_n^2 o_{n+1}^2} & -2\frac{1}{o_{n+1}^2} \\
\frac{a_{n+1,1}^2}{o_{n+1}^2 o_1^2} & -1 & -2\frac{1}{o_1^2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -2\frac{1}{o_{n+1}^2} & -2\frac{a_{n+1,1}^2}{o_{n+1}^2 o_1^2}
\end{vmatrix} = 0. \qquad (68)$$

Že tento determinant může vymizet, vidno z toho, že $\frac{a_{k,k+1}^2}{o_k^2 o_{k+1}^2} = \frac{1}{o_k^2} + \frac{1}{o_{k+1}^2}$ a tedy, že stačí od třetího řádku počínajíc znásobit všecky střídavě číslem $+1$ a -1 a sečíst. Potom je-li počet těchto řádků **sudý**, zmizí součet prvního i druhého sloupce. V ostatních vstupují do součtu vždy tři členy, z nichž jeden je součtem obou ostatních a leží mezi nimi, takže součet i těchto prvků zmizí. Tím dokázáno, že lze jeden řádek determinantu učinit vesměs nulami a že tedy vskutku determinant zmizí.

Odtud **věta**:

Paty výšek v kolmohranném simplexu n-rozměrném, sestrojené na strany $(n+1)$-úhelníka, vrcholy simplexu určeného, leží jen tehdy na hypersfeře $(n-1)$-rozměrné, je-li $n+1$ sudé číslo $(= 2m)$.

Tedy mají tuto vlastnost kolmohranné simplexy lichorozměrné. Půjde nám tedy v dalším o určení poloměru hypersfery pat výšek. Vyjdeme od rovnice (33), dosadíme za b_{kl} hodnoty (64) a (65) napravo předšuneme schema (66), odečteme na obou stranách jako v (67) a znásobíme jako v (68) reciprokými prvky druhého řádku a sloupce. Potom vznikne rovnice

$$+\,2R^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & \frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & \frac{a_{34}^2}{o_3^2 o_4^2} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & \frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & 0 & \cdots \\ \frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & \frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & -2\frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & -2\frac{1}{o_2^2} & 0 & \cdots \\ \frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & \frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & -2\frac{1}{o_2^2} & -2\frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & -2\frac{1}{o_3^2} & \cdots \\ \frac{a_{34}^2}{o_3^2 o_4^2} & 0 & 0 & -2\frac{1}{o_3^2} & . & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & \frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & \frac{a_{34}^2}{o_3^2 o_4^2} & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & \frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & 0 & \cdots \\ \frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & -1 & \frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & -2\frac{a_{12}^2}{o_1^2 o_2^2} & -2\frac{1}{o_2^2} & 0 & \cdots \\ \frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & -1 & \frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & -2\frac{1}{o_2^2} & -2\frac{a_{23}^2}{o_2^2 o_3^2} & -2\frac{1}{o_3^2} & \cdots \\ \frac{a_{34}^2}{o_3^2 o_4^2} & -1 & 0 & 0 & -2\frac{1}{o_3^2} & -2\frac{a_{34}^2}{o_3^2 o_4^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} \qquad (69)$$

Znásobme na obou stranách první řádek čtyřmi a přičtěme k němu součet všech dalších, počínajíce nalevo třetím, napravo čtvrtým.

Pak zbudou v prvním řádku nalevo jen první dva členy

$$2\sum\frac{1}{o_k^2},\quad \frac{1}{o_1^2}+\frac{2}{o_2^2}+\frac{1}{o_3^2},$$

napravo pak tři členy

$$2\sum\frac{1}{o_k^2},\quad 4-2m,\quad \frac{1}{o_1^2}+\frac{2}{o_2^2}+\frac{1}{o_3^2},$$

ostatní rovny nule.

Pak znásobme napravo čtvrtým řádkem počínajíce řádky resp. čísly $u_1, u_2, u_3, \ldots u_{2m}$ a přičtěme ke druhému tak, aby členy obsahující -1 zmizely. Bude pak

$$\left.\begin{array}{llllll}
u_1\left(\frac{1}{o_1^2}+\frac{1}{o_2^2}\right)+u_2\frac{1}{o_2^2} & & & u_{2m}\frac{1}{o_4^2} & = -\frac{1}{2} \\
u_1\frac{1}{o_2^2} + & u_2\left(\frac{1}{o_2^2}+\frac{1}{o_3^2}\right)+u_3\frac{1}{o_3^2} & & & = -\frac{1}{2} \\
 & \vdots & & & \vdots \\
u_1^2\frac{1}{o_1^2} + & & u_{2m-1}\frac{1}{o_{2m}^2}+u_{2m}\left(\frac{1}{o_{2m}^2}+\frac{1}{o_1^2}\right) & & = -\frac{1}{2}
\end{array}\right\} \quad (70)$$

Součet v prvním sloupci determinantu není než poloviční součet všech levých stran těchto rovnic, tedy roven $-\frac{m}{2}$. Součet druhého sloupce je roven $-\sum_1^{2m} u_k$.

Přepíšeme-li soustavu (70) na tvar

$$\begin{array}{ll}
\frac{u_{2m}+u_1}{o_1^2}+\frac{u_1+u_2}{o_2^2} & = -\frac{1}{2} \\
\qquad \frac{u_1+u_2}{o_2^2}+\frac{u_2+u_3}{o_3^2} & = -\frac{1}{2} \\
\qquad\qquad \frac{u_2+u_3}{o_3^2}+\frac{u_3+u_4}{o_4^2} & = -\frac{1}{2} \\
\qquad\qquad\qquad \vdots & \quad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{u_{2m-1}+u_{2m}}{o_{2m}^2}+\frac{u_{2m}+u_1}{o_1^2} & = -\frac{1}{2},
\end{array}$$

vidíme, že jednak

$$\frac{u_1+u_{2m}}{o_1^2}=\frac{u_2+u_3}{o_3^2}=\ldots=\frac{u_{2m-2}+u_{2m-1}}{o_{2m-1}^2}=\varphi,$$

jednak

$$\frac{u_1+u_2}{o_2^2}=\frac{u_3+u_4}{o_4^2}=\ldots=\frac{u_{2m-1}+u_{2m}}{o_{2m}^2}=-\frac{1}{2}-\varphi.$$

Z těchto dvou soustav máme

$$\sum u_k=\varphi\sum_{k=1}^{m} o_{2k-1}^2, \quad \sum u_k=\left(-\frac{1}{2}-\varphi\right)\sum_{k=1}^{m} o_{2k}^2.$$

Srovnání obou pak dá pro φ hodnotu

$$\varphi=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Sigma o_{2k}^2}{\Sigma o_k^2}, \text{ a } \sum u_k=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sum_1^m o_{2k}^2 \cdot \sum_1^m o_{2k-1}^2}{\sum_1^{2m} o_k^2}.$$

Jsou tedy napravo ve druhém řádku členy

$$1-\frac{m}{2},\quad +\frac{1}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{1}^{m} o_{2k}^2 \cdot \sum\limits_{1}^{m} o_{2k-1}^2}{\sum\limits_{1}^{2m} o_k^2},\quad M,$$

ostatní jsou nulové, a člen M je sice od O různý, ale na jeho hodnotě nezáleží.

Když konečně nalevo od třetího, napravo od čtvrtého řádku počínajíc, znásobíme postupně všecky čísly $+1$, -1 a sečteme, obdržíme ve třetím resp. čtvrtém řádku všude nuly, vyjmouc druhý resp. třetí prvek, kde vystoupí $\frac{1}{o_1^2}-\frac{1}{o_3^2}$, jejž lze jako faktor vytknout a příslušný řádek i sloupec vynechat. Když totéž opakujeme ve sloupcích, snížíme řád determinantů na obou stranách o dvě jednotky, a zároveň vidíme, že nalevo je první řádek i sloupec vyplněn nulami mimo první prvek, napravo to platí pro první dva řádky a sloupce mimo prvky tvořící první čtverec. Zbývá tedy součin těchto prvků s hlavním minorem, jenž je na obou stranách týž a proto se zkrátí. Platí tudíž konečný výsledek

$$2\,R^2\,.\,2\sum\frac{1}{o_k^2}=\begin{vmatrix} 2\sum\frac{1}{o_k^2} & 4-2m \\ 1-\frac{m}{2} & \frac{1}{2}\cdot\frac{\sum o_{2k}^2\cdot\sum o_{2k-1}^2}{\sum o_k^2}\end{vmatrix}$$

nebo

$$4\,R^2=\frac{\sum\limits_{1}^{m} o_{2k}^2\cdot\sum\limits_{1}^{m} o_{2k-1}^2}{\sum\limits_{1}^{2m} o_k^2}-\frac{(2-m)^2}{\sum\limits_{1}^{2m}\frac{1}{o_k^2}}. \tag{71}$$

Pro čtyřstěn máme zase tři kruhy pat výšek, a je-li d_{kl} průměr jednoho z nich, platí

$$\frac{1}{d_{23}^2}=\frac{1}{a_{21}^2}+\frac{1}{a_{34}^2},\quad \frac{1}{d_{31}^2}=\frac{1}{a_{32}^2}+\frac{1}{a_{14}^2},\quad \frac{1}{d_{12}^2}=\frac{1}{a_{13}^2}+\frac{1}{a_{24}^2},$$

tedy

$$(d_{23}^2+d_{31}^2+d_{12}^2)(o_1^2+o_2^2+o_3^2+o_4^2)=$$
$$2\,(o_1^2o_2^2+o_1^2o_3^2+o_1^2o_4^2+o_2^2o_3^2+o_2^2o_4^2+o_3^2o_4^2).$$

Všech hypersfer možných jest $\frac{(2m-1)!}{2}$, mezi nimiž jsou různé ony, jež vzniknou permutacemi prvků mezi součtem sudých a lichých. Těchto jest $\frac{1}{2}\binom{2m}{m}$. Proto je stejných

$$\frac{(2m-1)!}{2}\cdot 2\frac{m!\,m!}{(2m)!}=\frac{m!\,m!}{2m}=\frac{m!\,(m-1)!}{2}.$$

U čtyřstěnu je stejných po $1\left(=\frac{2!\,1!}{2}\right)$, všech $\frac{3!}{2}=3$, různé $\frac{1}{2}\binom{4}{2}=3$, čímž zároveň tyto formule ověřeny.

Určeme ještě mocnost orthického středu kolmohranného simplexu ke $(2m-2)$ - rozměrným hypersferám posléze uvažovaným.

K tomu účelu stanovme nejprve rovnici takové hypersfery.

Značíce $\underset{xy\ldots}{S}$ součty podle souřadnic, $\sum$ součty podle indexů vrcholů, máme

$$\underset{xy\ldots}{S}x^2-2\underset{xy\ldots}{S}xx_0+\underset{xy\ldots}{S}x_0^2=R^2,$$

kde se index o vztahuje na střed hypersfery.

K jejímu určení stačí $2m-1$ ze $2m$ pat výšek na hranách mnohoúhelníka a další libovolný bod $(x_sy_s\ldots)$.

Když tedy obvyklým způsobem dosadíme tyto souřadnice do napsané rovnice, můžeme souřadnice středu a poloměr vyloučiti, čímž vznikne determinantní rovnice:

$$\begin{vmatrix}
\underset{xy\ldots}{S}x^2, & x, & y, & \ldots 1\\
\underset{xy\ldots}{S}\dfrac{\left(\dfrac{x_1}{o_1^2}+\dfrac{x_2}{o_2^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{o_1^2}+\dfrac{1}{o_2^2}\right)^2}, & \dfrac{\dfrac{x_1}{o_1^2}+\dfrac{x_2}{o_2^2}}{\dfrac{1}{o_1^2}+\dfrac{1}{o_2^2}}, & \dfrac{\dfrac{y_1}{o_1^2}+\dfrac{y_2}{o_2^2}}{\dfrac{1}{o_1^2}+\dfrac{1}{o_2^2}}, & \ldots 1\\
\underset{xy\ldots}{S}\dfrac{\left(\dfrac{x_2}{o_2^2}+\dfrac{x_3}{o_3^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{o_2^2}+\dfrac{1}{o_3^2}\right)}, & \dfrac{\dfrac{x_2}{o_2^2}+\dfrac{x_3}{o_3^2}}{\dfrac{1}{o_2^2}+\dfrac{1}{o_3^2}}, & \dfrac{\dfrac{y_2}{o_2^2}+\dfrac{y_3}{o_3^2}}{\dfrac{1}{o_2^2}+\dfrac{1}{o_6^2}}, & \ldots 1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\underset{xy\ldots}{S}\dfrac{\left(\dfrac{x_{2m-1}}{o_{2m-1}^2}+\dfrac{x_{2m}}{o_{2m}^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{o_{2m-1}^2}+\dfrac{1}{o_{2m}^2}\right)^2}, & \dfrac{\dfrac{x_{2m-1}}{o_{2m-1}^2}+\dfrac{x_{2m}}{o_{2m}^2}}{\dfrac{1}{o_{2m-1}^2}+\dfrac{1}{o_{2m}^2}}, & \dfrac{\dfrac{y_{2m-1}}{o_{2m-1}^2}+\dfrac{y_{2m}}{o_{2m}^2}}{\dfrac{1}{o_{2m-1}^2}+\dfrac{1}{o_{2m}^2}}, & \ldots 1\\
\underset{xy\ldots}{S}x_s^2, & x_s, & y_s, & \ldots 1
\end{vmatrix}=0.$$

Sem dosadíme za obecné souřadnice prvního řádku souřadnice orthického středu $x_vy_v\ldots$, při čemž

$$x_v\left(\frac{1}{o_1^2}+\frac{1}{o_2^2}+\ldots+\frac{1}{o_{2m}^2}\right)=\frac{x_1}{o_1^2}+\frac{x_2}{o_2^2}+\ldots+\frac{x_{2m}}{o_{2m}^2},\quad \text{atd.}$$

Znásobíme-li pak první řádek číslem $\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{o_k^2}$ a pak druhý, čtvrtý atd., vždy ob jeden až do předposledního čísly $\frac{1}{o_1^2}+\frac{1}{o_2^2}$, $\frac{1}{o_3^2}+\frac{1}{o_4^2}, \ldots, \frac{1}{o_{2m-1}^2}+\frac{1}{o_{2m}^2}$ resp., a odečteme-li součet těchto od prvního, zruší se v něm všecky členy až na první, jenž není než $\sum_k \frac{1}{o_k^2}$ násobná mocnost p orthického středu, takže máme

$$p\left[\sum_k \frac{1}{o_k^2}\right]^2 = \underset{xy\ldots}{S}\left\{\left(\frac{x_1}{o_1^2}+\ldots+\frac{x_{2m}}{o_{2m}^2}\right)^2 - \sum_{k=1}^{m}\frac{\left(\frac{x_{2k-1}}{o_{2k-1}^2}+\frac{x_{2k}}{o_{2k}^2}\right)^2}{\frac{1}{o_{2k-1}^2}+\frac{1}{o_{2k}^2}}\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{o_k^2}\right\}.$$

Seskupíme-li v prvním členu uvnitř dvojité závorky vždy dva členy za sebou jdoucí a přepíšeme-li druhý člen na tvar

$$\sum\left(\frac{x_{2k-1}}{o_{2k-1}^2}+\frac{x_{2k}}{o_{2k}^2}\right)^2\left[1-\frac{\frac{1}{o_1^2}+\ldots+\frac{1}{o_{2k-2}^2}+\frac{1}{o_{2k+1}^2}+\ldots+\frac{1}{o_{2m}^2}}{\frac{1}{o_{2k-1}^2}+\frac{1}{o_{2k}^2}}\right],$$

zruší se čtverce vzniklé z prvního členu se členy odpovídajícími jedničkám ve druhém, zbude v prvním členu $\binom{m}{2}$ dvojnásobných součinů a z $m(m-1)$ čtverců druhého členu lze ke každému z první skupiny

$$2\left(\frac{x_{2k-1}}{o_{2k-1}^2}+\frac{x_{2k}}{o_{2k}^2}\right)\left(\frac{x_{2l-1}}{o_{2l-1}^2}+\frac{x_{2l}}{o_{2l}^2}\right)$$

přidružiti dva členy ze druhé:

$$-\frac{\left(\frac{x_{2k-1}}{o_{2k-1}^2}+\frac{x_{2k}}{o_{2k}^2}\right)^2}{\frac{1}{o_{2k-1}^2}+\frac{1}{o_{2k}^2}}\left(\frac{1}{o_{2l-1}^2}+\frac{1}{o_{2l}^2}\right)-\frac{\left(\frac{x_{2l-1}}{o_{2l-1}^2}+\frac{x_{2l}}{o_{2l}^2}\right)^2}{\frac{1}{o_{2l-1}^2}+\frac{1}{o_{2l}^2}}\left(\frac{1}{o_{2k-1}^2}+\frac{1}{o_{2k}^2}\right).$$

Vytkněme ze všech členů činitele $\left(\frac{1}{o_{2k-1}^2}+\frac{1}{o_{2k}^2}\right)\left(\frac{1}{o_{2l-1}^2}+\frac{1}{o_{2l}^2}\right)$ a vznikne

$$-\left(\frac{1}{o_{2k-1}^2}+\frac{1}{o_{2k}^2}\right)\left(\frac{1}{o_{2l-1}^2}+\frac{1}{o_{2l}^2}\right)\cdot\left[\frac{\frac{x_{2k-1}}{o_{2k-1}^2}+\frac{x_{2k}}{o_{2k}^2}}{\frac{1}{o_{2k-1}^2}+\frac{1}{o_{2k}^2}}-\frac{\frac{x_{2l-1}}{o_{2l-1}^2}+\frac{x_{2l}}{o_{2l}^2}}{\frac{1}{o_{2l-1}^2}+\frac{1}{o_{2l}^2}}\right]^2.$$

Provedeme-li součet takovýchto výrazů pro všechny souřadnice, vystoupí za všecky výrazy v hranaté závorce čtverec vzdálenosti pat dvou výšek b_{kl}^2 a dosazením výrazu z (65) vznikne:

$$-\frac{a_{2}{}^{2}{}_{k-1,\,2k}}{o_{2}{}^{2}{}_{k-1}\,o_{2}{}^{2}{}_{k}}\cdot\frac{a_{2}{}^{2}{}_{l-1,\,2l}}{o_{2}{}^{2}{}_{l-1\,2}o^{2}{}_{l}}\left[\frac{o_{2}{}^{2}{}_{k-1}\,o_{2}{}^{2}{}_{k}}{a_{2}{}^{2}{}_{k-1,\,2l}}+\frac{o_{2}{}^{2}{}_{l-1}\,o_{2}{}^{2}{}_{l}}{a_{2}{}^{2}{}_{l-1,\,2l}}\right],$$

což po znásobení a zjednodušení přejde v

$$-\left[\frac{1}{o_{2}{}^{2}{}_{k-1}}+\frac{1}{o_{2}{}^{2}{}_{k}}+\frac{1}{o_{2}{}^{2}{}_{l-1}}+\frac{1}{o_{2}{}^{2}{}_{l}}\right].$$

Takových součtů jest $\binom{m}{2}$, tedy celkem $4\binom{m}{2} = 2m(m-1)$ členů. Jednoduchý součet $\sum \frac{1}{o^2{}_k}$ obsahuje $2m$ členů, proto je celý výraz roven $(m-1)\sum \frac{1}{o^2{}_k}$, takže

$$p\left[\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{o^2{}_k}\right]^2 = -(m-1)\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{o^2{}_k}.$$

Odtud plyne

$$-\frac{m-1}{p} = \frac{1}{o_1{}^2}+\frac{1}{o_2{}^2}+\ldots+\frac{1}{o_2{}^2{}_m}.$$

*

Sur les simplices.

(Extrait de l'article précédent.)

La première partie contient quelques compléments aux résultats du mémoire du même auteur „Contribution à la théorie du volume“ inséré dans les Comptes rendus du Congrès de l'Association Française pour l'Avancement des sciences tenu à Bordeaux en 1923.

C'est en premier lieu une nouvelle formule (1) pour le volume des prismes H_{ik} qui a trouvé dans la suite une application à la détermination des conditions qui doivent être remplies par de prismes spéciaux inscriptibles aux hypersphères, et qui a suggéré une nouvelle formule (11) qui adjoint à un déterminant de la forme (6) un déterminant réciproque de la même forme.

Puis une formule pour le volume (15) en fonction des arêtes, présentant les éléments de la diagonale principale différents de zèro.

La deuxième partie contient quelques propriétés métriques des simplices tangentiels; leur étude, portant tantôt sur les arêtes, tantôt sur les angles, fournit la source de divers résultats.

Un résultat caractéristique s'est présenté, faisant ressortir le rôle que joue le nombre de dimensions, disant que les points de contact d'un polygone simple contenant tous les sommets du simplex ne peuvent être situés sur une même hypersphère dont le nombre de dimensions est réduit d'une unité que si le simplex donné est à un nombre impair des dimensions.

Les rayons des hypersphères circonscrits, inscrits et exinscrits aux arêtes, sont donnés avec leur relations aux autres quantités caractéristiques.

Dans la troisième partie une pareille méthode de procédé montre plusieurs analogies des simplices orthogonaux aux précédents. C'est surtout la circonstance que les pieds des hauteurs menées du centre orthique aux arêtes formant un polygone simple, contenant tous les sommets du simplex, se trouvent sur une même hypersphère, si le nombre de dimensions du simplex est impaire.

La détérmination du rayon et de la puissance du centre orthique par rapport à ces hypersphères forme la conclusion du mémoire.