Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Granát

Grafické stanovení průsečíků a společných tečen dvou soustředných kuželoseček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 1, 55--60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123996

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1918

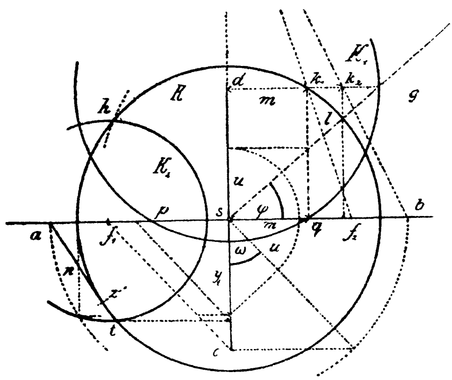
Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Grafické stanovení průsečíků a společných tečen dvou soustředných kuželoseček.

Žákům středních škol podává **Fr. Granát**, prof. v Kostelci n. Orl.

Stanovení průsečíků dvou kuželoseček cestou *analytickou* vyžaduje řešení dvou obecných rovnic kvadratických. Úloha se redukuje na řešení jednodušších tvarů rovnic kvadratických, jsou-li osy kuželoseček v jedné přímce (ose X neb Y) a konečně je velmi jednoduchá cesta k vyšetření průsečíků kuželo-



Obr. 1.

seček se soustřednou kružnicí. Výrazy, které dává analytická geometrie, dají se snadno graficky konstruovati a tak lze úlohy tyto řešiti užitím kružidla a pravítka.

O soustředné kružnici s ellipsou platí:

Opíšeme-li z vrcholu poloosy vedlejší kružnici poloměrem $r > b$ (neboť jen v tom případě jsou průsečíky reálné), má tato kružnice s hlavní osou společné dva body, z nichž každým se dělí hlavní osa na dvě části, které jsou zároveň průvodiči koncových bodů průměrů ellipsy, rovných průměru kružnice dané t. j. průvodiči hledaných průsečíků.

Budiž dána ellipsa $E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a s ní soustředná kružnice $K \equiv x^2 + y^2 = r^2$, kde $r > b$. (Obr. 1.)

$K_1 \equiv x^2 + (y - b)^2 = r^2$ pro body p, q platí, $y = 0$, tedy

$$x^2 + b^2 = r^2 \quad \text{a} \quad x^2 = r^2 - b^2,$$

tedy

$$\overline{ap} = a - \sqrt{r^2 - b^2}.$$

Opíšeme-li poloměrem $\overline{ap}$ kružnici K_2 z ohniska f_1 nebo f_2, je bod průsečný její s kružnicí danou K, průsečíkem této kružnice K s danou ellipsou.

$$K_2 \equiv (x \pm e)^2 + y^2 = \overline{ap}^2,$$

$$K_2 \equiv (x \pm e)^2 + y^2 = (a - \sqrt{r^2 - b^2})^2, \qquad (1)$$

$$K \equiv x^2 + y^2 = r^2. \qquad (2)$$

Řešíme-li dvě poslední rovnice tím, že ze druhé

$$y^2 = r^2 - x^2$$

dosadíme do (1), bude

$$(x \pm e)^2 + r^2 - x^2 = (a - \sqrt{r^2 - b^2})^2,$$

provedeme-li, bude

$$x = \pm \frac{a}{e} \sqrt{r^2 - b^2}$$

a dosazením do (2)

$$y = \pm \frac{b}{e} \sqrt{a^2 - r^2},$$

kteréžto hodnoty získáme také, řešíme-li přímo rovnici

$$E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

a dané kružnice

$$K \equiv x^2 + y^2 = r^2 \ldots y^2 = r^2 - x^2$$

a tedy

$$b^2x^2 + a^2(r^2 - x^2) = a^2b^2$$

upravením

$$x^2(a^2 - b^2) = a^2(r^2 - b^2)$$

čili

$$x^2 = \frac{a^2(r^2 - b^2)}{a^2 - b^2},$$

ale pro ellipsu je $a^2 - b^2 = e^2$, tedy

$$x = \pm \frac{a}{e} \sqrt{r^2 - b^2},$$

čili výraz shodný s výrazem prve vypočteným a tím v předu vyslovená platnost dokázána. Dají se tedy průsečíky kružnice soustředné s ellipsou velmi jednoduše a přesně stanoviti.

Určíme bod p, tím jsou dány průvodiče hledaných průsečíků, které dle souměrnosti obou křivek dle obou os, musí býti také dle obou os souměrné

$$(\overline{ap} = \overline{f_1 h},\ \overline{pb} = \overline{f_2 h}).$$

Rovněž tak i výrazy pro

$$x = \pm \frac{a}{e} \sqrt{r^2 - b^2} \quad \text{a} \quad y = \pm \frac{b}{e} \sqrt{a^2 - r^2}$$

můžeme snadno sestrojiti; budiž

$$x = \frac{a}{e} \sqrt{(r + b)(r - b)} = \frac{a}{e} m$$

a tedy

$$x \cdot e = a \cdot m \quad \text{t. j.} \quad e : a = m : x.$$

Sestrojení:

$$\overline{sf_2} = e,\ \overline{sb} = a,\ \overline{dk_1} = m,\ \overline{dk_2} = x;$$

bodem $k_2 \perp \overline{ab}$ ta protne K v hledaném průsečíku l. Podobně chceme-li

$$y = \frac{b}{e} \sqrt{(a + r)(a - r)} = \frac{b}{e} n$$

a tedy

$$e \cdot y = b \cdot n \quad \text{t. j.} \quad e : b = n : y$$

a nebo určíme směrnici k průměru procházejícího oněmi průsečíky; bude z posledních výrazů (3)

$$\frac{y}{x} = k = \frac{bn}{am},$$

$$\text{ale} \quad \frac{b}{a} = \cos \omega \quad \text{tedy} \quad k = \frac{\cos \omega \cdot n}{m} = \frac{u}{m};$$

$$m = \overline{sp} = \overline{sq} = \sqrt{r^2 - b^2},\ n = \overline{az}$$

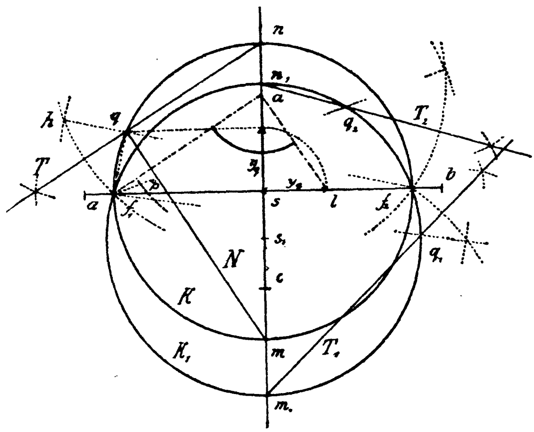
jest délka tečny z bodu a ku K.

Prochází-li soustředná kružnice ohnisky, potom je $r = e$, musí tedy pro reálné průsečíky býti $e > b$ potom

$$x = \frac{a}{e} \sqrt{e^2 - b^2};\ y = \frac{b}{e} \sqrt{a^2 - e^2} = \frac{b}{e} \cdot \sqrt{b^2} = \frac{b^2}{e},$$

tedy b je střední geometrickou úměrnou mezi e a hledaným y, dá se tedy velmi jednoduše nalézti. (Obr. 2.) Spojíme $\overline{f_1 d}$ a sestrojíme $\overline{dl} \perp f_1 d$ potom $\overline{sl} = y_q$.

Úlohu tuto možno ještě konstruktivně jinak jednoduše provésti, uvědomíme-li si známou vlastnost, že kružnice opsaná trojúhelníku omezenému tečnou, normálou a vedlejší osou prochází ohniskem. Stačí potom z bodu m nebo n, ve kterém kružnice daná protíná vedlejší osu, vésti tečny k ellipse a dotyčné body jsou hledané průsečíky. *Takto lze sestrojiti průsečíky každé kružnice mající střed na vedlejší ose a procházející ohnisky.* Důkaz věty vyslovené je velmi jednoduchý. Ukážeme,



Obr. 2.

že přímka N je skutečne normálou, t. j. že půlí vnitřní úhel průvodičů a T je k ní kolmo, neboť spojuje bod kružnice s druhým koncovým bodem průměru.

$$\sphericalangle f_1 q m = \sphericalangle m q f_2,$$

neboť jsou to obvodové úhly nad stejnými oblouky. Je tudíž N pro bod q normálou, neboť půlí $\sphericalangle f_1 q f_2$ a tím je předpokládaná poučka dokázána.

Je-li poloměr r geometrickým průměrem obou poloos, je konstrukce průsečného bodu soustředné kružnice dána průsečíkem spojnice $\overline{gs}$ s danou kružnicí. (Obr. 1.)

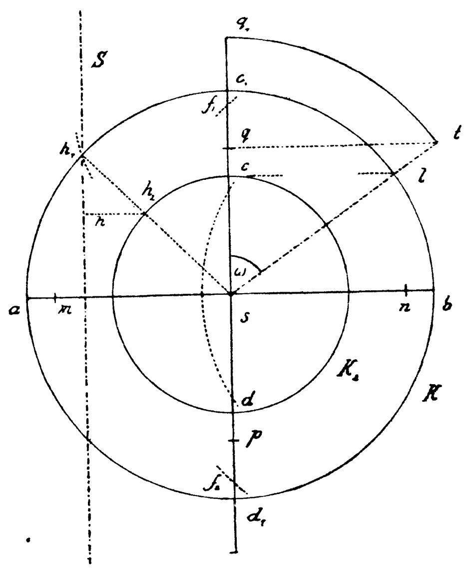
$$\overline{gd} \perp \overline{sd};\ \overline{gd} = r.$$

Z rovnice (3) plyne

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1}{x_1} = \frac{bn}{am} = \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}{a\sqrt{r^2 - b^2}}$$

pro $r = \sqrt{a \cdot b}$ bude

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - ab}{ab - b^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$



Obr. 3.

ale $a = \frac{r^2}{b}$, tedy

$$\operatorname{tg} \varphi = k = \sqrt{\frac{\frac{b}{r^2}}{b}} = \sqrt{\frac{b^2}{r^2}} = \frac{b}{r},$$

čímž horní konstrukce odůvodněna.

Jsou-li dány dvě soustředné ellipsy, převedeme jednu z nich užitím orthogonálné affinity na kružnici a ovšem druhou musíme o týž úhel v prostoru otočiti, tato pak přejde v ellipsu jinou, jejíž osy jsou závislé na oné odchylce. Obr. 3. úlohu objasní. Jsou dány ellipsy osami $E(\overline{ab}, \overline{cd})$, $E_1(\overline{mn}, \overline{pq})$. Ellipsu E převeďme affinitou do soustavy kružnice K tím, že rovinu její otočíme o úhel ω, jehož

$$\cos\omega = \frac{b}{a}.$$

O týž úhel otočíme ellipsu E_1, t. j. E_1 pokládáme za orthogonálný průmět ellipsy $\overline{mn}$, $\overline{p_1q_1}$ ležící v rovině odchýlené od roviny E_1 o úhel ω, t. j. poloosa $\overline{sq}$ zvětší se na

$$\overline{st} = \frac{\overline{sq}}{\cos\omega} = \overline{sq_1},$$

tím máme novou ellipsu $E_2(\overline{mn}, \overline{p_1q_1})$, jejíž průsečíky se soustřednou kružnicí K sestrojíme, jak bylo nahoře nejjednodušeji ukázáno. Tím dostaneme sečnu S, jejíž rovina kolmá k rovině nákresny je rovinou otáčení pro hledané body. Stačí tedy stanoviti některým jednoduchým způsobem průsečíky S s ellipsou E neb E_1 ($\overline{h_1s}$ seče K_2 v h_2, $\overline{h_2h} \perp \overline{sc}$) a dostaneme hledané body h ... (Dokončení.)

Vztah mezi půdorysnou odchylkou α a nárysnou β přímky P s průměty α_2, β_1 a odchylkou $(P_1 P_2)$.

Studujícím podává **Václav Hübner**, školní rada na Král. Vinohradech.

Na přímce P, procházející body $o\,(0, 0, 0)$, $a\,(x, y, z)$, budiž úsečka $\overline{oa} = d\,(\overline{oa_1} = d_1, \overline{oa_2} = d_2)$; úhly $\sphericalangle(PP_1) = \sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle(PP_2) = \sphericalangle\beta$, $\sphericalangle(P_1P_1) = \sphericalangle\alpha_1 = 0$, $\sphericalangle(P_2x) = \sphericalangle\alpha_2$, $\sphericalangle(P_1x) = \sphericalangle\beta$, $\sphericalangle(P_2P_2) = \beta_2 = 0$.

Jak z obrazce patrno, jest

$$y = d_1 \sin\beta_1 = d\cos\alpha\sin\beta_1$$
$$z = d_2 \sin\alpha_2 = d\cos\beta\sin\alpha_2;$$

a ježto

$$y = d\sin\beta, \quad z = d\sin\alpha,$$

jest též

$$\sin\beta = \cos\alpha\sin\beta_1 \quad \text{a} \quad \sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha_2,$$

tudíž

$$\sin\alpha_2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\ldots \qquad (1)$$

$$\sin\beta_1 = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\ldots \qquad (2)$$