Matěj Pelnář

Kterak pohybuje se rovina kyvů při pokuse Foucaultově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 3, 241--259

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123976

Kterak pohybuje se rovina kyvů při pokuse Foucaultově.

Napsal

Matěj Pelnář,

professor c. k. reál. a vyššího gymnasia v Příbrami.

Roku 1851 dovodil Foucault svým pokusem kyvadlovým, že se země kol své osy otáčí. Od té doby nejen opakován byl pokus na různých místech, ale vznikla i celá řada pojednání, jež hlavně k tomu se nesla, aby způsobem pokud možná elementárním a přece přesným dovozen byl vzorec

$$\alpha = t\omega \sin \varphi,$$

jímž vyjadřuje se tak zvaná odchylka Foucaultova α, úhel totiž, o který zdánlivě otočí se rovina kyvů kol přímky svislé bodem závěsným za čas t, při čemž značí ω úhlovou rychlost, kterouž otáčí se země kol své osy, φ pak zeměpisnou šířku místa pokusného.

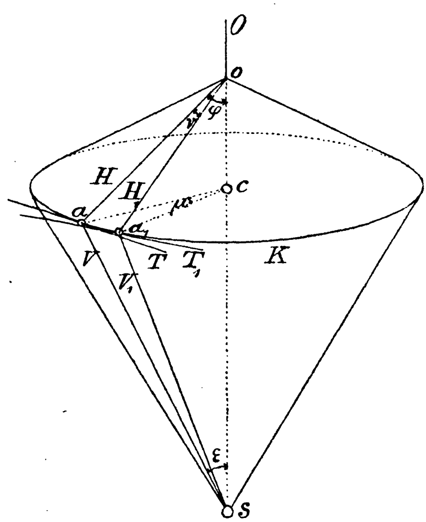
K těmto pojednáním přiřaděno budiž i toto, v němž však probrán buď ne méně zajímavý úkol další, kterak totiž pohybuje se rovina kyvů hledíc k ose zemské. Ježto totiž směr osy zemské při pokuse pokládati můžeme za nepromĕnný v prostoře světovém, bude lze zajisté povahu pohybu roviny kyvů nejlépe vystihnouti, jestliže jej vztahovati budeme k tomuto směru pevnému.

1. **Dovození odchylky Foucaultovy.**

Není příčiny, aby se rovina kyvů točila kol přímky svislé bodem závěsným. Nám však jeví se, že se otáčí kol ní rychlostí $\omega' = \omega \sin \varphi$. I soudíme, že zdánlivě nehybná rovina meridiánu, která toutéž svislou prochází, kol ní se otáčí touž rychlostí, ale smyslem opačným, což odůvodníme větou kinematickou touto:

Otáčí-li se $\sphericalangle(O, V) = \varepsilon$ (obr. 1.) kol pevného svého ramene O úhlovou rychlostí ω, otáčí se rovina jeho M týmž smyslem kol druhého ramene V úhlovou rychlostí $\omega' = \omega \cos \varepsilon$.

Důkaz: Mysleme si přímkou V rovinu T $\perp$ M, totiž tak, že vztyčíme přímku $T \perp$ M v některém bodě a přímky V, a tedy $(V, T) \equiv$ T $\perp$ M. Dokážeme-li, že tato rovina T otáčí se kol V rychlostí ω', bude tím dokázáno, že i rovina M otáčí se



Obr. 1.

kol V touž rychlostí. Spusťme $ac \perp O$, a vztyčme v rovině M přímku $H \perp V$, až protne O v bodě o. Patrno, že $H \perp$ T. Položme ještě krátce $\sphericalangle(H, O) = \varphi$. Patrno, že $\varphi = 90^0 - \varepsilon$. Otáčí-li se nyní $\sphericalangle(O, V)$ i se všemi útvary zde vytčenými kol O jakožto osy, vytvořuje rovina M svazek rovin, jehož osa jest O; úsečka $\overline{ac}$ kruh K $\perp O$; bod a kružnici K, jež kruh K omezuje; rameno V oblinu kuželovou rotační V, jejíž přímky mají od osy O odchylku ε; rovina T otáčejíc se obaluje svými polohami tuto oblinu V stále se jí dotýkajíc v těchto polohách podél téže své přímky V, při čemž patrně kol této přímky stále se otáčí týmž smyslem, kterým se otáčí rovina M kol O; přímka $H \perp$ T opisuje rotační kuželovou oblinu H $\perp$ V, jejíž přímky svírají s osou O úhel φ.

V nekonečně krátké době τ přechází bod a do soumezné polohy a_1. Těmto dvěma soumezným polohám bodu a příslušny jsou soumezné polohy i ostatních útvarů, totiž: poloměrů $\overline{ac}$, $\overline{a_1 c}$, jež svírají nekonečně malý úhel středový μ kruhu K, kterýžto úhel jest zároveň měrou úhlu soumezných poloh M, M_1 roviny M; soumezné polohy V, V_1 přímek obliny V a podél těchto soumezné polohy $\text{T} \equiv (V, T)$, $\text{T}_1 \equiv (V_1, T_1)$ rovin tečných k oblině V, jež svírají nekonečně malý $\sphericalangle \zeta$, jímž vyjadřuje se, oč otočila se rovina T a tedy i kolmá na ní rovina M kol V v nekonečně krátké době τ; dále soumezné polohy H, H_1 přímek kuželové plochy H, jež svírají nekonečně malý úhel ν. A poněvadž jest $H \perp \text{T}$, $H_1 \perp \text{T}_1$, jest $\sphericalangle (\text{T}, \text{T}_1) = \sphericalangle (H, H_1)$ čili $\sphericalangle \zeta = \sphericalangle \nu$, neboť úhel dvou rovin měří se úhlem dvou přímek s některého bodu v prostoru na tyto roviny kolmo spuštěných, a právě v tom vězí podstata důkazu zde vedeného; jest totiž úhlová rychlost roviny T a tudíž i roviny M kol V dána úhlovou rychlostí, kterou přímka $H \perp$ T vytvořuje oblinu H.

Úhlová rychlost, kterou se některý paprsek kol svého počátku otáčí, vyjadřuje se poměrem nekonečně malého úhlu ku nekonečně krátké době τ, ve které úhel ten se vytvoří. Dle podmínky jest otáčivá rychlost poloměru $\overline{ac}$ kol osy O rovna ω, a proto

$$\omega = \frac{\mu}{\tau};$$

podobně jest otáčivá rychlost přímky H kol bodu o po oblině H

$$\omega' = \frac{\nu}{\tau};$$

proto jest

$$\omega' : \omega = \nu : \mu,$$

a tedy

$$\omega' = \omega \cdot \frac{\nu}{\mu}.$$

A poněvadž jednak

$$\overline{aa_1} = \overline{ac} \,.\, \mu,$$

jednak

$$\overline{aa_1} = \overline{ao} \,.\, \nu,$$

jest

$$\overline{ao} \,.\, \nu = \overline{ac} \,.\, \mu,$$

a tedy

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ao}} = \sin\varphi = \cos\varepsilon.$$

Dosadíce máme

$$\omega' = \omega \sin\varphi = \omega \cos\varepsilon,$$

jak tvrzeno bylo.

Přímka H vytvořujíc tedy oblinu H otáčí se kol bodu o úhlovou rychlostí $\omega \sin\varphi = \omega \cos\varepsilon$; touž rychlostí otáčí se také kol V rovina T a tudíž i rovina M.

Pomyslíme-li nyní, že by přímkou V stále procházela rovina F a kol ní se neotáčela, odchylovala by se rovina M od F rovnoměrnou rychlostí $\omega \sin\varphi$; a kdyby z počátku rovina F se sjednocovala s rovinou M, odchýlila by se M od F za čas t o úhel

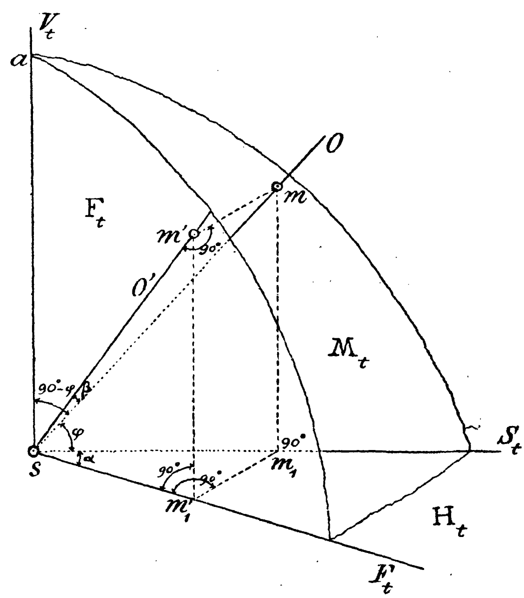
(1) $$\alpha = t\omega \sin\varphi.$$

Důsledek tento lze bezprostředně applikovati na pokus Foucaultův. Třeba jen pomysliti, že vrcholem s $\sphericalangle (O, V) = \varepsilon$ zobrazen jest střed země, pevným ramenem O osa zemská, ramenem V přímka svislá bodem závěsným kyvadla Foucaultova, bodem a na této svislé bod povrchu zemského, jehož šířka zeměpisná $\varphi = 90^0 - \varepsilon$, a tedy kružnicí K kružnice šířková v šířce φ, rovinou $(O, V) \equiv$ M rovina meridiánu bodem závěsným, rovinou T rovina svislá západovýchodní bodem závěsným, přímkou H horizontálný směr jihoseverní; značí-li ještě rovina F rovinu kyvů kyvadla Foucaultova, ω pak úhlovou rychlost otáčení kol osy zemské, můžeme prosloviti větu:

Rozkýváme-li kyvadlo Foucaultovo v rovině meridiánu, odchýlí se rovina tato od roviny kyvů za čas t o úhel $\alpha = t\omega \sin\varphi$.

2. **Kterak pohybuje se rovina kyvů vzhledem k ose zemské.**

Dokázali jsme, že rovina meridiánu přímkou svislou bodem závěsným otáčí se kol této přímky úhlovou rychlostí $\omega \sin \varphi$. Následek toho je, že rovina kyvů, která přímkou svislou stále sice prochází, ale kol ní se netočí, od osy zemské jednak se odchyluje, jednak kol ní také otáčí. Abychom tedy stanovili polohu roviny kyvů za některý čas t vzhledem ku poloze počátečné, totiž k poloze, kdy rovina kyvů se sjednocovala s rovinou meridiánu a tedy také s osou zemskou, třeba vyšetřiti jednak $\sphericalangle \beta$, o nějž se rovina kyvů za čas t od osy zemské odchýlí, jednak $\sphericalangle \gamma$, o nějž se kol této osy otočí.



Obr. 2.

a) Odchylka roviny od přímky dána jest úhlem, který svírá přímka se svým pravoúhlým průmětem do této roviny. Třeba si tedy pomysliti, že promítneme pravoúhle osu zemskou O do roviny kyvů, když zaujímá polohu, jež jí náleží za čas t od počátku pokusu, tedy do roviny, jež prochází přímkou svislou bodem závěsným, a od níž odchýlena jest rovina meridiánu místa pokusného o úhel $\alpha = t\omega \sin\varphi$. Označíme-li průmět ten znakem O', jest $\sphericalangle(O, O') = \beta$ odchylkou roviny kyvů od osy zemské za dobu t. Lehko vyšetříme, že $\sin\beta = \cos\varphi \,.\, \sin\alpha$.

Mysleme si přímkou V_t (obr. 2.) znázorněnu polohu přímky svislé bodem závěsným, kterou zaujme za dobu t od počátku pokusu; bodem s této přímky střed země: pak jest rovinou H_t položenou bodem $s \perp V_t$ znázorněna poloha obzoru geocentrického v témž okamžiku; přímkami S_t, F_t, dle nichž resp. rovina meridiánu M_t a rovina kyvů F_t protínají rovinu H_t, dán jest $\sphericalangle \alpha$ těchto rovin, tedy odchylka Foucaultova v témž okamžiku. Přímkou O bodem s v rovině M_t odchýlenou od S_t o $\sphericalangle \varphi$ dána jest osa zemská. Volme v ní libovolný bod m a spusťme $\overline{mm'} \perp \mathrm{F}_t$; stopou m' jest dán pravoúhlý průmět bodu m do F_t, a tedy jest $sm' \equiv O'$ pravoúhlý průmět osy O do roviny F_t; pročež $\sphericalangle(O, O') \equiv \beta$.

Z pravoúhlého $\triangle\, mm's$ máme

$$\overline{mm'} = \overline{ms} \,.\, \sin\beta.$$

Veďme dále $mm_1 \perp S_t$, $m'm'_1 \perp F_t$; tu jest $\overline{m_1 m'_1} \,\#\, \overline{mm'}$, a proto $m_1 m'_1 \perp F_t$. V pravoúhlém $\triangle\, m_1 s m'_1$ jest

$$\overline{m_1 m'_1} = \overline{m_1 s} \,.\, \sin\alpha,$$

a v pravoúhlém $\triangle\, mm_1 s$

$$\overline{m_1 s} = \overline{ms} \,.\, \cos\varphi,$$

pročež také

$$\overline{m_1 m'_1} = \overline{ms} \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\alpha = \overline{mm'}.$$

Srovnajíce obě hodnoty pro $\overline{mm'}$ nabudeme

$$\sin\beta = \cos\varphi \,.\, \sin\alpha, \tag{2}$$

jakž tvrzeno bylo.

Dosadíme-li za α hodnotu z rovnice (1), máme

$$\sin\beta = \cos\varphi \,.\, \sin(t\omega \sin\varphi) \tag{3}$$

aneb

$$\beta = \arcsin[\cos\varphi \,.\, \sin(t\omega \sin\varphi)], \tag{4}$$

což vyjádřiti lze takto:

Úhel, o který se odchýlí rovina kyvů od osy zemské za čas t od okamžiku, kdy počalo kyvadlo kývati v rovině meridiánu, jest dán arcusem, jehož sinus rovná se cosinusu zeměpisné šířky místa pokusného znásobenému sinusem příslušné odchylky Foucaultovy.

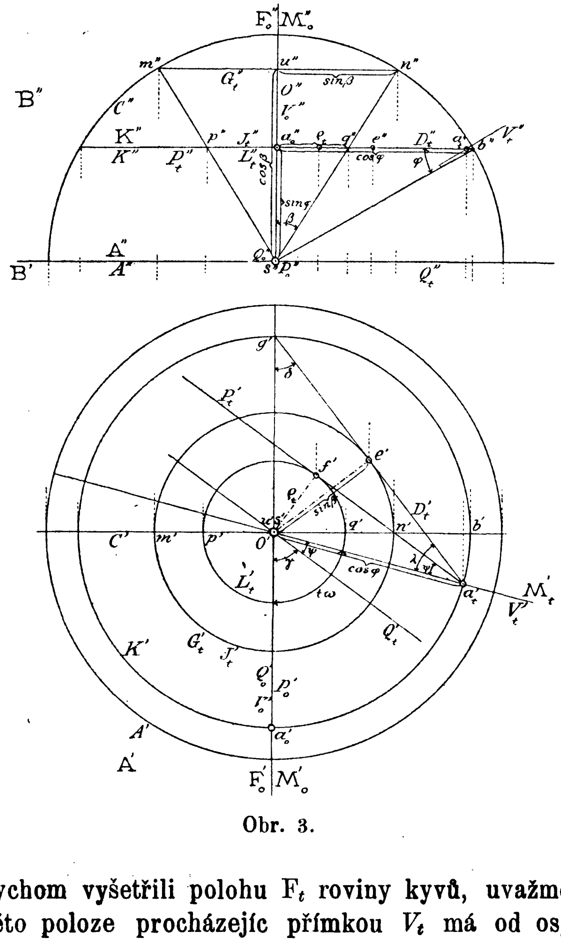
b) Abychom vyšetřili $\sphericalangle \gamma$, o který otočí se rovina kyvů F za čas t kol osy O počítajíc od okamžiku, kdy rovina F se sjednocuje s rovinou meridiánu, uvažujme takto: Otáčí-li se rovina F kol pevné osy O, a pomyslíme-li rovinu A $\perp O$, bude se stopa Q roviny F v rovině A tou měrou kolem osy O otáčeti, kterou se otáčí rovina F kol O, a proto bude $\sphericalangle \gamma$, o který se otočí rovina F kol O, roven úhlu, o který se otočí stopa Q kol O, totiž úhlu, který svírá stopa příslušná poloze počáteční roviny F se stopou příslušnou její poloze po otočení. Proto $\sphericalangle \gamma$ nejsnáze vyšetříme, zobrazíme-li orthogonálné průměty severní polokoule i s útvary příslušnými jednak do roviny rovníkové A jakožto průmětny první, jednak do roviny

$$\mathrm{B} \perp \begin{Bmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{M}_0 \end{Bmatrix},$$

kdež M_0 značí polohu roviny meridiánu na počátku pokusu, kdy totiž $\mathrm{F}_0 \equiv \mathrm{M}_0$, jakožto průmětny druhé; neboť pak bude úhlem stop příslušných poloh roviny F v průmětně A dána pravá velikost otočení.

Kružnicí A' (obr. 3.) budiž zobrazen průmět první, přímkou A'' průmět druhý rovníku A, a tedy body s', s'' průměty středu zemského s; bodem $O' \equiv s'$ průmět první, přímkou O'' průmět druhý osy zemské O; přímkou C' průmět první, polokružnicí C'' průmět druhý obrysové polokružnice C vzhledem ku průmětně druhé; přímkou K'' průmět druhý a kružnicí K' průmět první šířkové kružnice K jdoucí místem pokusným a, jehož šířka jest φ; přímkami $\mathrm{M}'_0 \equiv \mathrm{F}'_0$, pak $\mathrm{M}''_0 \equiv \mathrm{F}''_0$ oba průměty meridiánu M a roviny kyvů F na počátku pokusu; body a'_0, a''_0 průměty místa pokusného na počátku pokusu; přímkou Q'_0 a bodem Q''_0 průmět první a druhý stopy Q_0 roviny F v průmětně A v poloze počáteční. Za čas t dospěje bod a z polohy a_0 do polohy a_t — průmět první a'_t —, přímka svislá V bodem a

z polohy V_0 — průmět první V'_0 — do polohy V_t průmět první V'_t —, rovina meridiánu M z polohy M_0 do polohy M_t — průmět první M'_t — a rovina kyvů F z polohy F_0 do polohy F_t; při tom odchýlí se rovina meridiánu od původní své polohy o $\sphericalangle\, \omega t$, rovina pak kyvů otočí se kol osy zemské o úhel γ.



Obr. 3.

Abychom vyšetřili polohu F_t roviny kyvů, uvažme, že rovina v této poloze procházejíc přímkou V_t má od osy O odchylku β a dotýká se tedy obliny kuželové rotační U, jejíž vrchol jest ve středu země s, a jejíž přímky odchýleny jsou od O o úhel β. Oblina tato protíná povrch zeměkoule v kružnici G_t, jejíž poloměr roven jest $\sin\beta$, béřeme-li poloměr země za jednotku. Přímkou G_t'' jest zobrazen průmět druhý, kružnicí G_t' průmět první kružnice G_t. K našemu účelu nejlépe zobrazíme rovinu F_t tak, že sestrojíme stopu její P_t v rovině K kružnice šířkové K. Stopa tato procházejíc bodem a_t jest tečnou kružnice L_t, dle níž protíná oblina kuželová U rovinu K šířkové kružnice K. Úsečkou $p''q'' \equiv L_t''$ zobrazen jest průmět druhý, kružnicí L_t' průmět první kružnice L_t. Jest tedy tečnou P_t' ke kružnici L_t' bodem a_t' zobrazen první průmět stopy P_t roviny F_t v rovině K, tak že $F_t \equiv (V_t, P_t)$. A poněvadž A || K, jest stopa Q_t roviny F_t v rovině A rovnoběžna se stopou P_t, a tudíž také $Q_t' \parallel P_t'$. Dle výkladu shora podaného jest úhel, o který se otočila rovina kyvů kol osy zemské, když přešla z polohy původní F_0 do polohy F_t, dán úhlem stop těchto poloh v průmětně A, totiž úhlem přímek Q_0, Q_t a tedy i obrazů jejich prvních Q_0', Q_t', tak že tedy

$$\sphericalangle (Q_0', Q_t') = \gamma.$$

Z obr. 3. patrno, že úsečkou $\overline{a_0''q''} = \varrho_t$ dán jest poloměr kružnice L_t' a tedy také kružnice L_t; a ježto $\triangle\, a_0''\, q''\, s'' \sim \triangle\, u''\, n''\, s''$, jest

$$\varrho_t : \sin\beta = \sin\varphi : \cos\beta,$$

z čehož

$$\varrho_t = \operatorname{tg}\beta \,.\, \sin\varphi.$$

Z obrazu dále patrno, že

$$\gamma = t\omega - \psi,$$

kdež

$$\psi = \sphericalangle (Q_t', V_t') = \sphericalangle (V_t', P_t').$$

V $\triangle\, a_t' f' s'$ jest

$$\overline{s'f'} = \overline{s'a_t'} \,.\, \sin\psi,$$

a poněvadž

$$\overline{s'f'} = \varrho_t, \quad \overline{s'a_t'} = \overline{a_0''b''} = \cos\varphi,$$

jestliže poloměr země béřeme za jednotku, nabudeme dosadíce

$$\operatorname{tg}\beta \,.\, \sin\varphi = \cos\varphi \sin\psi,$$

z čehož

$$\sin\psi = \mathrm{tg}\,\beta \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi$$

aneb

$$\psi = \arcsin(\mathrm{tg}\,\beta \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi);$$

proto

(5) $$\gamma = t\omega - \arcsin(\mathrm{tg}\,\beta \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi).$$

A poněvadž

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}},$$

nabudeme, zavedeme-li sem za $\sin\beta$ hodnotu ze vzorce (3),

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\cos\varphi \,.\, \sin(t\omega\sin\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2\varphi \,.\, \sin^2(t\omega\sin\varphi)}},$$

a tedy

$$\mathrm{tg}\,\beta \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\varphi \,.\, \sin(t\omega\sin\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2\varphi \,.\, \sin^2(t\omega\sin\varphi)}}.$$

Proto jest také

(6) $$\gamma = t\omega - \arcsin\frac{\sin\varphi \,.\, \sin(t\omega\sin\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2\varphi \,.\, \sin^2(t\omega\sin\varphi)}}.$$

Vzorci tomuto možno též dáti tvar

(7) $$\gamma = t\omega - \arcsin\left(\sin\varphi \,.\, \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right),$$

což lze vyjádřiti takto:

Úhel, o který se otočí rovina kyvů za čas t kol osy zemské počítajíc od okamžiku, kdy rovina tato se sjednocuje s rovinou meridiánu, jest roven rozdílu mezi úhlem, o který za týž čas otočí se země a úhlem, jehož sinus rovná se součinu sinusu zeměpisné šířky místa pokusného a poměru sinusu příslušné odchylky Foucaultovy ku cosinusu příslušné odchylky roviny kyvů od osy zemské.

Dále jest v pravoúhlém $\triangle\, a'_t s' e'$ odvěsna

$$\overline{s'e'} = \overline{s'a'_t} \,.\, \sin\lambda,$$

kdež

$$\lambda = \sphericalangle(V'_t,\ D'_t);$$

a ježto

$$\overline{s'e'} = \overline{u''n''} = \sin\beta,$$

$$\overline{s'a'_t} = \overline{a''_0 b''} = \cos\varphi,$$

jest

$$\sin\beta = \cos\varphi \,.\, \sin\lambda.$$

Avšak dle vzorce (2) jest také

$$\sin\beta = \cos\varphi \,.\, \sin\alpha,$$

pročež

$$\sin\lambda = \sin\alpha,$$

a tedy

$$\sphericalangle\lambda = \sphericalangle\alpha,$$

což lze vyjádřiti takto:

Úhel λ, který svírá tečna $a'_t e' \equiv D'_t$ ke kružnici G'_t s přímkou M'_t, jest roven odchylce Foucaultově.

Na základě této věty lze jednoduše sestrojiti stopu P'_t postupem tímto:

Sestrojme bodem a'_t přímku D'_t odchýlenou od M'_t o úhel $\alpha = t\omega \sin\varphi$, učiňme $s'e' \perp D'_t$, poloměrem $\overline{s'e'}$ opišme kružnici G'_t kol s' a považujme ji za obraz prvního průmětu šířkové kružnice G_t; sestrojme obraz průmětu druhého $G''_t \equiv m''n''$, dále obrysy $m''s''$, $n''s''$ obliny kuželové (s, G), čímž zobrazen bude druhý průmět $L''_t \equiv p''q''$ kružnice L_t, z něhož odvodí se obraz průmětu prvního L'_t; veďme konečně bodem a'_t tečnu P'_t ke kružnici L'_t.

Dodatkem budiž připomenuto, že přímka D'_t svírá s přímkou M'_0 úhel δ, kterýž, jak patrno z $\triangle s'g'a'_t$, rovná se $t\omega - \lambda$, a tedy také

$$\delta = t\omega - \alpha$$

aneb

$$\delta = t\omega\,(1 - \sin\varphi). \tag{8}$$

Můžeme si nyní mysliti, že přímkou D'_t zobrazen jest první průmět přímky D_t, jež ležíc v rovině K jest stopou roviny $E_t \equiv (D_t, V_t)$ v rovině K, dotýkajíc se kružnice $J_t (J'_t \equiv G'_t)$, kteráž ležíc v rovině K soustředně s kružnicí K má poloměr rovný $\sin\beta$ jako kružnice G_t. Pomyslíme-li ku každé poloze roviny kyvu F takto příslušnou rovinu E, otáčí se tato rovina kol O rovnoměrnou rychlostí $\omega(1 - \sin\varphi)$. Také této vlastnosti roviny E lze s prospěchem užiti k sestrojení poloh roviny F.

3. Rozbor základních vzorců.

a) Rychlost $\omega \sin\varphi$, kterou přibývá odchylky Foucaultovy $\alpha = t\omega \sin\varphi$, je stálá a velikost její závisí na sinusu šířky zeměpisné φ místa pokusného. Je-li $\varphi = 90^0$, jest rychlost tato rovna ω, totiž úplné rychlosti rotace zemské; neboť v tomto případě sjednocuje se svislá přímka bodem závěsným s osou zemskou, kol níž se rovina meridiánu otáčí plnou rychlostí ω. Na rovníku, kde $\varphi = 0^0$, jest i rychlost rovna nulle, t. j. na rovníku neotáčí se rovina meridiánu kol svislé, a proto nepřibývá tam odchylky Foucaultovy.

b) Ze vzorce (4) pro odchylku β roviny kyvů od osy zemské vychází, že velikost její při určité šířce zeměpisné φ místa pokusného závisí na velikosti $\sin(t\omega \sin\varphi)$. Je-li tento sinus $= 0$, jest i odchylka $\beta = 0$, což vždy nastane, když $t\omega \sin\varphi = n\pi$, kdež n značí libovolné číslo celé, z čehož jde $t = \frac{n\pi}{\omega \sin\varphi}$, aneb, zavedeme-li za ω hodnotu $\frac{\pi}{12}$, totiž arcus, jímž dáno jest pootočení kol osy zemské za hodinu, bude

$$t = \frac{12\,n}{\sin\varphi} \text{ hodinám.}$$

Sjednocuje-li se na počátku pokusu rovina kyvů s rovinou meridiánu, sjednotí se s ní po druhé za dobu $t = \frac{12}{\sin\varphi}$, atd.

Je-li

$$\sin(t\omega \sin\varphi) = 1,$$

tedy maximum, jest i odchylka β maximum, což vždy nastane, když

$$t\omega \sin\varphi = \frac{\pi}{2}(4n + 1),$$

kdež n značí libovolné číslo celé, z čehož

$$t = \frac{6(4n+1)}{\sin\varphi} \text{ hodinám.}$$

Po prvé nastane takové maximum při hodnotě $n = 0$, tedy za $\frac{6}{\sin\varphi}$ hodin. Za tuto dobu jest odchylka

$$\beta = \operatorname{arc\,sin}(\cos\varphi),$$

a tedy

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

což značí, že největší odchylka od osy rovná se doplňku zeměpisné šířky místa pokusného; a ježto za tutéž dobu činí odchylka Foucaultova $\frac{\pi}{2}$, jest v tomto okamžiku rovina kyvů kolmá na rovině meridiánu místa pokusného směřujíc od západu k východu.

Je-li

$$\sin(t\omega \sin\varphi) = -1,$$

má-li totiž sinus největší hodnotu zápornou, má i odchylka β největší hodnotu zápornou, což vždy nastane, když

$$t\omega \sin\varphi = \frac{\pi}{2}(4n+3),$$

kdež n značí libovolné číslo celé, z čehož jde

$$t = \frac{6(4n+3)}{\sin\varphi} \text{ hodinám.}$$

Tak po prvé se stane při hodnotě $n = 0$, totiž za $\frac{18}{\sin\varphi}$ hodin, při čemž

$$\beta = \operatorname{arc\,sin}\left(\cos\varphi \,.\, \sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right);$$

a ježto za tutéž dobu činí odchylka Foucaultova $\frac{3\pi}{2}$, jest v tom okamžiku rovina kyvů opět kolmá na rovině meridiánu, jsouc odchýlena od osy ve smyslu opačném předešlé odchylky maximální.

Rychlost v odchylování od osy není stálá. Hodnota její v některém okamžiku dána jest poměrem

$$(9)\quad \frac{d\beta}{dt} = \omega \sin\varphi \cos\varphi \frac{\cos(t\omega \sin\varphi)}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi \, . \, \sin^2(t\omega \sin\varphi)}} \, .$$

Je-li $t = 0$, má tento poměr hodnotu

$$\omega \sin\varphi \cos\varphi = \frac{\omega}{2} \, . \, \sin 2\varphi .$$

Rychlost tato počáteční jest maximum; neboť

$$(10)\quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = - \omega^2 \sin^4\varphi \cos\varphi \, . \, \frac{\sin(t\omega \sin\varphi) \sqrt{1 - \cos^2\varphi \, . \, \sin^2(t\omega \sin\varphi)}}{[1 - \cos^2\varphi \, . \, \sin^2(t\omega \sin\varphi)]^2} \, ,$$

kterýžto poměr roven jest nulle, jestliže $t = 0$; avšak

$$(11)\quad \frac{d^3\beta}{dt^3} = - \omega^3 \sin^5\varphi \, . \, \cos\varphi \, . \, \cos(t\omega \sin\varphi) \, . \, \frac{1 + 2\cos^2\varphi \, . \, \sin^2(t\omega \sin\varphi)}{[1 - \cos^2\varphi \, . \, \sin^2(t\omega \sin\varphi)]^2 \sqrt{1 - \cos^2\varphi \, . \, \sin^2(t\omega \sin\varphi)}}$$

má při hodnotě $t = 0$ hodnotu zápornou, totiž

$$- \omega^3 \sin^5\varphi \cos\varphi ,$$

čímž hořejší tvrzení dovozeno.

Jest patrno, že tato počáteční rychlost v šířkách doplňkových, za př. v šířce 30^0 a 60^0 jest tatáž. Největší je v šířce 45^0, kdež rovna jest $\frac{\omega}{2}$; odtud ubývá jí jak k pólu tak k rovníku, kdež konečně mizí.

Zrychlení v odchylování od osy dáno jest poměrem $\frac{d^2\beta}{dt^2}$. Na počátku, když $t = 0$, jest tento poměr též roven nulle, t. j. na počátku pokusu odkloňuje se rovina kyvů od osy sice nejrychleji, avšak rychlosti ubývá jen ponenáhlu, tak že je téměř stálá a pohyb téměř rovnoměrný; čím dále, tím značněji rychlosti ubývá, až při hodnotě $t = \frac{6}{\sin\varphi}$, když odchylka jest největší, ubývá jí měrou nejznačnější, totiž měrou $-\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi$. Od tohoto okamžiku počne se rovina kyvů k ose přichylovati smyslem opačným postupu předešlému a dostihnuvši osy, počne se opět odchylovati na stranu opačnou postupujíc podobně jako po prvé, atd.

c) Ze vzorce (6), jímž vyjadřuje se otočení roviny kyvů kol osy zemské za čas t, vychází, že na točně, kde $\varphi = 90^0$, $\gamma = 0$ pro kteroukoli hodnotu doby t, na rovníku pak, kde $\varphi = 0$, $\gamma = t\omega$; na točně se rovina kyvů kol osy zemské neotáčí, na rovníku pak otáčí se kol ní plnou rychlostí ω.

V některé jiné šířce zuměpisné φ otočí se rovina kyvů za dobu $t = \frac{6}{\sin\varphi}$ hodinám, tedy za dobu, kdy nabude rovina kyvů od osy zemské odchylky největší, o úhel

$$\gamma = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sin\varphi} - 1\right).$$

Otáčení v tomto období neděje se ovšem rovnoměrně; způsob, kterým se děje, poznáváme opět z rychlosti jeho v tom kterém okamžiku, totiž z poměru

$$(12) \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \omega \cos^2\varphi \,.\, \frac{\cos^2(t\omega \sin\varphi)}{1 - \cos^2\varphi \,.\, \sin^2(t\omega \sin\varphi)}.$$

Ze vzorce toho jest patrno, že rychlost jest stále kladná a tudíž otáčí se rovina kyvů kol osy zemské stále v témž smyslu jako země a otočení stále přibývá, avšak nerovnoměrně. Na počátku pokusu, když $t = 0$, jest $\frac{d\gamma}{dt} = \omega \cos^2\varphi$. Rychlost tato jest maximum; neboť

$$(13) \qquad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\omega^2 \sin^3\varphi \,.\, \cos^2\varphi \,.\, \frac{\sin(2t\omega \sin\varphi)}{\{1 - \cos^2\varphi \sin^2(t\omega\sin\varphi)\}^2}$$

jest pro $t = 0$ též roven nulle, a ježto $\frac{d^3\gamma}{dt^3}$ při $t = 0$ má hodnotu zápornou, soudíme, že počáteční rychlost jest maximum. Jest totiž

$$(14) \quad \frac{d^3\gamma}{dt^3} = -2\omega^3 . \sin^4\varphi \cos^2\varphi . \frac{(1-2x)(1-ax)+4ax(1-x)}{(1-ax)^3},$$

kdež položeno krátce

$$\sin^2(t\omega \sin\varphi) = x,$$
$$\cos^2\varphi = a,$$

a tedy při hodnotě $t=0$

$$\frac{d^3\gamma}{dt^3} = -2\omega^3 \sin^4\varphi \cos^2\varphi.$$

Ze vzorce (12) vychází, že rychlost otáčení rovna jest nulle, jestliže $\cos(t\omega \sin\varphi) = 0$, což nastane při hodnotách

$$t = \frac{6(2n+1)}{\sin\varphi} \text{ hodinám},$$

kdež n značí libovolné číslo celé. Po prvé tak se stane za dobu

$$t = \frac{6}{\sin\varphi} \text{ hodinám}.$$

V tomto prvním období jest poměr $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$, jímž vyjadřuje se zrychlení pohybu otáčivého, hodnoty záporné, a tudíž ubývá rychlosti pohybu otáčivého. Z počátku, kdy $t=0$, jest, jak již dotčeno, $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ též $=0$; rychlosti ubývá jen ponenáhlu, tak že je pohyb otáčení téměř rovnoměrný; čím dále, tím jí ubývá značněji, až při určité hodnotě t, při které $\frac{d^3\gamma}{dt^3}=0$, jest ubývání rychlosti nejznačnější. Aby tento poměr rovnal se nulle, musí patrně býti

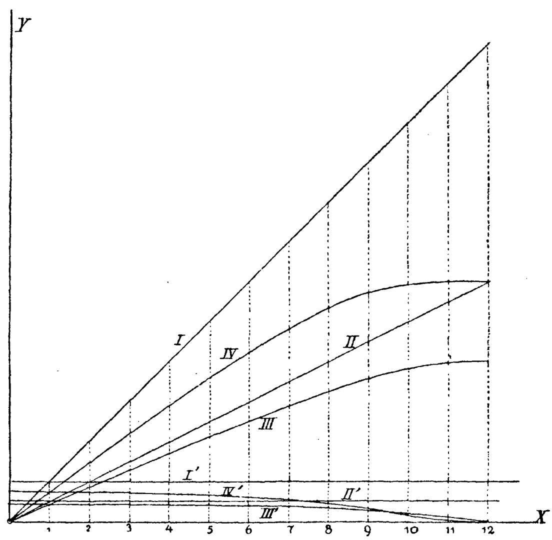
$$(1-2x)(1-ax)+4ax(1-x)=0,$$

a tedy x čili

$$\sin^2(t\omega\sin\varphi) = -\frac{2-3a}{4a} \pm \sqrt{\frac{1}{2a}+\frac{(2-3a)^2}{16a^2}};$$

hodnota t, jež této rovnici vyhovuje, označuje okamžik největšího ubývání rychlosti, kteréž jest tu na okamžik stálé; odtud čím dále, tím nepatrněji rychlosti ubývá, až konec období $t = \frac{6}{\sin \varphi}$ hodinám i rychlost i zrychlení pohybu otáčivého mizí. V následujícím období od $t = \frac{6}{\sin \varphi}$ až do $\frac{12}{\sin \varphi}$ hodin děje se otáčení co do rychlosti postupem opačným období prvního atd.

V obr. 4. jsou graficky znázorněny poměry rozborem zde podané pro pokus Foucaultův, jenž by konal se v místě, jehož šířka zeměpisná byla by 30°. Rychlost otáčení zemského vzata za jednotku a vyjádřena otočením země za hodinu. Otočení toto i hodina vyjádřeny pak úsečkou téže délky jakožto jednotkou



Obr. 4.

otočení a jednotkou doby. Jednotky doby přeneseny pak na osu úseček X, jednotky otočení na osu pořadnic Y.

Hledíc k rotaci zemské náleží pak určitému počtu jednotek doby na ose X týž počet jednotek otočení na ose Y, tak že úsečka vyjadřující dobu rovna jest pořadnici vyjadřující otočení za tuto dobu. Těmto sobě rovným souřadnicím příslušen jest určitý bod v rovině, jenž jest od obou os stejně vzdálen. Veškeré body takto určené vyplňují přímku *I*, jež odchýlena jest od osy *X* o úhel 45^0, jehož trigonometrická tangenta jsouc $= 1$ vyjadřuje úhlovou rychlost rotace zemské. Vedeme-li ve vzdálenosti, jež vzata za jednotku otočení, rovnoběžku *I'* s osou *X*, značí pořadnice této přímky stálou jednotkovou rychlost otáčení kol osy zemské.

Úhlová rychlost, kterou přibývá odchylky Foucaultovy v šířce 30^0, rovna jest polovině úhlové rychlosti rotace zemské, pročež bude za některou dobu odchylka Foucaultova rovna polovině úhlu, o který za tutéž dobu otočila se země. Každé úsečce značící určitou dobu, náležeti bude pořadnice rovnající se polovině této úsečky. Těmto dvěma souřadnicím náleží opět určitý bod v rovině, a souhrnem veškerých bodů takto určených vyplní se přímka *II*, jež svírá s osou úseček úhel, jehož trigonometrická tangenta jsouc $= \frac{1}{2}$ značí rychlost, kterou přibývá odchylky Foucaultovy. Pořadnicemi přímky *II'*, kterou vedeme rovnoběžně s osou úseček ve vzdálenosti $= \frac{1}{2}$ přijaté jednotky, znázorněna jest stálá rychlost, kterou přibývá odchylky Foucaultovy.

Určité době t, vyjádřené úsečkou na ose *X*, příslušna jest určitá odchylka β roviny kyvů od osy zemské, vyjádřená pořadnicí na ose *Y* dle tétéž přijaté jednotky; oběma těmito souřadnicemi určen jest v rovině os příslušný bod. Souhrn všech bodů takto určených tvoří křivku *III*, jíž znázorněno jest, kterak při rovnoměrně plynoucím čase přibývá odchylky od osy zemské. Myslíme-li si k této křivce v některém jejím bodě tečnu, vyjadřuje trigonometrická tangenta úhlu, jejž svírá tato tečna s osou *X*, rychlost, kterou přibývá odchylky v okamžiku tomuto bodu příslušném. Hodnota této tangenty dána jest vzorcem (9), nahradíme-li v něm činitele ω jednotkou.

Křivka *III'* vznikla tím, že jsme k úsečkám časovým sestrojili příslušné rychlosti jako pořadnice na základě tétéž přijaté jednotky. Pomyslíme-li ku křivce *III'* v některém jejím bodě tečnu, bude vyjadřovati trigonometrická tangenta úhlu, jejž tato tečna svírá s osou *X*, zrychlení v okamžiku tomuto bodu příslušném; číselná hodnota její vychází ze vzorce (10), položíme-li v něm za jeden z obou činitelů ω jednotku.

Podobným způsobem sestrojeny jsou křivky *IV*, *IV'*, jimiž znázorněny jsou poměry otáčení roviny kyvů kol osy zemské. Konečně namanuje se otázka, ruší-li se tvar roviny kyvů pohybem jejím vzhledem k ose zemské. O tom rozhodnouti ponecháváme laskavému čtenáři. Toliko budiž připomenuto, že by se doporučovalo vzhledem k účelu, za kterým pokus Foucaultův se koná, zaříditi jej tak, abychom se rušivých účinků, byly-li by jaké, pokud možná uvarovali. Dle rozboru učiněného bylo by pokus počíti tak, že bychom kyvadlo rozkývali směrem, od směru východního jen poněkud k severu odchýleným. V tomto případě by se po čas pokusu rovina kyvů téměř ani od osy zemské neodchylovala, ani kol ní neotáčela. Kdyby se pak ještě odstranil rušivý účinek otáčející se atmosféry, tak že by kyvadlo umístěno bylo v prostoře pokud možná vzduchoprázdném, byly by tak vyloučeny veškeré rušivé účinky a odchylky Foucaultovy přibývalo by přesně dle zákona vytčeného.

Znázornění čísel délkami a naopak.

Napsal

Dr. **Jan Vilém Pexider** v Praze.

(Pokračování.)

Stanovisko geometrie Veroneseovy.

Důkaz aequivalence založen byl v prvém odstavci (str. 17.) na axiomu Archimedově; nebýti věty té, uvedený důkaz nebýval by vůbec možný. Lze se však důvodně ptáti, je-li tento axiom spojitosti objektivně prokázán anebo logicky nutný. Jedná-li se v praksi o nějakou délku, vždy jest to délka konečná. Proto věta Archimedova v praksi pokaždé jest splněna. Výsledky praktického pozorování, empirická data jsou však přesná vždy jen *v určitých mezích a za jistých podmínek*; jen, necháme-li tyto stranou, platnost dat nabývá rázu všeobecnosti, a věta, jež