Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek

Tři úlohy o ellipse

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 1, 49--54

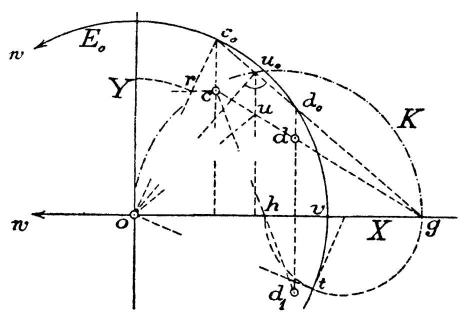
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124000

Tři úlohy o ellipse.

Podal Dr. **V. Jarolímek.**

1. Sestrojiti ellipsu z daných os a dvou bodů.

Řešení 1. methodou synthetickou. Buďtež $X \perp Y$ osy, c, d dané body ellipsy E (obr. 1.). Tato bude affinně sdružena s kružnicí E_0, jejíž průměrem jest osa ellipsy ležící v X. Spojnice $\overline{cd}$ protne X v bodě g, jímž procházeti bude i přímka $\overline{c_0 d_0}$ affinní ku $\overline{cd}$. Přímka $\overline{ou_0} \perp \overline{c_0 d_0}$ půliti bude tětivu $\overline{c_0 d_0}$ v kružnici E_0 Učiňme tedy $\overline{cu} = \overline{ud}$, nad průměrem $\overline{og}$ opišme kružnici K a



Obr. 1.

protněme ji kolmicí spuštěnou s bodu u na X v bodě u_0, spojme $\overline{gu_0}$ a na této přímce stanovme body c_0, d_0 affinní ku c, d kolmicemi $\overline{cc_0} \perp X$, $\overline{dd_0} \perp X$. Kružnice E_0 opsaná poloměrem $\overline{oc_0}$ protne X ve vrcholech v, w žádané ellipsy E. Přímka $\overline{cr} \parallel X$ protne $\overline{oc_0}$ v bodě r, načež $\overline{or}$ dá délku poloosy druhé. Neprotne-li K přímku $\overline{uu_0} \perp X$ (na př. jsou-li body c, d v 1. kvadrantu a svírá-li spojnice $\overline{cd}$ se směrem $+X$ úhel ostrý), jest ellipsa nemožná.

Řešení 2. methodou analytickou. Buďtež souřadnice daných bodů c $(x_1 y_1)$, d $(x_2 y_2)$. Rovnice přímky $\overline{cd}$ jest

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1). \tag{1}$$

Stanovme bod d_1 $(x_2, -y_2)$ souměrný ku d podle X a spojme $\overline{cd_1}$ (obr. 1.); tato přímka má rovnici

$$y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1). \tag{2}$$

Dosazením $y = o$, $x = x'$ do rovnice (1) dostaneme pro úsečku $x' = \overline{og}$ hodnotu

$$x' = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2} \tag{3}$$

a substitucí $y = o$, $x = x''$ do rovnice (2) úsečku $x'' = \overline{oh}$ průsečíka $(\overline{cd_1}, X)$

$$x'' = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{y_1 + y_2}. \tag{4}$$

Součin rovnic (3) a (4) dá

$$x' \,.\, x'' = \frac{x_2^2 y_1^2 - x_1^2 y_2^2}{y_1^2 - y_2^2}. \tag{5}$$

Body c, d leží na ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. Dosadíme-li do této rovnice souřadnice jednou $(x_1 y_1)$, podruhé $(x_2 y_2)$, vyjádříme-li z nabytých rovnic úsečky pořadnicemi a dosadíme-li tyto hodnoty do pravé strany rovnice (5), vyjde po redukci

$$x' \,.\, x'' = \overline{og} \,.\, \overline{oh} = a^2. \tag{6}$$

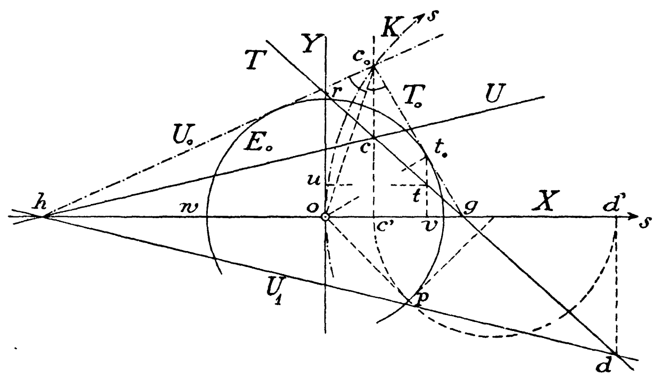
Je tedy poloosa a střední geom. úměrnou mezi úsečkami $\overline{og}$, $\overline{oh}$. Proložíme-li body g, h libovolnou kružnici, dá tečna $\overline{ot}$ k ní vedená z bodu o délku poloosy a; $\overline{ov} = \overline{ot}$. — Body v, w, g, h tvoří čtveřinu harmonickou.

Předností řešení 1. jest jednoduché odůvodnění; řešení 2. podává zase výhodnější konstrukci.

2. Sestrojiti ellipsu z daných os a dvou tečen.

Řešení 1. methodou synthetickou. Dané tečny T, U protínají osu X v bodech g, h (obr. 2.). Budiž zase E_0 kružnice (zatím neznámá) affinní s žádanou ellipsou E podle osy X. Tečny

T_0, U_0 kružnice E_0 affinní k T, U budou se protínati v bodě c_0, affinním k $(TU) \equiv c$, a $\overline{c_0 c} \perp X$. Bod c_0 stanovíme takto: Ježto spojnice $\overline{c_0 o}$ rozpolovati bude úhel gc_0h, bude v $\triangle gc_0h$ dle věty známé z planimetrie $\overline{c_0 g} : \overline{c_0 h} = \overline{og} : \overline{oh}$. Geometrické místo vrcholu c_0 trojúhelníka nad pevnou základnou $\overline{hg}$, jehož strany $\overline{c_0 g}$, $\overline{c_0 h}$ jsou k sobě v poměru stálém $\overline{og} : \overline{oh}$, jest, jak známo, kružnice K, jejíž střed je na $\overline{hg} \equiv X$, jeden bod jest o; protější k němu bod s na X sestrojíme tak, aby $\overline{gs} : \overline{os} = \overline{og} : \overline{ho}$ (čili čtvrtý harmonický bod s k bodům hgo), a nad průměrem $\overline{os}$ opíšeme kružnici K. Tato protne přímku $\overline{cc'} \perp X$ v bodě c_0, načež spojnice $\overline{gc_0} \equiv T_0$, $\overline{hc_0} \equiv U_0$, a kružnice E_0 o středu o



Obr. 2.

a tečná ku T_0 protne X ve vrcholech v, w žádané ellipsy E. Z dotyčného bodu t_0 na T_0 dostaneme kolmicí $\overline{t_0 t} \perp X$ dotyčný bod t na T, spustíme $\overline{tu} \perp Y$ a sestrojíme délku druhé poloosy b dle rovnice $b^2 = \overline{ou} \cdot \overline{or}$, což plyne přímo z rovnice tečny (7) pro $x = o$ (nebo také z affinity ellipsy E s kružnicí o poloměru b).

Řešení 2. methodou analytickou. Rovnice tečny T jest

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2 \tag{7}$$

a rovnice tečny U

$$b^2 x_2 x + a^2 y_2 y = a^2 b^2, \tag{8}$$

kdež t $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ jsou souřadnice bodů dotyčných, dosud ovšem neznámé. Úsečku společného průsečíka c $(x'y')$ tečen T, U dostaneme řešením rovnic (7) a (8) dle x:

$$\overline{oc'} = x' = \frac{a^2 (y_2 - y_1)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}. \tag{9}$$

Stanovme tečnu U_1 souměrnou k U podle X; její rovnice jest

$$b^2 x_2 x - a^2 y_2 y = a^2 b^2, \tag{10}$$

ježto souřadnice dotyčného bodu na U_1 jsou $(x_2, -y_2)$.

Úsečka průsečíka $d \equiv (TU_1)$ plyne z rovnic (7) a (10):

$$\overline{od'} = x'' = \frac{a^2 (y_2 + y_1)}{x_1 y_2 + x_2 y_1}. \tag{11}$$

načež součin rovnic (9) a (11) dá

$$x' . x'' = \frac{a^4 (y_2^2 - y_1^2)}{x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2}. \tag{12}$$

Vyjádříme-li y_1, y_2 dotyčných bodův úsečkami x_1, x_2 z rovnice ellipsy, dostaneme dosazením do rovnice (12) po redukci

$$x' . x'' = \overline{oc'} . \overline{od'} = a^2. \tag{13}$$

Je tedy poloosa a zase střední geom. úměrnou mezi úsečkami $\overline{oc'}$, $\overline{od'}$. Proložme body c', d' libovolnou kružnici a veďme k ní středem o tečnu $\overline{op} = a$, učiňme $\overline{ov} = -\overline{ow} = \overline{op}$; v, w jsou vrcholy ellipsy. $\overline{ot_0} \perp T_0$ dá dotyčný bod t_0 na tečně T_0, $\overline{t_0 t} \perp X$ dotyčný bod t na T. Spusťme $\overline{tu} \perp Y$; poloosu druhou b sestrojíme podle rovnice $b^2 = \overline{ou} . \overline{or}$, která plyne přímo z rovnice tečny T pro $x = o$. — Body $vwc'd'$ tvoří čtveřinu harmonickou.

3. Sestrojiti ellipsu z daných os a dvou normál.

Rovnici normály N_1 v bodě $(x_1 y_1)$ ellipsy

$$E \equiv b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = o$$

lze uvésti na tvar

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = e^2 x_1 y_1, \tag{14}$$

kdež $e^2 = a^2 - b^2$. Úseky normály N_1 na osách ellipsy mají podle rovnice (14) hodnoty

$$m_1 = \frac{e^2 x_1}{a^2} \tag{15}$$

na ose X, a

$$n_1 = -\frac{e^2 y_1}{b^2} \tag{16}$$

na ose Y. Vyjádříme-li z těchto rovnic x_1, y_1 a dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice ellipsy, dostaneme rovnici

$$\frac{m_1^2}{\frac{e^4}{a^2}} + \frac{n_1^2}{\frac{e^4}{b^2}} = 1. \tag{17}$$

Pohybuje-li se bod $(x_1 y_1)$ po ellipse E a s ním jeho normála N_1, vyjadřuje rovnice (17) jinou ellipsu F (obr. 3.), jejíž body c mají za souřadnice $(m_1 n_1)$ úseky normály N_1 na osách: poloosy ellipsy F jsou

$$\alpha = \frac{e^2}{a}, \tag{18}$$

$$\beta = \frac{e^2}{b}, \tag{19}$$

takže

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{b}{a}, \tag{20}$$

t. j. osy obou ellips jsou úměrny, avšak α je malá, β velká poloosa ellipsy F. Z toho plyne:

Úseky, jež utínají normály každé ellipsy E na osách, rovnají se souřadnicím bodů, které vyplňují jinou pevnou ellipsu F; obě ellipsy jsou si podobné a souosé, ale tak, že vedlejší osa každé ellipsy leží v hlavní ose ellipsy druhé.

Podle této úvahy přistupme k řešení úlohy 3. Jsou-li (m_1, n_1), $(m_2 n_2)$ úseky daných dvou normál N_1, N_2 na osách (obr. 3.), stanovme bod c_1, jehož souřadnice jsou m_1, n_1 (nebo $-n_1$), bod c_2 $(m_2 n_2)$, a sestrojme podle úlohy 1. poloosy $or = \alpha$, $os = \beta$ ellipsy F, která je dána osami X, Y a body c_1, c_2 (ellipsy F rýsovati netřeba). Poloosy žádané ellipsy $E \backsim F$ obdržíme pak takto: Položme $e^2 = a^2 - b^2$ do rovnic (18) a (19), načež řešením jich obdržíme:

$$a = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} = \frac{\alpha\beta^2}{\varepsilon^2}, \tag{21}$$

$$b = \frac{\alpha^2\beta}{\beta^2 - \alpha^2} = \frac{\alpha^2\beta}{\varepsilon^2}, \tag{22}$$

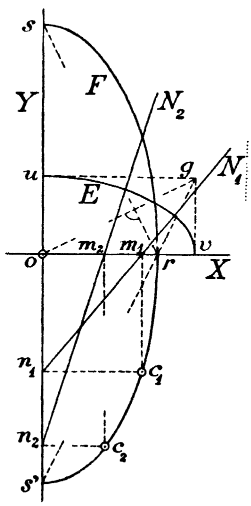
kdež ε je lineárná výstřednost ellipsy F. Posléze konstrukce poloos $a = \overline{ov}$, $b = \overline{ou}$ podle úměr

$$a : \alpha = \beta^2 : \varepsilon^2, \tag{23}$$

$$b : \beta = \alpha^2 : \varepsilon^2, \tag{24}$$

plynoucích z rovnic (21) a (22) je z planimetrie známa s dostatek. Ostatně poloosa b sestrojí se krátce podle rovnice (20) skytající úměru

$$b : a = \alpha : \beta. \tag{25}$$



Obr. 3.

Následující úvaha vede ke konstrukci ještě výhodnější. Vrcholy r, s' ellipsy F jsou totožny se středy křivosti ellipsy E pro její vrcholy v, u, ježto podle rovnic (18) a (19)

$$\overline{rv} = a - \alpha = \frac{b^2}{a}, \tag{26}$$

$$\overline{s'u} = \beta + b = \frac{a^2}{b}. \tag{27}$$

Z toho jde tato jednoduchá konstrukce vrcholův ellipsy E, jsou-li vrcholy r, s, s' ellipsy F sestrojeny: spojme $\overline{sr}$, $\overline{s'r}$, spusťme $\overline{og} \perp \overline{sr}$ a průsečíkem g přímek $\overline{og}$, $\overline{s'r}$ veďme $\overline{gv} \perp X$, $\overline{gu} \perp Y$; v, u jsou vrcholy ellipsy E. Snadno lze se přesvědčiti, že touto konstrukcí jest rovnicím (26), (27), i rovnicím (21) a (22) vyhověno.