Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bohuš Jurek
Spočetné třídy a míra množiny

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 3, 152--156

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123953`

Spočetné třídy a míra množiny.

Bohuš Jurek.

(Došlo 1. prosince 1930.)

Míra množiny[1]) *ve smyslu Lebesguově jest číslo kladné nebo* rovné nule, stanovené těmito podmínkami:

1. Dvě stejné množiny mají stejnou míru.
2. Míra součtu konečného nebo spočetného množství množin bez společného bodu jest rovna součtu měr všech těchto množin.
3. Míra množiny všech bodů intervalu (0,1) je rovna 1. Při tom dvě množiny považujeme za stejné, vznikla-li jedna z druhé posunutím. Součet daných množin je množina všech bodů, obsažených aspoň v jedné z těchto množin.

Existují jistě množiny měřitelné, to jest množiny, pro něž je možno najíti číslo, hovící právě vysloveným podmínkám.[2]) Jsou to na příklad všechny množiny uzavřené. Snadno dokážeme, že existují množiny neměřitelné, to jest takové, při nichž není možno splniti všech podmínek, stanovících míru. Vyjadřujme všechna čísla desetinnými zlomky a to jediným způsobem (tedy pišme důsledně buď 1·3999... nebo 1·4). Do třídy x zařadíme všechna čísla, jejichž decimály, jistou počínaje, se shodují s decimálami čísla x. Tím rozdělíme osu číselnou na třídy. Vyberme z každé třídy jediné číslo intervalu (0,1). Množina M všech vybraných čísel je neměřitelná. Utvořme všechny množiny stejné s M, posunuté o konečný desetinný zlomek z intervalu (— 1, 1). Je jich spočetné množství. Součet těchto množin obsahuje interval (0,1) a jest uzavřen v intervalu (— 1, 2). M nemůže mít nulovou míru, neboť pak by míra množiny všech bodů intervalu (0,1) byla nulová. Nemůže mít positivní míru, neboť pak by míra množiny všech bodů intervalu (— 1, 2) jistě převyšovala číslo 3. Po této ukázce užití pojmu třídy přejdeme k jeho obecnější definici.

---

[1]) Kde není bližšího označení, rozumíme „množinou" množinu bodovou na přímce.

[2]) Lebesgue definuje měřitelnost jinak, ale množiny měřitelné ve smyslu Lebesgueově jsou měřitelné i v našem smyslu.

Definice. Buď dána libovolná množina spočetná oboustranně ohraničená, kterou nazveme množinou základní. Pak je základní třídou množina všech konečných součtů elementů množiny základní a všech rozdílů takových součtů. Přesněji: je-li a_i obecným elementem množiny základní, je základní třídou souhrn všech čísel tvaru $\sum_k m_k a_k$ pro každé konečné množství kladných celých čísel k a jakákoliv (positivní, negativní nebo nulová) celá čísla m_k. Každý element základní třídy nám bude třídicím číslem.

Číslo a patří do třídy b, je-li

$$a = b + c,$$

kde c je číslo třídicí. Číslo a patří ke třídě b jedině tehdy, jsou-li třídy a a b identické.

Množinu všech tříd elementů množiny M označíme $K(M)$, množinu všech elementů tříd množiny $K(M)$ označíme symbolem $T(M)$, množinu komplementární k $T(M)$ symbolem $N(M)$.

Množina je dokonale rozdělená, jestliže neobsahuje dvojic čísel z jedné a téže třídy.

Věta prvá. Každá množina positivní (> 0) míry obsahuje neměřitelnou podmnožinu.[3])

1. věta pomocná. Každá měřitelná množina dokonale rozdělená je nulové míry.

Důkaz. Není-li daná množina dokonale rozdělená ohraničenou, rozdělíme ji na ohraničené množiny. Množina, vzniklá z libovolné takové množiny posunutím o číslo třídicí, nemá s ní společných bodů. V určitém konečném intervalu můžeme uzavříti nekonečný počet takových množin, neboť existuje nekonečný počet třídicích čísel libovolně malých. Míra množiny dokonale rozdělené nemůže být positivní.

2. věta pomocná. Množina $K(E)$ stačí k určení, zdali je E nulové míry.

Důkaz. Buď $K(E_1)$ identická s $K(E)$ a buď na př. E nulové míry. Pak množina $T(E)$ (jakožto součet spočetného množství množin stejných s E) a také její podmnožina E_1 jest v každém intervalu nulové míry.

Důkaz hlavní věty. Buď E libovolná množina positivní míry. Z každé třídy, která má s množinou E společné body, vybereme jeden z těchto bodů. Množina M všech vybraných čísel nemůže mít positivní míru, neboť jest dokonale rozdělená. Nemůže mít míru nulovou, neboť $K(M)$ jest identická s $K(E)$.

[3]) Důkaz, který jsme prováděli před obecnou definicí, bychom mohli opakovat s použitím obecnějšího pojmu třídy. Dokazujeme obecnější větu.

Věta druhá. Množina $N(E)$ je v každém intervalu nulové míry, je-li E měřitelná a positivní míry.

Věta rovnocenná. Množina $T(E)$ v intervalu (a, b) má míru nulovou, nebo rovnou $(b - a)$.

Důkaz. Část množiny $T(E)$ obsažená v (a, b) jest součtem spočetného množství množin měřitelných,[4]) jest tedy měřitelna (viz Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Paris 1904, p. 108). Jestliže míra $\mathfrak{M}$ části $T(E)$, obsažené v (a, x) jest lineární funkcí x, jest naše věta dokázána, neboť pak

$$\mathfrak{M}(a, x) = A(x - a),$$

kde A se rovná 0 nebo 1 (Knopp, Mathematische Annalen 95 (1925), str. 412). $\mathfrak{M}(a, x)$ jest lineární funkcí x. Buďte a, b, c jakákoliv čísla hovící nerovninám $a < b < c$ a buď p číslo třídicí. Pak

$$\mathfrak{M}(a, a + p) = \mathfrak{M}[a + np, a + (n + 1)p]. \tag{1}$$

Najdeme celá kladná čísla m, n tak, aby

$$\begin{aligned} &a + mp \leqq b < a + (m + 1)\,p \\ &a + (m + n)\,p \leqq c < a + (m + n + 1)\,p \\ &b + (n - 1)\,p < c < b + (n + 1)\,p. \end{aligned} \tag{2}$$

Pak platí vztahy

$$m\mathfrak{M}(a, a + p) \leqq \mathfrak{M}(a, b) \leqq m\mathfrak{M}(a, a + p) + p$$
$$n\mathfrak{M}(a, a + p) - p \leqq \mathfrak{M}(b, c) \leqq n\mathfrak{M}(a, a + p) + p$$
$$\frac{n}{m}\,[\mathfrak{M}\,(a, b) - p] \leqq \mathfrak{M}(b, c) \leqq \frac{n}{m}\,\mathfrak{M}(a, b) + p.$$

Existují čísla třídicí libovolně malá

$$\mathfrak{M}(b, c) = \lim_{p=0} \frac{n}{m}\,\mathfrak{M}(a, b) = \frac{c - b}{b - a}\,\mathfrak{M}(a, b). \tag{3}$$

Vlastnost jest dokázána.

Důsledky dokázaných vět.

1. $K(E)$ určuje míru E pouze v tom případě, že tato míra jest nulová. Je-li E positivní míry, existuje množina E_1 neměřitelná a E_2 libovolné míry m takové, že $K(E)$ jest identické s $K(E_1)$ i s $K(E_2)$. E_2 dostaneme odnětím bodů množiny $N(E)$ intervalu délky m.

2. Existuje množina $K(E)$ taková, že každé příslušné E jest nulové míry a druhé kategorie.[5]) Buď M množina nehustá

[4]) Zde předpokládám, že část množiny měřitelné, obsažená v (a, b), jest měřitelna. To plyne z prohloubené teorie míry, založené na pojmech vnější a vnitřní míry.

[5]) Množina prvé kategorie je taková, která se dá rozložiti na konečné nebo spočetné množství množin nehustých. Všechny ostatní jsou druhé kategorie. Komplementární množina k množině 1. kategorie je 2. kategorie.

positivní míry. Pak $N(M)$ jest druhé kategorie a nulové míry v každém intervalu. Každá množina A taková, že $K(A)$ jest identická s $K[N(M)]$, jest druhé kategorie a nulové míry.

Dodatek. Mluvili jsme posud o třídách, jejichž základní množiny jsou spočetné. Existují však množiny o mocnosti kontinua, které vzaty za základní množiny třídění dělí osu číselnou aspoň na 2 třídy. Je to na př. množina M všech čísel

$$x = \frac{a_1}{10^2} + \frac{a_2}{10^4} + \frac{a_3}{10^8} + \ldots + \frac{a_4}{10^{2^n}} + \ldots,$$

kde a_k nabývá hodnot 0 a 1. Utvořme součet konečného počtu elementů množiny M. Existuje takové číslo N, že náš součet má na desetinném místě řádu $2^m + 1$ číslo 0 pro všechna $m > N$. Ke dvěma libovolným součtům elementů množiny M najděme číslo N' tak, že oba součty mají na místech řádů $2^m + 1$ pro všechna $m > N'$ číslo 0. Pak jejich rozdíl tam má číslo 0 nebo 9. Základní třída, odvozená z M, neobsahuje tedy čísla

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2^n-1}$$

a třídí osu číselnou aspoň na 2 třídy.

Každá měřitelná množina třídící osu číselnou nejméně na 2 třídy je nulové míry. To plyne z věty, kterou si dokážeme: Každé třídění, dělící osu číselnou na 2 třídy, dělí ji na nekonečný počet tříd.

Důkaz: Buď α číslo netřídicí a n libovolné celé kladné číslo. Pak α/m (m je celé číslo) je netřídicí, neboť jinak i α by bylo třídicí. Čísla

$$\beta_k = \frac{\alpha k}{n!}$$

pro $k = 1, 2, \ldots n$, i rozdíl těchto čísel je netřídicí. Každá třída obsahuje nejvýše jedno β_k a základní třída jistě žádné. Jest tedy aspoň $n + 1$ tříd.

Každá měřitelná množina, třídící osu číselnou aspoň na 2 třídy (stručně: množina třídicí) jest nulové míry. Avšak každá množina nulové míry není třídicí. Je-li E nehustá množina positivní míry, je $N(E)$ nulové míry. Při tom je $N(E)$ netřídící, neboť kdyby byla třídicí, existovala by množina s ní stejná bez společného bodu s ní. To jest nemožno, neboť pak by množina prvé kategorie $T(E)$ obsahovala podmnožinu druhé kategorie. $N(E)$ není třídicí množinou.

*

Les classes dénombrables et la mesure des ensembles.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur présente une démonstration de l'existence des ensembles non mesurables (au sens de M. Lebesgue).

Définition de la classe. Soit F un ensemble dénombrable borné, d'ailleurs quelconque (ensemble fondamental). Soit a_i un élément quelconque de F. La classe fondamentale sera pour nous l'ensemble des sommes des nombres a_k et des différences de ces sommes, c'est-à-dire des $\sum_k m_k a_k$, quels que soient les ensembles finis des entiers positifs k et quels que soient les entiers (positifs, negatifs ou égaux à zéro) m_k. Tout élément de la classe fondamentale est un nombre classifiant.

Le nombre a appartient à la classe b, si l'on a

$$a = b + c$$

c étant classifiant.

Propriétés des classes. Tout ensemble mesurable qui ne contient aucun couple de la même classe est de mesure nulle.

Je désigne l'ensemble de classes de l'ensemble E par le symbole $K(E)$, l'ensemble des éléments des classes de $K(E)$ par $T(E)$, l'ensemble complémentaire à $T(E)$ par $N(E)$. L'ensemble $K(E)$ étant la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles égaux à E, est décisif pour la question si E est de mesure nulle ou non.

Théorème 1. Tout ensemble borné de mesure positive contient un ensemble non mesurable. — Soit E un ensemble borné de mesure positive. Dans toute classe ayant un élément commun avec E, choisissons un nombre appartenant à E. L'ensemble M des nombres choisis n'est pas mesurable parce que $K(M)$ est identique à $K(E)$.

Les autres théorèmes: L'ensemble $N(E)$ considéré dans un intervalle quelconque est de mesure nulle pour tout E de mesure positive.

Il existe un ensemble qui a la puissance du continu et qui, considéré comme ensemble fondamental, donne une classification contenant 2 classes au moins. Toute classification donne une infinité de classes si elle en donne 2. L'ensemble $N(E)$, pour E non dense de mesure positive, est un ensemble de mesure nulle qui donne la classe fondamentale, contenant tous les nombres réels.