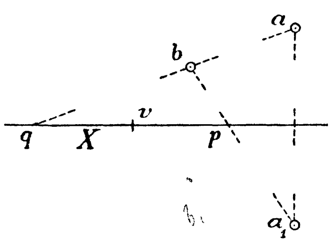
Několik konstrukcí kuželoseček.[1])

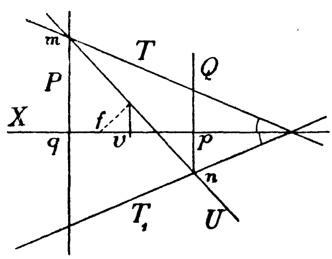
Podal dvor. rada prof. Dr. **Vinc. Jarolímek.**

I. Dané prvky reálné.

1. *Sestrojiti parabolu, dána-li osa její X a dva body a, b* (obr. 1). Buďtež a_1, b_1 body souměrné k a, b podle osy X (bodu b_1 ke konstrukci netřeba). Úplný čtyřúhelník abb_1a_1 je do paraboly vepsán; jeho protější strany protínají se v bodech $(\overline{ab}, \overline{a_1b_1}) \equiv q$, $(\overline{ab_1}, \overline{a_1b}) \equiv p$, $(\overline{aa_1}, \overline{bb_1}) \equiv r$ (v nekonečnu), jež jsou vrcholy polárného trojúhelníka. Body p, q, jež připadají na



Obr. 1.



Obr. 2.

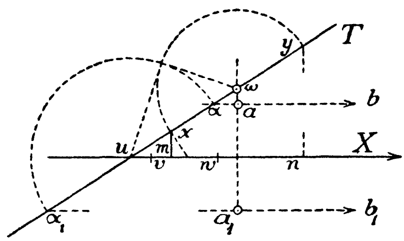
osu X, jsou tedy sdružené póly (polára pólu q jde bodem $p \perp X$ a naopak;[2]) vrchol paraboly v půlí tudíž úsečku $\overline{pq}$. Nyní již snadno sestrojíme tečnu v bodě b a ohnisko paraboly.

[1]) Úlohy tyto nejsou obsaženy ve spise autorově »Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru«, svazek I.—IV., aniž ve Weyrově »Projektivné geometrii«. — V dalších odkazech označovati budeme spis prvý *G. P.*

[2]) V involuci harmonických pólů na ose kuželosečky jsou body samodružnými oba vrcholy křivky; ježto však druhý vrchol paraboly je v nekonečnu, je tato involuce symmetrická, t. j. každá její družina $\overline{pq}$ je souměrná podle vrcholu v.

2. *Dány jsou dvě tečny paraboly* T, U *a osa* X (obr. 2). buďtež T_1, U_1 tečny souměrné k T, U podle osy X (tečny U_1 ke konstrukci netřeba). Úplný čtyřstran TUU_1T_1 je parabole opsán; jeho protější vrcholy spojme úhlopříčkami $\overline{(TU)(T_1U_1)} \equiv P$ [jde průsečíkem $(TU) \equiv m$ kolmo k ose X], $\overline{(T_1U)(TU_1)} \equiv Q \equiv$ $\equiv \overline{np} \perp X$, $\overline{(TT_1)(UU_1)} \equiv X$. — ΔPQX je polárný, jehož vrcholy jsou p, q, r (tento v nekonečnu na P). Jsou tedy zase p, q sdružené póly na ose X a vrchol paraboly v půlí úsečku $\overline{pq}$.

3. *Parabola buď dána bodem* a, *tečnou* T *a osou* X (obr. 3). Stanovme bod a_1 souměrný k a podle X a veďme $\overline{ab} \parallel \overline{a_1b_1} \parallel X$; bod $b \equiv b_1$ je v nekonečnu. Body aa_1b_1b určují svazek parabol Σ,



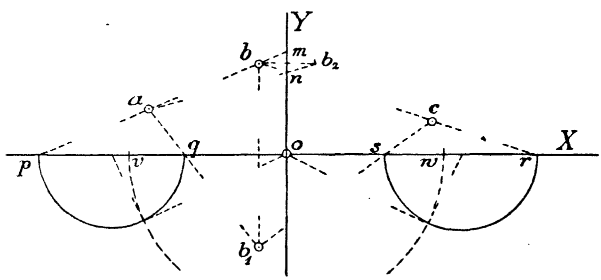
Obr. 3.

z nichž dvě jsou degenerované; jedna rozpadá se v přímky $\overline{ab}$, $\overline{a_1b_1}$, druhá v přímku $\overline{aa_1}$ a v přímku úběžnou $\overline{bb_1}$. Tečna T protíná svazek Σ v involuci bodové, jejíž jednu družinu $\alpha\alpha_1$ vytínají na T přímky $\overline{ab} \parallel \overline{a_1b_1}$, druhou pak přímky $\overline{aa_1}$ (v bodě ω) a $\overline{bb_1}$ (v nekonečnu); ω je tedy střed involuce. V samodružných bodech involuce x, y $(\overline{\omega x} = -\overline{\omega y} = \sqrt{\overline{\omega\alpha} \,.\, \overline{\omega\alpha_1}})$ dotýkají se tečny T dvě paraboly svazku Σ. Učiníme-li $\overline{xm} \perp X$, $\overline{uv} = \overline{vm}$, $\overline{yn} \perp X$, $\overline{uw} = \overline{wn}$, budou v, w vrcholy obou parabol, jež hoví podmínkám úlohy. Paraboly tyto jsou reálné, je-li bod a nebo a_1 vnitř jednoho z ostrých úhlů, jež přímkami T, X jsou sevřeny; jinak jest výsledek imaginárný.

4. Konstrukce sdružených pólů p, q na ose X v úloze 1. vyložená (obr. 1.) má samozřejmě platnost pro každou kuželosečku; možno ji vyjádřiti větou: Vytkneme-li na kuželosečce dva body a, a_1 souměrně položené podle jedné osy a promítneme-li je z kteréhokoli třetího bodu křivky na touž osu, dostaneme dva

póly sdružené. Je to zvláštní případ známé věty obecnější, jsou-li a, a_1 dva libovolné body kuželosečky, $\overline{aa_1}$, X dvě poláry sdružené.

5. Je-li tedy *sestrojiti kuželosečku, dány-li tři body její a, b, c i jedna osa X* (obr. 4.), opatříme si z bodův a, b a bodu b_1 souměrného ku b podle X sdružené póly p, q, a další družinu r, s z bodů b, b_1, c na ose X. Involuce harmonických pólů na X je dána dvěma družinami; její body samodružné v, w (známá konstrukce provedena v obr. 4.) dají vrcholy žádané



Obr. 4.

kuželosečky; opíšeme-li nad průměry $\overline{pq}$, $\overline{rs}$ kružnice, dá chordála jejich Y druhou osu kuželosečky. Polovina osy prvé

$$\overline{ov} = \sqrt{\overline{op} \cdot \overline{oq}},$$

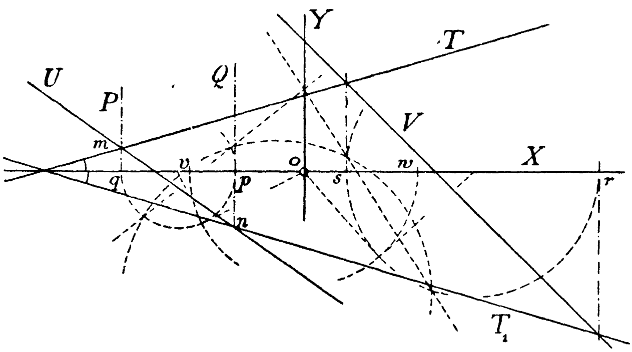
a polovina osy druhé $= \sqrt{\overline{om} \cdot \overline{on}}$ (bod b_2 souměrný ku b podle Y).

Dána-li místo třetího bodu c jedna tečna křivky T (tedy celkem: 2 body, 1 tečna, 1 osa), stanovíme body a_1, b_1 souměrné k a, b podle X a proložíme body a, b, a_1, b_1 kuželosečku, která se dotýká přímky T, což jest úlohou známou (*G. P.* II., str. 4., odst. 104.). Výsledky jsou dva, reálné nebo pomyslné.

6. Konstrukce sdružených pólů p, q v úloze 2. odvozená (obr. 2.) má tolikéž platnost pro kuželosečku každou. Z toho jde: Vedeme-li ke kuželosečce dvě tečny souměrně položené podle jedné osy, protneme-li je kteroukoli třetí tečnou křivky a spustíme-li s obou průsečíků kolmice na touž osu, dostaneme dvě poláry sdružené P, Q; paty jejich dají dva sdružené póly q, p.

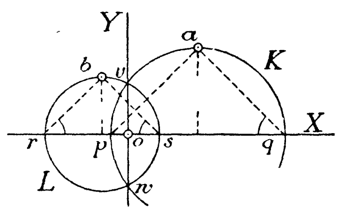
7. Je-li tedy *kuželosečka dána třemi tečnami T, U, V a jednou osou X* (obr. 5.), stanovme tečnu T_1 souměrnou ku T podle X, sdružené poláry P, Q z tečen T, T_1, U, jež protnou

X v sdružených pólech q, p, dále obdobně sdružené póly r, s z tečen T, T_1, V. Posléze dají samodružné body involuce (pq, rs) na ose X vrcholy v, w žádané kuželosečky.



Obr. 5.

Dán-li místo třetí tečny V jeden bod křivky c (tedy celkem: 2 tečny, 1 bod, 1 osa), určíme tečny T_1, U_1 souměrné podle X ku T, U, a proložíme podle známé konstrukce (*G. P.* II., str. 4., odst. 104. v pravo, obr. 167.) bodem c kuželosečku, která se dotýká čtyř přímek T, T_1, U, U_1. Výsledky jsou dva, reálné nebo imaginárné.

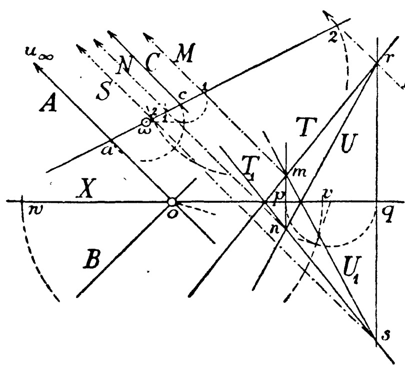


Obr. 6.

8. *Hyperbola rovnoosá buď dána jednou osou X a dvěma body a, b* (obr. 6.). Úběžné body každé hyperboly jsou tolikéž souměrny podle X (i podle Y); promítneme-li tedy z nich bod a do X (nebo Y), nabudeme podle věty 4. poučky speciální: *Promítneme-li kterýkoli bod hyperboly do její osy rovnoběžkami k asymptotám, dostaneme dva póly sdružené.* Veďme tedy, aby hyperbola byla rovnoosá, danými body a, b (obr. 6.) paprsky tak, aby protínaly osu X v úhlech $= 45^0$; průsečíky pq, rs dají

dvě družiny involuce na X, jichž samodružné body budou vrcholy žádané hyperboly, jsou-li reálné. Jestliže však družiny pq, rs se rozdělují (obr. 6.). jest involuce elliptická, X osa vedlejší; nicméně střed involuce o dá i v tomto případě střed hyperboly. $oY \perp X$ osu hlavní, a vrcholy v, w budou v průsečících kružnic K, L nad průměry $\overline{pq}$, $\overline{rs}$. Neboť $-\overline{ov}^2$ jest potence involuce na ose X a hyperbola je rovnoosá, tedy $+\overline{ov}^2$ potence involuce na ose Y. K vykonání konstrukce paprsků ap ... není třeba; poloměry kružnic K, L jsou kolmice spuštěné s bodův a, b na osu X.

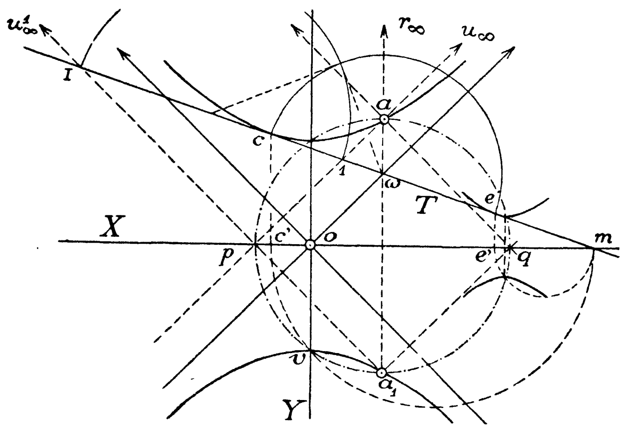
9. *Hyperbola rovnoosá daná dvěma tečnami T, U a jednou osou X* (obr. 7.). Další dvě tečny T_1, U_1 jsou souměrny



Obr. 7.

k T, U podle X. Tyto čtyři tečny určují osnovu kuželoseček Ω, z nichž tři degenerují: jedna v body $(TU) \equiv r$ a $(T_1 U_1) \equiv s$, druhá v body $(TU_1) \equiv m$, $(T_1 U) \equiv n$, třetí v body (TT_1), (UU_1). Kuželosečky osnovy Ω (*G. P.* II., str. 2., odst. 103. v pravo) promítají se z úběžného bodu hyperboly u_∞ involuční osnovou paprskovou, specielně (mn), (rs) paprsky M, N; R, S, jež svírají s osou X úhel $\alpha = 45^0$. Samodružné paprsky A, C této involuce (konstrukce v obr. 7. provedena pronikem 11, 22 s libovolnou přímkou) dají další tečny, tedy *asymptoty* dvou hyperbol úloze hovících. Průsečík $(AX) \equiv o$ dá střed hyperboly jedné, $oB \perp A$ asymptotu druhou, $\overline{ov} = \sqrt{\overline{op} \,.\, \overline{oq}}$ (ježto p, q jsou dle věty 6. sdružené póly), $\overline{ow} = -\overline{ov}$ vrcholy hlavní osy v, w. Obdobně sestrojíme z asymptoty C hyperbolu druhou. Aby úloha byla možná, musí dané tečny T, U býti odchýleny od osy X buď obě o úhel $\alpha > 45^0$ (pak je X osou hlavní), anebo obě o úhel $\beta < 45^0$ (X osa vedlejší); úloha je nemožná, svírá-li daná osa X s jednou tečnou úhel $< 45^0$ a s tečnou druhou úhel $> 45^0$.

10. *Hyperbola rovnoosá daná jedním bodem a, jednou tečnou T a jednou osou X* (obr. 8.). Úběžné body hyperboly u_∞, u^1_∞, bod a, a k němu souměrný podle X bod a_1 určují svazek hyperbol Σ, z nichž tři jsou degenerované: jedna skládá se z přímek $\overline{au_\infty}$, $\overline{a_1u_\infty}$, druhá z přímek $\overline{au^1_\infty}$, $\overline{a_1u^1_\infty}$ (tyto čtyři paprsky vedeme body a, a_1 tak, aby svíraly s osou X



Obr. 8.

úhly $= 45^0$), třetí z přímek $\overline{aa_1}$, $\overline{u_\infty u^1_\infty}$ (v nekonečnu), a protější strany úplného čtyřúhelníka $aa_1u_\infty u^1_\infty$ protínají se ve vrcholech p, q, r_∞ (v nekonečnu na $\overline{aa_1}$) polárného trojúhelníka. Tyto zvrhlé hyperboly protínají tečnu T v involuci bodové, jejíž střed je v bodě $(T, \overline{aa_1}) \equiv \omega$, protože strana $\overline{u_\infty u^1_\infty}$ je úběžná, a jedna družina 1I (průsečíky tečny T se stranami $\overline{au_\infty}$, $\overline{a_1u^1_\infty}$). Učiníme-li tedy

$$\overline{\omega c} = -\overline{\omega e} = \sqrt{\overline{\omega 1} \,.\, \overline{\omega \mathrm{I}}},$$

budou samodružné body c, e ony, v nichž dotýkají se tečny T dvě hyperboly podmínkám hovící. Body $m \equiv (TX)$, c' ($\overline{cc'} \perp X$) dají družinu involuce, již hyperbola indukuje na ose X, a p, q je družina další; střed této involuce o (kružnice nad průměry $\overline{mc'}$, $\overline{pq}$ protnou se v bodě v, $\overline{vo} \perp X$) je středem jedné hyperboly žádané. Involuce $o, \overline{pq}$ jest elliptická, tedy X osa vedlejší; potence involuce $= - ov^2$, a hyperbola je rovnoosá, tedy bod v vrcholem jejím. Tím hyperbola jedna jest určena s dostatek; druhá sestrojí se obdobně z dotyčného bodu e na tečně T.

Aby tyto hyperboly byly reálny, musí býti tyto podmínky splněny: 1. Svírá-li tečna T s danou osou X úhel $\alpha < 45^0$, a je-li T_1 tečna souměrná k T podle X, musí bod a býti dán vnitř jednoho z *tupých* úhlů, jež přímky T, X spolu tvoří; osa X je *vedlejší* osou hyperboly; 2. je-li však úhel $\alpha > 45^0$, musí bod a ležeti vnitř jednoho z *ostrých* úhlů TX; X jest pak *hlavní* osou hyperboly. —

Dodatek: Všecky tyto úlohy lze řešiti způsobem obdobným, dán-li místo osy X jeden *průměr* R kuželosečky a směr Q průměru sdruženého; tím je stanovena *klinogonálná* symmetrie kuželosečky podle R. Samodružné body involuce na R nejsou ovšem vrcholy křivky, nýbrž toliko krajní body průměru R; tečny v těchto bodech jsou $\| Q$. Při hyperbole rovnoosé jsou tím dány i směry asymptot, ježto půlí odchylky směrů R, Q; a tím jsou stanoveny i směry obou os. (Dokončení.)

Řešení lineárních rovnic vektorových o jedné neznámé.

Napsal vl. rada **Ant. Libický**.

Rovnici nazýváme *vektorovou*, je-li v ní neznámou vektor*). Známé veličiny, které se v takové rovnici vyskytují, jsou buď vektory nebo skaláry.

Rovnice vektorová, jejíž každý člen chová jen jeden neznámý činitel, jest *lineární*.

Rozeznáváme *rovnice skalární* nebo *vektorové v užším smyslu* dle toho, jsou-li všechny členy její buď skaláry nebo vektory. Soustavy takových rovnic mohou býti též *smíšené*, jsou-li některé rovnice skalární, jiné vektorové.**)

---

*) Viz moji „*Vektorovou analysis*«, str. 2.; cituji-li tento spis v dalším, užívám proň zkratky *V. A.* Podotýkám, že označuji vektory, jejich součiny a j. týmž způsobem, jako v tomto spise.

**) Obmezuji se v tomto článku na rovnice, v nichž se vyskytují jen součiny skalární neb vektoriální.