Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

B. Kladivo

Přibližný výraz pro $+\sqrt{1+x^2}$ v intervalu od 0 do 1

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 1, 17--25

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/124002`

Vyhoví-li se této podmínce, mají rovnice (9) nekonečné množství kořenů $\mathbf{x}$, které vycházejíce ze společného počátku O, končí v některém bodě přímky p, vztyčené v X_0 kolmo na rovině vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Specielní kořen $\mathbf{x}_0$ i obecný kořen $\mathbf{x}$ ustanovíme podobným způsobem jako u rovnic (5) v odstavci 2.

4. Jsou-li dány čtyři rovnice

$$\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a} = m, \quad \mathbf{x} \,.\, \mathbf{b} = n, \quad \mathbf{x} \,.\, \mathbf{c} = p, \quad \mathbf{x} \,.\, \mathbf{d} = q,$$

nalezneme výsledek eliminace neznámé z těchto rovnic, jestliže z kterýchkoli tří rovnic ustanovíme $\mathbf{x}$ a hodnotu jeho vložíme do rovnice čtvrté.

Dle (12b) bude z prvních tří rovnic

$$\mathbf{x} = m\mathbf{a}' + n\mathbf{b}' + p\mathbf{c}';$$

vložíce tuto hodnotu do rovnice čtvrté, obdržíme

$$m\,\mathbf{a}' \,.\, \mathbf{d} + n\,\mathbf{b}' \,.\, \mathbf{d} + p\,\mathbf{c}' \,.\, \mathbf{d} = q.$$

Nahradíme-li v této rovnici $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ hodnotami (11b), vychází

$$m\,\frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{(\mathbf{abc})} \,.\, \mathbf{d} + n\,\frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{(\mathbf{abc})} \,.\, \mathbf{d} + p\,\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{(\mathbf{abc})} \,.\, \mathbf{d} = q$$

čili

$$m(\mathbf{bcd}) + n(\mathbf{cad}) + p(\mathbf{abd}) = q(\mathbf{abc}), \tag{13}$$

jako hledaný výsledek eliminace (*V. A.* vzorec (19) na str. 22).

(Dokončení.)

Přibližný výraz pro $+\sqrt{1+x^2}$ v intervalu od 0 do 1.

Dr. **B. Kladivo** v Brně.

Odmocnina $+\sqrt{1+x^2}$ se nahrazuje v intervalu od 0 do 1 výrazem

$$\text{(I)}\quad [5\sqrt{2} - 4 - 3l(1+\sqrt{2})]\,x + [2 - 2\sqrt{2} + 2l(1+\sqrt{2})],$$

splňujícím požadavek*), aby byl minimální integrál

$$\int_0^1 (+\sqrt{1+x^2} - A_0 x - A_1)^2 dx.$$

---

*) *F. R. Helmert*: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate 2. Aufl. 1907 str. 379.

Určíme výraz $A_0 x + A_1$ tak, aby maximum, jehož dosáhne v intervalu $0 \dots 1$ absolutní hodnota chyby

$$+\sqrt{1+x^2} - A_0 x - A_1$$

bylo menší, než maximum absolutní hodnoty chyby

$$+\sqrt{1+x^2} - a_0 x - a_1$$

v tom intervalu, ať jsou čísla a_0, a_1 jakákoli, nerovná se A_0 resp. A_1.

$A_0 x + A_1$ je příslušný Čebyševův aproximační polynom prvního stupně. Určíme čísla A_0, A_1 nejprve přímo, pak dle teorie Čebyševových polynomů.

1. Maximum výrazu

$$(+\sqrt{1+x^2} - A_0 x - A_1)^2$$

v intervalu $0 \dots 1$ může nastati buď pro $x = 0$ nebo $x = 1$, nebo kde je rovna nule derivace

$$2\left(+\sqrt{1+x^2} - A_0 x - A_1\right)\left(\frac{x}{+\sqrt{1+x^2}} - A_0\right).$$

Kořenům rovnice

$$+\sqrt{1+x^2} - A_0 x - A_1 = 0$$

přísluší minimum. Zbývá tedy vyšetřovati hodnoty $x = 0$, 1 a kořen x_0 rovnice

$$\frac{x}{+\sqrt{1+x^2}} - A_0 = 0, \tag{1}$$

pokud je v intervalu $0 \dots 1$ (v užším smyslu), a pokud při tom

$$\left(+\sqrt{1+x_0^2} - A_0 x_0 - A_1\right)\frac{1}{(+\sqrt{1+x_0^2})^3} < 0,$$

t. j. pokud

$$+\sqrt{1+x_0^2} - A_0 x_0 - A_1 < 0. \tag{2}$$

Je patrno, je-li A_0 záporné, nemá rovnice (1) kladného kořenu. Je-li A_0 kladné a větší než 1, nemá rovnice (1) reálného kořenu.

Protože má býti

$$0 < x_0 = \frac{A_0}{+\sqrt{1-A_0^2}} < 1,$$

a při tom dle (2)

$$+\sqrt{1-A_0^2} - A_1 < 0,$$

nemá rovnice (1) kořenu v intervalu 0 . . . 1, je-li $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq A_0 \leqq 1$,

má rovnice (1) kořen v intervalu 0 . . . 1, je-li $0 < A_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$; aby tomuto kořenu příslušelo maximum, musí býti

$$A_1 > +\sqrt{1 - A_0^2}.$$

Výrazy, jež mohou býti maximální, jsou:

$$(1 - A_1)^2, \quad (+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2, \quad (+\sqrt{1 - A_0^2} - A_1)^2.$$

Zobrazme body (A_1, A_0) v pravoúhlé soustavě souřadnic (A_1 úsečka, A_0 pořadnice).

a) Určíme soubor S_a bodů (A_1, A_0), pro něž je první výraz větší nebo rovný oběma ostatním a vyhledáme v tom oboru bod*), v němž je $(1 - A_1)^2$ minimální. Má býti

$$(1 - A_1)^2 \geqq (+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2 \quad \text{a}$$
$$(1 - A_1)^2 \geqq (+\sqrt{1 - A_0^2} - A_1)^2, \text{ t. j.}$$
$$(1 + \sqrt{2} - A_0 - 2A_1)(1 - \sqrt{2} + A_0) \geqq 0 \quad \text{a}$$
$$(1 - 2A_1 + \sqrt{1 - A_0^2})(1 - \sqrt{1 - A_0^2}) \geqq 0.$$

(Druhou nerovnost stačí uvažovati jen pokud $0 < A_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $A_1 > +\sqrt{1 - A_0^2}$). Musí býti buď $A_0 = \sqrt{2} - 1$,

$$A_0 > \sqrt{2} - 1, \quad A_0 + 2A_1 \leqq 1 + \sqrt{2},$$

nebo

$$A_0 < \sqrt{2} - 1, \quad A_0 + 2A_1 \geqq 1 + \sqrt{2}; \text{ (srovn. obr. 1.)}$$

a je-li

$$0 < A_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad A_1 > +\sqrt{1 - A_0^2},$$

musí býti

$$1 - 2A_1 + \sqrt{1 - A_0^2} \geqq 0.$$

$(1 - \sqrt{1 - A_0^2}$ je v tom případě $> 0)$.

Je-li $A_0 \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ je minimum výrazu $(1 - A_1)^2$ v bodě

$$B_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

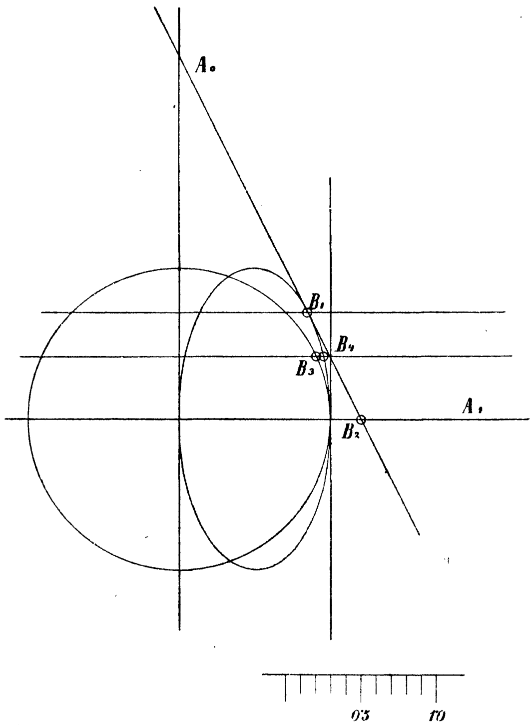
---

*) Výrazy $(1 - A_1)^2$, $(+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2$, $(+\sqrt{1 - A_0^2} - A_1)^2$ nejsou v uvažovaných oborech extrémní na žádné křivce.

Je-li $A_0 \leqq 0$ je minimum výrazu $(1 - A_1)^2$ v bodě

$$B_2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right).$$

Je-li $0 < A_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $A_1 \leqq +\sqrt{1 - A_0^2}$, je minimum výrazu $(1 - A_1)^2$ v bodě $B_3\,(\sqrt{2\sqrt{2} - 2},\ \sqrt{2} - 1)$.



Obr. 1.

Je-li $0 < A_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $A_1 > +\sqrt{1 - A_0^2}$,

$1 - 2A_1 + \sqrt{1 - A_0^2} \geqq 0$, je minimum výrazu $(1 - A_1)^2$ v bodě

$$B_4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2} - 2},\ \sqrt{2} - 1\right).$$

V oboru S_a jest výraz $(1 - A_1)^2$ nejmenší v bodě B_4. Geometricky je to patrné, početně se to ukáže snadno.

Uvažujme funkci $f^2(A_1, A_0)$ uvnitř a na hranicích oboru O, omezeného křivkami $\varphi_1(A_1, A_0) = 0$ od bodu B_1 do bodu B_2, $\varphi_2(A_1, A_0) = 0$ od bodu B_2 do B_3 atd. (f, φ_i jsou funkce spojité i s parciálnými derivacemi prvního řádu; $\frac{\partial \varphi_i}{\partial A_1}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial A_0}$ nevymizí současně na čáře $\varphi_i(A_1, A_0) = 0$.)

Předpokládáme, že

1. aspoň jedna z derivací $\frac{\partial f}{\partial A_1}$, $\frac{\partial f}{\partial A_0}$ v oboru O nevymizí,

2. na hranici mezi B_i, B_{i+1} je $\frac{D(f, \varphi_i)}{D(A_1, A_0)} \gtrless 0$,

3. křivka $f(A_1, A_0) = 0$ neprotíná obor O, ani se nedotýká jeho hranic.

Extrém funkce $f^2(A_1, A_0)$ může v tom případě nastati jen v bodech B_i. Aby nastal extrém uvnitř oboru O, musilo by býti

$$f(A_1, A_0)\frac{\partial f}{\partial A_1} = 0, \quad f(A_1, A_0)\frac{\partial f}{\partial A_0} = 0.$$

Dle předpokladu 1. a 3. nejsou tyto podmínky splněny.

Aby nastal extrém v některém bodě na hranici — mezi B_i, B_{i+1} —, musilo by býti

$$f\frac{\partial f}{\partial A_1} - \lambda\frac{\partial \varphi_i}{\partial A_1} = 0,$$

$$f\frac{\partial f}{\partial A_0} - \lambda\frac{\partial \varphi_i}{\partial A_0} = 0,$$

$$\varphi_i(A_1, A_0) = 0.$$

Eliminujeme λ. Musilo by býti

$$f\left(\frac{\partial f}{\partial A_1}\frac{\partial \varphi_i}{\partial A_0} - \frac{\partial f}{\partial A_0}\frac{\partial \varphi_i}{\partial A_1}\right) = f\frac{D(f, \varphi_i)}{D(A_1, A_0)} = 0.$$

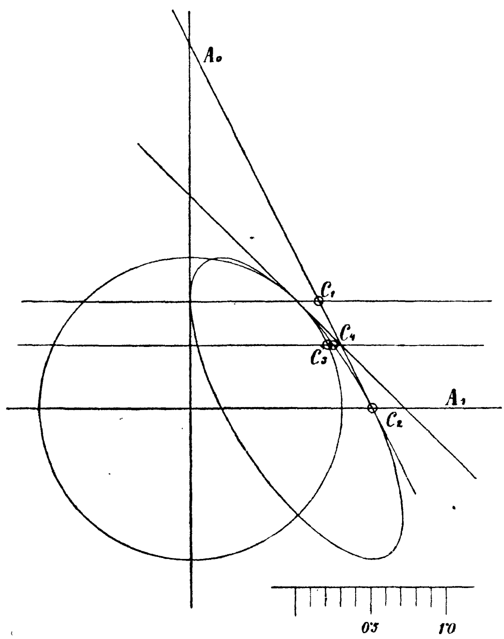
Dle předpokladu 2. a 3. není tato podmínka splněna. Tím je tvrzení dokázáno.

Horní podmínky jsou v uvažovaných případech splněny. Srovnáním hodnot, kterých nabývá na př. funkce $(1 - A_1)^2$ v bodech B_1, B_2, B_3, B_4, se rozhodne, kdy nastane minimum.

b) Určíme soubor S_b bodů (A_1, A_0), pro něž je druhý výraz větší nebo rovný oběma ostatním a vyhledáme v tom oboru bod, v němž je $(+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2$ minimální.

Má býti

$$(+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2 \geqq (1 - A_1)^2,$$
$$(+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2 \geqq (+\sqrt{1 - A_0^2} - A_1)^2, \text{ t. j.}$$
$$(1 + \sqrt{2} - A_0 - 2A_1)(-1 + \sqrt{2} - A_0) \geqq 0,$$
$$(+\sqrt{2} - A_0 - 2A_1 + \sqrt{1 - A_0^2})(+\sqrt{2} - A_0 - \sqrt{1 - A_0^2}) \geqq 0.$$



Obr. 2.

(Druhou nerovnost stačí zase uvažovati jen pokud

$$0 < A_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad A_1 > +\sqrt{1 - A_0^2}.)$$

Musí býti buď $A_0 = \sqrt{2} - 1$,

$$A_0 + 2A_1 \leqq 1 + \sqrt{2}, \quad A_0 < \sqrt{2} - 1,$$

nebo

$$A_0 + 2A_1 \geqq 1 + \sqrt{2}, \quad A_0 > \sqrt{2} - 1; \quad \text{(srov. obr. 2.)}$$

a je-li $0 < A_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad A_1 > +\sqrt{1-A_0^2},$

musí býti

$$+\sqrt{2} - A_0 - 2A_1 + \sqrt{1-A_0^2} \geqq 0.$$

$(+\sqrt{2} - A_0 - \sqrt{1-A_0^2}$ je v tom případě $> 0.)$

Je-li $A_0 \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ je minimum výrazu $(+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2$

v bodě $$C_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Je-li $A_0 \leqq 0$, je minimum výrazu $(+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2$

v bodě $$C_2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Je-li $0 < A_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}, \; A_1 \leqq +\sqrt{1-A_0^2}$, je minimum výrazu $(+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2$ v bodě $C_3(\sqrt{2\sqrt{2}-2}, \; \sqrt{2}-1)$.

Je-li $0 < A_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad A_1 > +\sqrt{1-A_0^2},$

$$\sqrt{2} - A_0 - 2A_1 + \sqrt{1-A_0^2} \geqq 0,$$

je minimum výrazu $(+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2$ v bodě

$$C_4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}, \; \sqrt{2}-1\right).$$

V oboru S_b jest výraz

$$(+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2$$

nejmenší v bodě C_4.

c) Určíme soubor S_c bodů (A_1, A_0), pro něž je třetí výraz větší nebo rovný oběma ostatním a vyhledáme v tom oboru bod, v němž je $(+\sqrt{1-A_0^2} - A_1)^2$ minimální.

Musí býti

$$0 < A_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad A_1 > +\sqrt{1-A_0^2},$$

a
$$(+\sqrt{1-A_0^2} - A_1)^2 \geqq (1-A_1)^2,$$
$$(+\sqrt{1-A_0^2} - A_1)^2 \geqq (+\sqrt{2} - A_0 - A_1)^2,$$

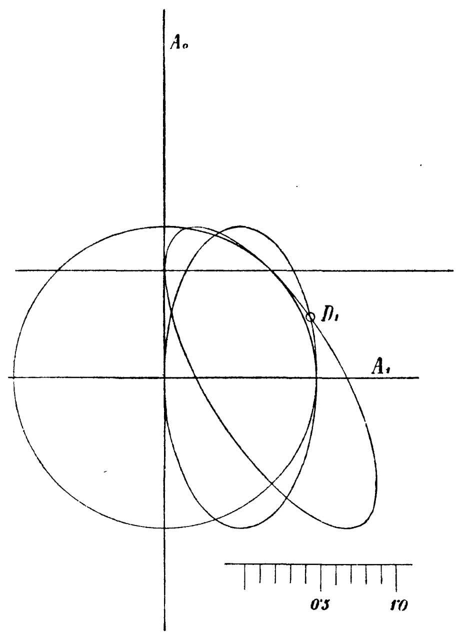
t. j.
$$1 - 2A_1 + \sqrt{1-A_0^2} \leqq 0,$$
$$+\sqrt{2} - A_0 - 2A_1 + \sqrt{1-A_0^2} \leqq 0.$$

Minimum výrazu $(+\sqrt{1-A_0^2}-A_1)^2$
v oboru S_c je v bodě

$$D_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}, \sqrt{2}-1\right)$$

Tedy Čebyševův aproximační polynom prvního stupně je

(II) $(\sqrt{2}-1)\,x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\;(=0{\cdot}41421\,x+0{\cdot}95509).$



Obr. 3.

Největší absolutní hodnota chyby v intervalu 0 ... 1 jest 0·0449. V případě formule (I) jest pro krajní body

$$x=0,\; x=1$$

absolutní hodnota chyby: 0·0657, resp. 0·0529.

2. Extrém funkce

$$(+\sqrt{1+x^2}-A_0x-A_1),$$

(x v intervalu 0 ... 1), může nastati jen ve třech bodech

$$x=0,\; x=\frac{A_0}{+\sqrt{1-A_0^2}},\; x=1.$$

Aby $A_0x + A_1$ byl Čebyševův polynom, musí býti příslušné funkční hodnoty rovny ν, $-\nu$, ν.*)

Tedy

$$(+\sqrt{1+x^2} - A_0x - A_1)_{x=0} = (+\sqrt{1+x^2} - A_0x - A_1)_{x=1};$$

odtud

$$A_0 = +\sqrt{2} - 1.$$

$$1 - A_1 + \sqrt{1 - A_0^2} - A_1 = 0,$$

$$2A_1 = 1 + \sqrt{1 - A_0^2} = 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 2},$$

$$A_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2} - 2}.$$

Důsledky akusticko-dynamického principu.

Napsal školní rada **František Kaňka.**

III. *Pozoruhodné úkazy na obrazcích pod deskami rozbornými, když jsou deskami propouštěcími, i když samy kmitají.*

A. Některá pozorování a úvahy. — Vysvětlení toho zjevu, že se několik akustických čar spojuje v jednu mohutnou čáru, týká se možnosti, že několik stejnoběžných vírů splývá v jediný mocnější vír.[1])

V řadě pokusů vyskytly se však nápadné, pravidelně se opakující případy, které přímo vyzývaly k podrobnějšímu probádání. Zvláště, konaje pokusy s propouštěcími deskami, shledával jsem, že se na některých význačných místech několik vírných větví spojuje v jednu mohutnou, která se opět dále rozvětvuje.

Byly to zejména: 1. Případy, kdy se sesílení vírů dělo pravidelně po vnějších stranách vírných kroužků na věncovitých obrazcích troj-, šesti- a dvanáctiúhelníkovém, jež se týkaly skladu polí mnohoosých se svislými osami.[2])

---

*) *É. Borel:* Leçons sur les fonctions de variables réelles ... 1905 str. 82—88.

[1]) Tento Časopis, „O akust.-dyn. principu“ roč. 42., str. 440.

[2]) Tamtéž str. 447., obr. 14., 15., 16.