Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vojtěch Jarník

Bolzanova „Functionenlehre"

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 4, 240--262

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123934

Bolzanova „Functionenlehre.“

Referuje *Vojtěch Jarník.*

Ve Spisech Bernarda Bolzana, vydávaných Královskou Českou Společností Nauk, vyšel dosud svazek 1., obsahující dosud netištěné (a před nedávnem dosud vůbec neznámé) dílo Bolzanovo „Functionenlehre“.[1]) Jest to dílo tak svérázné, že jest vskutku velmi litovati, že nemohlo — zůstavši v rukopise — působiti své doby na další rozvoj matematiky. V době Bolzanově (narozen 1781, zemřel 1848), byla nauka o funkcích již značně rozvinuta, její základní pojmy však postrádaly ostrých obrysů a základní věty nebyly podepřeny přesnými důkazy. A právě v těchto základech nauky o funkcích znamená Bolzanova „Functionenlehre“ skutečný mezník — bohužel mezník zarostlý mechem neznámosti. Ze současníků Bolzanových snad jedině Gauss, Abel a Cauchy projevili obdobný smysl pro řádné vybudování základů nauky o funkcích. Z nich Gauss a Abel podali sice mistrovské ukázky přesných matematických metod, nezabývali se však oněmi základními otázkami soustavně. Zbývá Cauchy, který ve svých dílech „Cours d'Analyse“ (1821), „Résumé des leçons . . . sur le Calcul Infinitésimal“ (1823), „Leçons sur le Calcul différentiel“ (1829), postavil základní obory nauky o funkcích (algebraickou analysu, diferenciální a integrální počet) systematicky na pevné základy (nebo řekněme opatrněji: na pevnější základy).[2]) Bolzano jde však v této snaze ještě dále než Cauchy.[3]) Cauchy se většinou spokojil tím, že vybudoval základy potud, pokud toho k dalším vývodům potřeboval; naopak Bolzano

---

[1]) „Functionenlehre“, vydáno 1930 nákladem Král. Č. Spol. Nauk, tiskem Jednoty čsl. matematiků a fysiků v Praze, str. XX + 183 + 24 + IV. Vydání jest opatřeno výraznou předmluvou prof. Petra a pečlivými poznámkami prof. Rychlíka.

[2]) Bolzano znal aspoň některé z těchto spisů; vznik (nebo aspoň ukončení) Bolzanova rukopisu jest datovati nejméně 1831 (v 2. oddílu, § 90, cituje knihu Youngovu z r. 1831).

[3]) Ostatně i Cauchy se dopustil některých omylů; budeme se některými z nich blíže zabývati.

byl duch spíše filosofický, kterého v matematice právě základní otázky nejvíce zajímaly.[4]) Uvidíme v dalším, jak ostře vyslovuje Bolzano své definice, jak kriticky pitvá své pojmy, s jakým zájmem a s jakou úplností diskutuje všechny logicky možné případy, bez ohledu na to, mají-li pro konkrétní matematické problémy větší či menší význam.

Právě tento filosofický zájem předurčoval Bolzana k vykonání vynikajícího díla v otázce základů matematické analysy. A vskutku jest jeho „Functionenlehre“ dílo vskutku průkopnické, dílo tak moderní, že musíme jíti o několik desítiletí dále, abychom se setkali s díly analogickými. Na druhé straně ovšem jak ono filosofické založení Bolzanovo tak průkopnický ráz jeho díla působily na jeho knihu též několika nepříznivými vlivy. Především Bolzano nebyl matematický rutinér; proto partie, jež vyžadují jen „ryzího myšlení“, jsou u něho většinou dokonaleji provedeny než ony partie, jež vyžadují větší „řemeslné“ zručnosti. Za druhé novost projednávaných problémů působila, že Bolzano neměl vůbec k disposici vhodného názvosloví;[5]) každou maličkost musil obšírně vypisovati a není divu, že někdy, brodě se v záplavě slov, uklouzl a dopustil se nesprávného úsudku. A ještě jedna okolnost jistě těžce doléhala na Bolzanovu práci. Průkopnické jeho dílo bylo by v jeho době nalezlo pochopení nejvýše u největších duchů matematických; jaké porozumění mohl Bolzano očekávati v tehdejším rakouském prostředí, v němž prostřednost, bezbarvost a zpátečnictví byly vládou podporovány jako nejvyšší občanské ctnosti? Sám, za dokonalého nezájmu a nepochopení svého okolí pracoval Bolzano na svém díle; jistě leckterá nedokonalost jeho díla byla by zmizela, kdyby si byl mohl o svých problémech pohovořiti s nějakou spřízněnou duší.

V tomto článku chci čtenáře upozorniti na problémy a metody tohoto Bolzanova díla; čtenář uvidí, jak mnohé pojmy, problémy a metody, jež dnes patří k nejdůležitějším částem matematické analysy, jsou v definitivním tvaru podány již u Bolzana. Jde mi ovšem spíše o upozornění nežli o definitivní ocenění Bolzanova díla; to musí býti přenecháno historikovi matematiky.

Bolzanova „Functionenlehre“ — jež byla zamýšlena jako část

---

[4]) Viz na př. v Petrově předmluvě (str. IX.) výmluvný citát z Bolzanových „Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik, 1. Lieferung“ (1810): Seit etwa 15 Jahren . . . ist diese Wissenschaft (Mathematik) immer eines von meinen Lieblingsstudien gewesen; doch vornähmlich nur nach ihrem speculativen Teile, als Zweig der Philosophie und Uibungsmittel im richtigen Denken.

[5]) Četba Bolzanovy knihy vzbuzuje ostatně (u *dnešního* matematika) dojem, že Bolzano nebyl příliš obratným (vědeckým) stylistou; ovšem k správnému posouzení této okolnosti bylo by třeba historika.

většího díla o matematice[6]) — skládá se z úvodu (Einleitung: Verhältnisse zwischen veränderlichen Zahlen, str. 1—12) a z dvou hlavních oddílů (Erster Abschnitt: Stetige und unstetige Functionen, str. 13—79; Zweiter Abschnitt: Abgeleitete Functionen, str. 80—183). Úvod obsahuje několik spíše formálních úvah a nebudu se jím obšírněji zabývati; za to o obou hlavních oddílech chci pojednati podrobněji.[7])

Erster Abschnitt.
Stetige und unstetige Functionen.

Hned na začátku referátu narážím na jednu potíž. Bolzano velmi si dává záležeti na definicích; ale definice pojmu funkce u něho schází — hned na začátku úvodu užívá slova „Function" jako běžného pojmu, bez jakékoliv definice. Při Bolzanově pečlivosti v zavádění pojmů soudil bych, že Bolzano snad v některé jiné — snad neznámé — části rukopisu pojem funkce definoval; prof. Rychlík nemohl mi však poskytnouti žádných informací v této věci. Bolzano užívá též často výrazu „einförmige Function"; Rychlík interpretuje slovo „einförmig" jakožto „jednoznačný" a z mnoha míst Bolzanova díla zdá se vysvítati, že Bolzano slovy „einförmige Function" rozuměl to (nebo skoro to), co dnes označujeme slovem „funkce". Budu tedy výraz „einförmige Function" překládati slovem „funkce" a budu při tom funkci (na př. funkci jedné proměnné) bráti ve smyslu dnes obvyklém: Proměnná y jest funkcí proměnné x, definovanou v oboru M, jestliže každé hodnotě x z množství M je přiřazena určitá (jediná) hodnota proměnné y.[8]) Někdy (hlavně v 2. oddílu při definici derivace) Bolzano přívlastek „einförmig" vynechává; nezdá se však, že by tím chtěl něco zvláštního říci;

---

[6]) Úvod k „Functionenlehre" má v rukopise nadpis „Fünftes Hauptstück"; také rukopisy některých jiných částí jsou zachovány.

[7]) Abych čtenáře zbytečně neunavoval rozvláčnou a často nezvyklou slovní formulací Bolzanovou, budu jeho výroky většinou „překládati" do moderní mluvy. Na př. v 1. oddílu, § 20 Bolzano praví: „Wenn die unendlich vielen Werthe, die eine Function $F(x)$ annimmt, indem ihre Veränderliche x alle von $x = a$ bis $x = b$ einschliesslich vorkommenden Werthe erhält, von solcher Beschaffenheit sind, dass sich zu jeder messbaren Zahl irgend einer aus ihnen ausfinden lässt, der diese Zahl übertrifft, so ist diese Function gewiss nicht für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ einschliesslich stetig." Tuto větu vyslovím stručně takto: „funkce neohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$ nemůže býti spojitá v $\langle a, b\rangle$" nebo ještě lépe v ekvivalentním tvaru: „každá funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$ jest ohraničená v $\langle a, b\rangle$." (Z důkazu jest mimoto patrno, že Bolzano místo „die eine Function $F(x)$ annimmt" chtěl říci „die der absolute Betrag einer Function $F(x)$ annimmt"; takováto zřejmá přeřeknutí v dalším často opravuji, aniž bych se o tom zvláště zmiňoval.)

[8]) V celém díle jde o reálné funkce reálných proměnných. Nechci ovšem nikterak tvrditi, že by Bolzano byl býval schopen onu definici vysloviti tak dokonale, jak to dnes činíme.

pouze v §§ 47—48 (1. oddíl) jest věc pochybná a působí jakési potíže (viz k tomu dále mé poznámky k těmto §§).

Po úvodním § 1 definuje Bolzano v § 2 spojitost funkce jedné proměnné tak, jak to činíme dnes: funkce $f(x)$ jest spojitá v bodě a, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézti číslo $\eta > 0$ tak, že pro všechna x, hovící nerovnosti $|x - a| < \eta$, platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.[9] Bolzanovo pojetí spojitosti je tedy zcela moderní; před ním snad jen Cauchy definoval spojitost funkce podobným způsobem; Cauchy však nedospívá k pojmu funkce spojité v *bodě*, nýbrž zůstává při pojmu spojitosti v *intervalu* (jeho pojem „funkce spojitá v okolí bodu a" znamená funkci, spojitou v nějakém intervalu $((a - \varepsilon, a + \varepsilon), (\varepsilon > 0))$.[10]) Bolzanovo pojetí, jež vychází ze spojitosti v bodě, znamená podstatný pokrok. Než Bolzano jde ještě dále a zavádí ihned též (způsobem dnes obvyklým) spojitost zprava a zleva.[11])

Vzbuzuje-li již tato definice náš obdiv, tím většího obdivu zaslouží si další paragrafy 3—33, které obsahují znamenitě vybudovanou teorii spojitých funkcí jedné proměnné. Po § 3, jenž obsahuje zajímavou kritiku starších definicí spojitosti, následuje v §§ 4—8 důkaz spojitosti nejjednodušších funkcí (až k funkcím racionálním). Následující §§ 9—11 ukazují, jak důkladně Bolzano promyslil možnosti, jež při spojitosti a nespojitosti funkcí mohou nastati; tak v § 10 sestrojuje funkci, definovanou pro všechna x a spojitou právě v jednom jediném bodě. Zajímavý je § 12, jenž ukazuje kritickou bystrost Bolzanovu:

Budiž funkce $f(x)$ spojitá zprava pro všechna x. Zvolme nějaké číslo a; potom je[12])

$$\lim_{h=0+} (f(a + h) - f(a)) = 0. \tag{1}$$

Rovněž jest pro libovolné k:

$$\lim_{h=0+} (f(a - k + h) - f(a - k)) = 0. \tag{2}$$

Kdybychom směli v poslední rovnici položiti $k = h$, dostali bychom

$$\lim_{h=0+} (f(a) - f(a - h)) = 0,$$

---

[9]) Bolzano mluví tedy o spojitosti jen tehdy, je-li funkce $f(x)$ definována v bodě a a v jeho okolí.

[10]) Cauchy, Cours d'Analyse (1821), I^ère partie, chap. II, § 2. K tomu jest poznamenati, že Bolzano již v r. 1817 v pojednání „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine Wurzel der Gleichung liegt" zavádí pojem spojitosti podobně jako Cauchy (tedy spojitost v intervalu).

[11]) Na tomto místě je také viděti, s jakými vyjadřovacími potížemi musil Bolzano zápasiti: k definici spojitosti spotřeboval 23 řádek!

[12]) $\lim_{x=a+} g(x)$ značí „limitu funkce $g(x)$ v bodě a zprava", a obdobně pomocí znaku $a-$ vyznačuji limitu zleva.

t. j. dostali bychom výsledek, že funkce $f(x)$ je v bodě a spojitá zleva. Bolzano výslovně varuje před touto nesprávnou úvahou; jako důvod nepřípustnosti takové úvahy uvádí zcela správně okolnost, že v (2) jest třeba si mysliti k jako pevné číslo; chceme-li při kladném ε dosáhnouti nerovnosti $|f(a-k+h)-f(a-k)|<\varepsilon$, stačí zvoliti $0<h<\eta$, kde však kladné číslo η může záviseti nejenom na ε, *nýbrž i na* k. Moderně řečeno: nesprávnost té úvahy spočívá v tom, že spojitost zprava nemusí být „stejnoměrná". Bolzano konstruuje též příklad ($f(x)=x^2$ pro $x<2$, $f(x)=x^3$ pro $x \geqq 2$), z něhož nesprávnost oné úvahy i jejího výsledku jest patrna.

Následující § 13 opět se týká pojmu stejnoměrnosti; Bolzano v něm ukazuje na příkladě toto: Funkce $(1-x)^{-1}$ jest spojitá v otevřeném intervalu (0, 1).[13]) Přes to však, zvolíme-li si kladné číslo ε, jest možno ke každému kladnému δ nalézti číslo $x_0 (0< < x_0 < 1)$ tak, že k dosažení nerovnosti

$$\left|\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x_0}\right|<\varepsilon\ (0<x<1)$$

jest *nutno* zvoliti $|x-x_0|<\delta$. K tomu bych poznamenal toto: Vlastnost, kterou zde Bolzano formuluje (jednak v obecné větě, jednak v citovaném příkladě) není logickým záporem stejnoměrné spojitosti (v dnešním smyslu); věta z § 13 není proto ekvivalentní s větou „funkce spojitá v (a, b) nemusí býti stejnoměrně spojitá v (a, b)", má však k ní úzký vztah (dokonce ji obsahuje). Je vidět, že Bolzano si uvědomil důležitost pojmu asi toho rázu, jako je dnešní „stejnoměrnost" (stejnoměrná spojitost, stejnoměrná konvergence a pod.); nedospěl však k tomu, aby poznal, *jak* by měl vhodně tento pojem formulovati. Následkem toho — jak v dalším uvidíme — často na stejnoměrnost vůbec zapomíná, často pak operuje s jakýmsi pojmem tohoto rázu, ne však vhodně zavedeným; tím vznikají v díle Bolzanově některé omyly a nedokonalosti, jimiž se ještě podrobněji budeme zabývati.

§§ 14—16 pojednávají o t. zv. „neurčitých výrazech" na základě věty: Je-li $f(x)$ spojitá v (a, b) a mají-li dvě čísla m, M $(a<m<b)$ tu vlastnost, že ke každému páru čísel $\varepsilon>0$, $\eta>0$ existuje číslo x tak, že $|x-m|<\eta$, $|f(x)-M|<\varepsilon$, jest $f(m)=M$. § 17 obsahuje důkaz věty: je-li $f(x)$ spojitá v (a, b) a leží-li, pro nějakou hodnotu M, kořeny rovnice $f(x)=M$ všude hustě v intervalu (a, b), jest $f(x)=M$ identicky v (a, b). § 18 obsahuje obrácení věty z § 17; zde však se dopouští Bolzano *prvního závažného omylu*. Bolzano totiž praví: „Jestliže tedy na-

[13]) Zavádím tyto značky a názvy: (a, b) značí množství všech čísel x, pro něž $a<x<b$ (název: otevřený interval); $\langle a, b\rangle$ značí množství všech čísel x, pro něž $a \leqq x \leqq b$ (název: uzavřený interval).

opak je $f(x)$ spojitá v (a, b) a jestliže $f(x)$ závisí na x (tím chce patrně Bolzano říci, že $f(x)$ není konstantní) a je-li M nějaké číslo, potom rovnice $f(x) = M$ může míti sice nekonečně mnoho kořenů v (a, b), lze však nalézti částečný interval v (a, b), v němž tato rovnice nemá žádný kořen. Jinými slovy: *ke každému kořenu rovnice $f(x) = M$ lze nalézti kořen jemu nejbližší.*" Poslední věta je zřejmě nesprávná, i když učiníme předpoklad (který Bolzano asi polovědomě učinil), že $f(x)$ není konstantní v žádném částečném intervalu. Za tohoto předpokladu lze totiž v každém částečném intervalu nalézti bod α tak, že $f(\alpha) \neq M$; jestliže rovnice $f(x) = M$ má aspoň jeden kořen na levo od α a rovněž napravo od α, lze nalézti interval (y_1, y_2), obsahující bod α, tak, že $f(x) \neq M$ pro $y_1 < x < y_2$, ale $f(y_1) = M$, $f(y_2) = M$; y_1, y_2 tvoří pak vskutku dva „sousední" kořeny rovnice $f(x) = M$; jenom že — a v tom spočívá nesprávnost Bolzanova tvrzení — nemusíme tímto způsobem (i když měníme číslo α) obdržeti *všechny* kořeny rovnice $f(x) = M$. Tato chyba zaráží tím více, že Bolzano v dalším sestrojuje funkci (v § 70), která po malé úpravě by mu poskytla příklad, ukazující nesprávnost jeho tvrzení (a dokonce i tato úprava je provedena v II. Abschn., § 26).

Ale tento omyl nám na druhé straně ukazuje, jak veliký, obtížný a průkopnický úkol Bolzano na sebe vzal. Jen nesmírnou obtížností a úplnou novostí a nezvyklostí předmětu jest možno si vysvětliti, že Bolzano, který v následujících odstavcích (§§ 19—30) ukázal naprostou přesnost a dokonalost v místech nejchoulostivějších, mohl se dopustiti v § 18 tak hrubé chyby. Bohužel nezůstal § 18 bez vlivu na následující úvahy; zvláště některé části nauky o extrémech trpí používáním nesprávné věty z § 18.

Následující §§ 19—30 vynucují si za to bezvýhradný obdiv a úctu. Zde Bolzano dokazuje podrobně a bez nejmenšího omylu základní věty o spojitých funkcích. Důkazy jsou úplně „aritmetisovány", postupují (jako ostatně celá tato kniha) ryze deduktivně z definice spojitosti, bez jakéhokoliv odvolávání se na názor. Bolzano dokazuje tyto věty:

I. Je-li

$$\limsup_{x=c} |f(x)| = \infty,$$

není funkce $f(x)$ v bodě c spojitá.

II. Funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ je v něm ohraničená.

III. Je-li funkce $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$ a existuje-li posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots, (a \leq x_n \leq b)$ taková, že $\lim_{n=\infty} f(x_n) = C$, potom funkce $f(x)$ nabývá v intervalu $\langle a, b\rangle$ hodnoty C.

IV. Je-li funkce $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$, nabývá tato funkce v $\langle a, b\rangle$ někde své největší (a rovněž nejmenší) hodnoty.

V. Budiž $f(x)$ spojitá v (a, b); budiž $a < x_1 < x_2 < b$, $f(x_1) \neq f(x_2)$; potom funkce $f(x)$ nabývá v intervalu (x_1, x_2) všech hodnot, jež leží mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$.[14])

Bolzano nejenom dokazuje tyto věty, nýbrž i zkoumá kriticky význam učiněných předpokladů; tak ukazuje, že věty III a IV neplatí, nahradíme-li v nich uzavřený interval $\langle a, b \rangle$ otevřeným intervalem (a, b). Důkazy těchto vět jsou provedeny tak bezvadně, že by mohly býti (nehledíme-li k některým neobratnostem slovního vyjádření) beze změny převzaty do kterékoliv moderní učebnice diferenciálního počtu. Jen jednu poznámku nutno učiniti: spojitost v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ znamená — podle dnešní terminologie — spojitost v každém vnitřním bodě, dále spojitost zprava v bodě a a spojitost zleva v bodě b. Bolzano vyjadřuje ji slovy „von $x = a$ bis $x = b$ einschliesslich stetig". Zdá se tedy, že Bolzano požaduje v koncových bodech intervalu oboustrannou spojitost, ač stačí jednostranná. Je ovšem také myslitelno, že Bolzano byl si této okolnosti vědom a že jenom vyjadřovací potíže zavinily, že tuto okolnost jasně nevytkl.[15])

Důkazy spočívají hlavně na dvou větách, jejichž formulace je rovněž dílem Bolzanovým. První z nich, t. zv. *věta o horní hranici*, zní ve formulaci Bolzanově takto: víme-li o nějaké vlastnosti B, že nenáleží všem reálným číslům, že však náleží všem číslům menším než jisté číslo U, potom existuje číslo A, jež je největší ze všech čísel x, jež mají následující vlastnost: všechna čísla menší než x mají vlastnost B.[16])

Druhá věta je t. zv. věta *Bolzano-Weierstrassova:* každá ohraničená posloupnost má aspoň jeden bod zhuštění.[17])

---

[14]) Poslední větu dokázal Bolzano již v „Rein analytischer Beweis . . ." (1817). Také Cauchy ji dokazuje v Cours d'Analyse, Note III$^{\text{ème}}$ (1821).

[15]) Tomu by se zdály nasvědčovati některé pozdější úvahy; na př. v § 70 sestrojuje Bolzano funkci, definovanou pouze v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ (u níž tedy v koncových bodech lze mluviti nejvýše o *jednostranné* spojitosti) a přes to o ní říká, že je „von $x = 0$ bis $x = 1$ einschliesslich stetig". Totéž říká v § 75 o t. zv. „Bolzanově funkci"; a podobně i na některých jiných místech.

[16]) Tuto větu vyslovil Bolzano již v rukopisné „Zahlenlehre" a v tištěném pojednání „Rein analytischer Beweis . . ." (1817). V tomto pojednání dokazuje Bolzano tuto větu tím, že ji převádí na jistou podmínku (t. zv. Bolzano-Cauchyovu) pro konvergenci posloupností; ovšem pokus Bolzanův o důkaz Bolzano-Cauchyovy podmínky (v témže pojednání) ztroskotal, ježto by vyžadoval teorii reálných čísel, jež byla vytvořena až o několik desítiletí později. Dnes ovšem postupujeme raději obráceně: napřed dokazujeme větu o horní hranici a potom teprve podmínku Bolzano-Cauchyovu.

[17]) Při použití této věty odkazuje Bolzano na svou rukopisnou „Lehre von der Messbarkeit der Zahlen"; ani Jašek ani Rychlík tam však tuto větu nenašli. Zajímavo jest, jak poznamenává Rychlík, že ani v tištěných spisech Bolzanových tuto větu nelze nalézti, ač je známa pod jménem „věta Bolzano-Weierstrassova".

V následujících paragrafech pojednává Bolzano o složených funkcích; v § 31 podává větu o spojitosti složených funkcí $f(\varphi(x))$; a sice formuluje tuto větu též pro jednostrannou spojitost. Při funkcích jen jednostranně spojitých ovšem mohou nastati velmi složité případy; není jasno, byl-li si Bolzano všech těchto možností vědom; věta i její důkaz jsou však správné, posoudíme-li jen trochu shovívavě poněkud spletitou slovní formulaci.

V §§ 34—46 probírá Bolzano nejjednodušší věty o spojitosti funkcí několika proměnných; tato část jeho díla je však založena na nesprávné větě. Bolzano totiž definuje v § 38 spojitost funkce $f(x, y)$[18]) takto: $f(x, y)$ je spojitá v bodě (x_0, y_0), existuje-li kladné číslo δ tak, že 1. $f(x, y_0 + k)$ je spojitou funkcí proměnné x v bodě x_0, je-li $|k| < \delta$, 2. $f(x_0 + h, y)$ je spojitou funkcí proměnné y v bodě y_0, je-li $|h| < \delta$. V § 39 snaží se pak dokázati: Je-li $f(x, y)$ spojitá v bodě x_0, y_0, jest

$$\lim_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \tag{3}$$

Tato věta jest ovšem nesprávná; existují funkce $f(x, y)$, jež jsou spojité v x a též spojité v y a jež přesto nesplňují rovnici (3). Omyl Bolzanův je prostě tento: platí

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)) +$$
$$+ (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)).$$

První závorka konverguje za našich předpokladů k nule, když $h \to 0$; rovněž druhá závorka konverguje k nule, když $k \to 0$ *při pevném* h. Bolzano však přehlédl, že není nijak zaručeno, že druhá závorka konverguje k nule, když h, k *současně* konvergují k nule. To spočívá v tom, že spojitost funkce $f(x, y)$ v proměnné y nemusí být stejnoměrná vzhledem k proměnné x. Je dosti podivuhodno, že Bolzano zde dělá touž chybu, před kterou v § 12 tak důrazně varoval. To je tedy *druhý závažný omyl* Bolzanův; táž chybná úvaha vyskytuje se též u Cauchyho[19]) a je zcela dobře možno, že Bolzano ji odtamtud bez hlubšího rozboru převzal.

Velmi zajímavé jsou §§ 47—48. Již v § 29 Bolzano dokázal, že každá funkce $f(x)$, která je spojitá v (a, b), má tuto vlastnost:

Vlastnost (A). Je-li $a < x_1 < x_2 < b$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, potom funkce $f(x)$ nabývá v intervalu (x_1, x_2) všech hodnot, jež leží mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$.

Bolzano klade si nyní otázku: je vlastnost (A) snad charakteristická pro spojité funkce? a odpovídá zcela správně: nikoliv;

---

[18]) Bolzano to provádí pro funkce n proměnných a přihlíží také k jednostranné spojitosti.

[19]) Cours d'Analyse, I^ère Partie, Chap. II, § 2. Dnešní definice spojitosti funkcí několika proměnných pochází asi až z doby Weierstrassovy, okolo r. 1870.

existují dokonce funkce, jež mají vlastnost (A), nejsou však v žádném bodě spojité. Věta jistě podivuhodná na svou dobu, uvědomíme-li si, že ještě Lebesgue[20]) si stěžuje, že se v některých francouzských školách zavádí spojitost pomocí vlastnosti (A). Bolzano pokouší se také svůj výrok dokázati; k tomuto pokusu je však obtížno zaujmouti stanovisko, dokud neznáme přesně Bolzanovu definici funkce.[21])

V §§ 49—59 podává Bolzano velmi zajímavou teorii monotonních funkcí. Abych čtenáři na příkladě ukázal precisnost Bolzanova postupu, dovolím si zde stručně naznačiti obsah těchto paragrafů.

§ 49. Existují funkce $f(x)$, které buď pro všechna x (nebo aspoň pro všechna x jistého otevřeného intervalu) mají tuto vlastnost: je-li $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$. Důkaz: funkce cx, ($c > 0$) má tuto vlastnost, neboť z $x_1 < x_2$ plyne $cx_1 < cx_2$. Obdobně pro $c < 0$ dostáváme funkci, pro kterou platí: je-li $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$.

§ 50. Takovéto funkce budeme nazývat rostoucími (buď stále rostoucími nebo rostoucími v intervalu (a, b)) resp. klesajícími.

§ 51. Není-li $f(x)$ rostoucí v (a, b), musí existovat čísla μ, ϱ tak, že $a \leqq \mu < \varrho \leqq b$, $f(\mu) \geqq f(\varrho)$; a několik podobných poznámek.

§ 52. U funkce rostoucí má $f(x + h) — f(x)$ totéž znamení jako h; naopak u klesající.

§ 53. Funkce rostoucí (klesající) nabývá každé hodnoty nejvýše jednou (s podrobným důkazem).

§ 54. U rostoucí funkce plyne z nerovnosti $f(\varrho) > f(\mu)$ nerovnost $\varrho > \mu$; naopak u klesající funkce (s důkazem).

§ 55. Jestliže funkce $f(x)$ má v intervalu (a, b) vlastnost (A) a existují-li tři čísla $\varepsilon, \mu, \varrho$, $(a < \varepsilon < \mu < \varrho < b)$ tak, že není ani $f(\varepsilon) < f(\mu) < f(\varrho)$ ani $f(\varepsilon) > f(\mu) > f(\varrho)$, potom nabývá $f(x)$ některé ze svých hodnot aspoň dvakráte.

Důkaz: Kdyby dvě z čísel $f(\varepsilon)$, $f(\mu)$, $f(\varrho)$ byla stejná, bylo by tvrzení jasné. Zbývá tedy vyšetřiti případy 1. $f(\varepsilon) < f(\mu) > f(\varrho)$, 2. $f(\varepsilon) > f(\mu) < f(\varrho)$. Ad 1.: buď jest α) $f(\varepsilon) < f(\varrho) < f(\mu)$ nebo β) $f(\varrho) < f(\varepsilon) < f(\mu)$. V případě 1 α) jest $f(\varrho)$ mezi $f(\varepsilon)$ a $f(\mu)$, existuje tedy (podle vlastnosti (A)) číslo λ, $(\varepsilon < \lambda < \mu)$ tak, že $f(\lambda) = f(\varrho)$;

---

[20]) Lebesgue, Leçons sur l'intégration (1904), str. 89.

[21]) Bereme-li totiž pojem funkce ve smyslu dnes obyklém (každé hodnotě x z jistého oboru odpovídá jedna *jediná* hodnota y), musíme na Bolzanův důkaz pohlížeti jako na zcela nezdařený. Bolzano však v těchto §§ 47—48 *neklade* k slovu „Function" adjektivum „einförmig"; je tedy zcela dobře možno, že Bolzano myslí též na jakési funkce „mnohoznačné" (viz mé poznámky k Bolzanovu pojmu funkce); potom by se snad mohl (při dostatečném rozšíření pojmu funkce) důkaz Bolzanův pokládati za správný (zcela nebo částečně); ale věta sama by ovšem potom ztrácela mnoho na zajímavosti. Buď tedy obsahují §§ 47—48 velmi zajímavou větu s nesprávným důkazem nebo méně zajímavou větu se správným (aspoň z části) důkazem.

ježto $\lambda \neq \varrho$, je tím tvrzení dokázáno. Obdobně se diskutují ostatní případy.

§ 56. Jestliže tedy funkce $f(x)$ má v intervalu (a, b) vlastnost (A) a nabývá tam každé hodnoty nejvýše jednou, potom pro $a < \varepsilon < \mu < \varrho < b$ musí platiti buď $f(\varepsilon) < f(\mu) < f(\varrho)$ nebo $f(\varepsilon) > f(\mu) > f(\varrho)$.[22])

§ 57. Obdobně pro více čísel $\varepsilon < \mu < \varrho < \lambda < \nu < \ldots$

§ 58. Jestliže funkce $f(x)$ má v intervalu (a, b) vlastnost (A) a nabývá tam každé hodnoty nejvýše jednou, je buď rostoucí nebo klesající v (a, b).

Důkaz: Zvolme dvě čísla μ, ϱ, $(a < \mu < \varrho < b)$; jest jistě $f(\mu) \neq f(\varrho)$. Diskutujme třeba případ $f(\mu) < f(\varrho)$; tvrdím, že v tomto případě je $f(x)$ rostoucí v (a, b). To znamená: budiž $a < x_1 < x_2 < b$; mám dokázati $f(x_1) < f(x_2)$. Diskuse závisí na vzájemné poloze bodů x_1, x_2, μ, ϱ; Bolzano tuto diskusi úplně provádí.[23]) Na př., je-li $\mu < x_1 < \varrho < x_2$, musí býti podle § 57 buď $f(\mu) < f(x_1) < f(\varrho) < f(x_2)$ nebo $f(\mu) > f(x_1) > f(\varrho) > f(x_2)$; druhý případ je však vyloučen, ježto $f(\mu) < f(\varrho)$; tedy platí první serie nerovností, a tedy $f(x_1) < f(x_2)$.

§ 59. Jestliže $f(x)$, rostoucí (nebo klesající) v (a, b), má v tomto intervalu vlastnost (A), je $f(x)$ spojitá v (a, b). Podivuhodný (na svou dobu) doplněk k §§ 47—48!

Důkaz: Budiž třeba $f(x)$ rostoucí a dokazujme spojitost zprava v bodě x_0 $(a < x_0 < b)$. Zvolme h_0 tak, že $x_0 < x_0 + h_0 < b$; pak jest $f(x_0 + h_0) - f(x_0) = D > 0$. Budiž dáno $\varepsilon > 0$ a zvolme μ $(0 < \mu < 1)$ tak, že $\mu D < \varepsilon$. Potom je $f(x_0) < f(x_0) + \mu D < f(x_0 + h_0)$ a tedy podle vlastnosti (A) existuje h_1, $(0 < h_1 < h_0)$ tak, že $f(x_0 + h_1) = f(x_0) + \mu D$; tedy $0 < f(x_0 + h_1) - f(x_0) < \varepsilon$ a (ježto $f(x)$ roste) tím spíše $0 < f(x_0 + h) - f(x_0) < \varepsilon$ pro $0 < h < h_1$. Obdivuhodná partie! Bolzanův postup v §§ 49—59 je vskutku bez nejmenšího kazu.

Od funkcí monotonních přechází Bolzano k teorii relativních extrémů. Přechod tvoří tato věta (§ 61): Je-li $a < b < c$, a je-li funkce $f(x)$ 1. rostoucí v (a, b) 2. klesající v (b, c), 3. spojitá v bodě b,[24]) potom existuje $\delta > 0$ tak, že $f(b) > f(b + h)$ pro $0 < |h| < \delta$. Následuje definice relativních extrémů (§ 62): $f(x)$ má relativní

[22]) Pozor! Dokázali jsme dosud jen, že pro každou takovou trojici čísel $\varepsilon, \mu, \varrho$ platí *jeden* ze vztahů $f(\varepsilon) < f(\mu) < f(\varrho)$; $f(\varepsilon) > f(\mu) > f(\varrho)$; dosud jsme však nedokázali, že pro *všechny* takové trojice $\varepsilon, \mu, \varrho$ platí *tentýž* z obou vztahů; kdybychom už to měli dokázáno, byla by $f(x)$ zřejmě buď rostoucí nebo klesající v (a, b). To je skutečně pravda, ale bude to dokázáno až v § 58.

[23]) V diskusi jsou malá náhodná přehlédnutí.

[24]) Bolzano praví „um den Wert b herum stetig"; používá však při důkazu jenom spojitosti v bodě b, nikoliv v *okolí* bodu b. Důkaz, v jádře správný, není zcela dokonale proveden.

maximum v bodě b, existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že $f(x) < f(b)$ pro $0 < |x - b| < \delta$; obdobně pro relativní minimum. Bolzano definuje také jednostranné extrémy. Na př. relativní maximum zprava v bodě b nastává podle jeho definice tehdy, jestliže předně $f(b + h) < f(b)$ pro dosti malá kladná h a jestliže za druhé $f(b - h)$ buď neexistuje nebo je rovno $f(b)$ pro dosti malá kladná h. K této ne dosti vhodné definici jednostranných extrémů byl Bolzano veden svou nesprávnou představou o rozdělení kořenů rovnice $f(x) = M$, spočívající na nesprávném § 18. Vliv tohoto § 18 jeví se pak v dalším vybudování teorie maxim a minim několika nesprávnými větami a důkazy. Přesto však odstavce těmto otázkám věnované obsahují mnoho zajímavých jednotlivostí; o některých se blíže zmíním. Především zabývá se Bolzano dosti obšírně funkcemi, jež vykazují „nekonečně mnoho oscilací" (§§ 65—75). Tak ukazuje v § 65 (konstruováním vhodného příkladu), že lze sestrojiti funkci $f(x)$, spojitou v (a, b), jež má tuto vlastnost: existují dvě čísla m, M a posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots, (a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < b)$ tak, že

$$m < M,^{25)} \quad f(x_{2n-1}) \geqq M, \quad f(x_{2n}) \leqq m. \tag{4}$$

V § 69 ukazuje Bolzano, že funkce $f(x)$, mající tyto vlastnosti, nemůže býti spojitá v *uzavřeném* intervalu $\langle a, b\rangle$. Příklad v § 65 poskytuje zároveň příklad funkce spojité v (a, b), jež má tuto vlastnost: existuje číslo μ (třeba $\mu = \frac{1}{2}(m + M)$) a posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots, (a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < b)$ tak, že

$$f(x_{2n-1}) > \mu, \quad f(x_{2n}) < \mu. \tag{5}$$

Vlastnost (5) říká ovšem *méně* než vlastnost (4) a Bolzano ukazuje v § 70 (na rozdíl od vlastnosti (A)), že i funkce spojitá v *uzavřeném* intervalu $\langle a, b\rangle$ může míti vlastnost (5.) Tento rozdíl mezi vlastností (4) a (5) spočívá, jak Bolzano správně podotýká, v tom, že — zhruba řečeno — nerovnosti (5) nevylučují ještě existenci limity $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n)$, kdežto nerovnosti (4) ji vylučují. Bolzano uvádí ještě několik věcí podobného rázu; bylo by snad zbytečno, abych jimi čtenáře rozptyloval. Musím však poznamenati, že jsem se nezmínil dosud o § 63, § 64, § 68. Z nich § 63 a § 68 obsahují nesprávné výsledky, spočívající na nesprávném § 18. V § 64 dokazuje Bolzano, že pro funkci, spojitou v $\langle a, b\rangle$ a rostoucí v (a, b) platí $f(a) < f(c) < f(b)$ pro $a < c < b$. Důkaz provádí Bolzano takto: zvolme h tak, že $a < a + h < c$; potom je $f(a + h) < f(c)$, $\lim\limits_{h=0+} f(a + h) = f(a)$; z toho prý plyne $f(a) < f(c)$. Při obecné funkci ovšem bychom směli usuzovati pouze $f(a) \leqq f(c)$; při rostoucí funkci je úsudek správný. Bolzano však při tomto limitním přechodu monotonii funkce $f(x)$

---

[25]) Tuto podmínku zapomněl Bolzano vysloviti, ač ji měl zřejmě na mysli.

nezdůrazňuje — zdá se tedy, že se zde dopustil omylu. Ještě musím poznamenati, že slovní formulace není v §§ 64—74 všude zcela dokonalá; zřejmě jde však jen o jazykové obtíže, nikoliv o omyly či skutečná přehlédnutí.

Již v těchto odstavcích (§§ 65, 70, 73) sestrojil Bolzano několik pozoruhodných příkladů funkcí, jejichž (ohraničený) definiční obor nelze rozděliti na konečný počet intervalů monotonie; nejvelkolepější příklad toho druhu podává však Bolzano v § 75; sestrojuje totiž funkci $f(x)$, spojitou v $\langle a, b\rangle$, jež není monotonní v žádném částečném intervalu. (Později (2. Abschnitt, § 19) ukazuje Bolzano, že body, v nichž $f(x)$ nemá derivaci, leží všude hustě v intervalu $\langle a, b\rangle$.[26]) Již to, že Bolzana vůbec napadlo, že by taková funkce mohla existovati, zasluhuje obdivu; tím většího obdivu zasluhuje, že se mu podařilo takovou funkci skutečně sestrojiti. Tato funkce je slavná t. zv. „funkce Bolzanova". Je dostatečně známa z literatury, takže mohu postupovati stručně.

Bolzano definuje v intervalu $\langle a, b\rangle$ posloupnost spojitých funkcí

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots; \tag{6}$$

při tom čára $y = f_n(x)$ je lomená čára, složená z konečného počtu úseček (tento počet roste současně s n do nekonečna). Body, v nichž se střídá stoupání funkce $f_n(x)$ s klesáním (to může patrně nastati jen v rozích té lomené čáry), vyplňují, je-li n dosti velké, interval $\langle a, b\rangle$ tak hustě, jak si přejeme (to znamená: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že funkce $f_n(x)$ není monotonní v žádném intervalu délky ε, je-li $n > n_0$). Mimo to všechny rohy čáry $y = f_n(x)$ leží také na všech čarách následujících $y = f_m(x)$, $(m > n)$. Je jasno: existuje-li limita

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x), \tag{7}$$

potom není $f(x)$ monotonní v žádném částečném intervalu z $\langle a, b\rangle$; neboť ve všech rozích čáry $y = f_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ jest zřejmě $f(x) = f_n(x)$[27]) a ony rohy čáry $y = f_n(x)$, v nichž se stoupání střídá s klesáním, leží při dosti velkém n tak hustě v intervalu $\langle a, b\rangle$, jak si přejeme. Až sem je Bolzanův postup (jejž jsem úmyslně trochu přeházel) správný. Zbývá jen ještě dokázati, že limita (7) existuje a že jest spojitou funkcí x v intervalu $\langle a, b\rangle$. Existenci této limity

[26]) Víme dnes, že tato funkce nemá derivaci vůbec v žádném bodě; viz: Jašek, O funkci Bolzanově, Časopis 51 (1922), str. 69—76; Jašek, Aus dem handschriftlichen Nachlass B. Bolzanos, Věstník král. č. spol. nauk, 1920-21; Rychlík, Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse, Věstník král. č. spol. nauk, 1921-22; Jarník, O funkci Bolzanově, Časopis 51 (1922), str. 248—264.

[27]) Neboť pro tyto body jest $f_m(x) = f_n(x)$ pro $m > n$ a tedy též $f(x) = \lim_{m=\infty} f_m(x) = f_n(x)$.

dokazuje Bolzano v celku správně, totiž v podstatě na základě Cauchy-Bolzanovy podmínky.[28]) Za to při důkazu *spojitosti* funkce $f(x)$ dopouští se Bolzano podstatné chyby. Usuzuje totiž prostě takto: funkce $f(x)$ je limitou funkcí spojitých; a *konvergentní posloupnost spojitých funkcí má vždy za limitu funkci spojitou.* Poslední věta je ovšem nesprávná; je však správná, požadujeme-li na př. *stejnoměrnou* konvergenci. Bolzano zde učinil obdobnou chybu jako v § 39; přehlédl totiž nutnost požadavku stejnoměrnosti (nebo něčeho podobného).[29]) Opět je to v podstatě onen omyl, před nímž varoval v § 12. To je tedy *třetí závažný omyl* Bolzanův; táž chyba vyskytuje se ostatně i u Cauchyho.[30])

§ 76—78 obsahují několik vět o střídání maxim a minim, jsou však vydatně zatíženy nesprávným § 18.

Ve zbytku 1. oddílu zabývá se Bolzano nespojitými funkcemi; toto téma vyžadovalo by však k dokonalému zpracování hlubších znalostí z teorie množství a není tedy divu, podává-li zde Bolzano úvahy málo uspokojivé. V § 79 vyslovuje Bolzano nesprávnou větu, že existují funkce rostoucí, jež v žádném bodě nejsou spojité. V §§ 80—81 vyslovuje Bolzano opět nesprávnou větu, týkající se existence limit zprava a zleva u jistého typu nespojitých funkcí. Důkazy v §§ 79—80 jsou nejen nesprávné, nýbrž i formálně tak nedokonalé, že působí dojmem pouhého náčrtku. V posledním § 82 vyslovuje Bolzano věty celkem správné: existuje funkce rostoucí v $\langle a, b\rangle$,[31]) jež jest nespojitá pouze v isolovaných bodech intervalu (a, b), jichž je nekonečně mnoho. Součet „skoků“ u takové funkce musí tvořiti řadu konvergentní; tato podmínka odpadá, jestliže *nepožadujeme* monotonii. Důkaz jest v jádru správný, v jednotlivostech místy ne zcela dokonalý.

Zde končí 1. oddíl; ohlédněme se ještě jednou po něm! Co především upoutá naši pozornost v díle Bolzanově, jest jeho ryze moderní, aritmetisující stanovisko. Bolzano zcela plně poznal nepřípustnost

---

[28]) O této podmínce viz poznámku [16]) pod čarou.

[29]) Při důkazu konvergence posloupnosti (4) odvodil Bolzano pro rozdíl $|f(x) - f_n(x)|$ odhad *nezávislý na x,* takže stejnoměrnost té konvergence vlastně implicite dokázal; na základě tohoto odhadu byl by mohl spojitost funkce $f(x)$ dokázati přímo na několika řádcích. Považuji však za jisté, že si Bolzano tuto okolnost neuvědomil; jednak byl by jinak na věc tak důležitou jistě upozornil, jednak dopustil se téže chyby už v § 39.

[30]) Cours d'Analyse, Ième Partie, Chap. VI, § 1. První, kdo upozornil na nesprávnost této věty a ve specielním případě správnou úvahu provedl, byl asi Abel (1826 v slavném pojednání o binomické řadě). Obecná věta „stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí spojitých má za limitu funkci spojitou“ pochází asi z let 1847—48. Též Cauchy dodatečně poznal svůj omyl a dokázal tuto větu (1853). Srovnej článek Pringsheimův, Grundlagen der allgemeinen Functionenlehre, Enzyklop. der math. Wissenschaften, II A 1.

[31]) Předpoklady v koncových bodech nejsou dosti jasně vysloveny.

t. zv. „názoru“ v matematických důkazech a také jej ze svých úvah s obdivuhodnou důsledností a zdarem (uvažme, že šlo vlastně o první systematický a zcela důsledný pokus toho druhu) vymýtil.[32]) Již jeho definice spojitosti v § 2 zasluhuje uznání tím, že místo dosavadní spojitosti v *intervalu* (Cauchy) zavádí spojitost v *bodě*; jak plně si byl vědom významu této změny, je patrno z toho, že konstruuje v § 10 funkci, spojitou v *jediném* bodě. Další vybudování teorie spojitosti funkcí jedné proměnné obsahuje široké partie, v nichž není jediného kazu; vzpomeňme jen na §§ 19—30 (kde jsou bezvadně dokázány základní věty o spojitých funkcích); nebo vzpomeňme na neobyčejně krásnou teorii monotonních funkcí (§§ 49—59); nebo zastavme se u §§ 65—75, v nichž Bolzano tak důkladně rozebírá možnosti, jež mohou nastati u funkcí s nekonečně mnoha oscilacemi. Již jediný příklad z § 75 (Bolzanova funkce) stačí, abychom si vytvořili vysoké mínění o Bolzanovu nadání pro základní otázky matematické analysy; nevím však, nemáme-li si ještě výše nad tuto oslňující jednotlivost ceniti dokonalé výstavby celku, na př. v §§ 19—30, 49—59.[33])

Stejně jako ve velkých obrysech, jeví se i v podrobnostech obdivuhodný smysl Bolzanův pro čistotu metody; zvláště zřetelně jeví se to v příkladech, na nichž ukazuje různé možnosti, jež se mohou vyskytovati u spojitých funkcí. Vezměme na př. § 65, v němž Bolzano konstruuje funkci spojitou v intervalu $0 \leqq x < 1$,[34]) jež nabývá nekonečně mnohokráte „střídavě“ hodnot 0 a $\frac{1}{2}$. Bolzano sestrojuje tu funkci takto:

$$f(0) = 0, f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}, f(\tfrac{3}{4}) = 0, f(\tfrac{7}{8}) = \tfrac{1}{2}, f(\tfrac{15}{16}) = 0, f(\tfrac{31}{32}) = \tfrac{1}{2}; \ldots;$$

pro $1 - \dfrac{1}{2^n} \leqq x \leqq 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ budiž $f(x)$ lineární. V § 66 poznamenává Bolzano: také na př. funkce $g(x) = \sin \log (1 - x)$ má obdobné vlastnosti. Bolzano byl si jistě dobře vědom toho, že funkce $\sin \log (1 - x)$ by neměla žádoucí průkaznosti, ježto v této knize nebyly funkce $\sin x$, $\log x$ nikde řádně definovány; proto napřed konstruuje (způsobem tehdy jistě dosti neobvyklým) funkci $f(x)$ a jen mimochodem uvádí funkci $g(x)$; obdobné příklady najdeme v §§ 70 a 71.

O Bolzanově pečlivosti při definicích a o tom, jak jasně si uvědomuje dosah jednotlivých předpokladů, jsme se zmínili na příslušných místech. Viděli jsme též, jak pečlivě zkoumá Bolzano

---

[32]) Toto stanovisko Bolzanovo souvisí jistě úzce s jeho filosofickými názory o podstatě a metodách matematiky; viz na př. výrazný citát, uvedený v Petrově předmluvě na str. XI.—XII.

[33]) Všimněme si v těchto partiích na př. toho, jak plně si Bolzano uvědomuje vliv otevřenosti a uzavřenosti intervalu!

[34]) Bod $x = 0$ jsem přidal pro zjednodušení.

všechny možnosti, jež se při spojitosti a nespojitosti funkcí mohou vyskytovati; s tím souvisí řada existenčních vět, doložených příklady (hlavně na př. v §§ 65—75). Také při definicích vyskytují se u Bolzana takové existenční věty; na př. dříve než definuje funkci rostoucí, ukáže na příkladě, že existují funkce, jež vlastnost v definici vytčenou vskutku mají.

Vedle těchto kladných hodnot Bolzanova díla setkali jsme se však i s několika omyly; vylučme ze svých úvah nejasné §§ 47—48, málo závažný § 64 a poslední odstavce (hlavně §§ 79—81), v nichž Bolzano se pustil do problémů, pro něž doba ještě naprosto nebyla zralá; potom zbývají nám v podstatě jen tři závažné omyly: v §§ 18, 39, 75.

Chyba v § 18 působí dojmem náhodného ochabnutí Bolzanova důvtipu; jest ovšem s podivem, že Bolzano si dodatečně nesprávnost tohoto odstavce neuvědomil, zvláště když sestrojil funkci (§ 70 a 2. oddíl, § 26), která tuto nesprávnost zřejmě ukazuje.

Druhý a třetí omyl (§ 39 a § 75) mají společný základ: totiž nevytčení požadavku *stejnoměrnosti*; v § 39 postrádáme v předpokladech stejnoměrnost spojitosti, v § 75 schází v důkazu stejnoměrnost konvergence. Viděli jsme také, že chyby v § 39 a § 75 jsou podobného rázu jako chybná úvaha, před níž Bolzano v § 12 sám tak důrazně varuje (viz též § 13); uvidíme ještě dále (2. oddíl, § 27), jak si ještě v jiném problému význam stejnoměrnosti (nebo nějakého podobného pojmu) uvědomil. Bolzano si tedy místy potřebnost nějakého pojmu toho druhu uvědomil, nepodařilo se mu však tento pojem vhodně formulovati; proto na těch místech, kde vytýká nesprávnost některých úvah, jež bez zdůvodnění postupují tak, jakoby uvažovaná spojitost byla stejnoměrná, vyjadřuje se Bolzano celkem správně (viz zvláště § 12); naopak na místech, kde by měl stejnoměrnosti buď využíti nebo ji předpokládati (§ 39, § 75, 2. oddíl, § 27 a jinde), buď se nezhostil svého úkolu s plným zdarem nebo na význam stejnoměrnosti vůbec zapomněl. Je myslitelno, kdyby byl Bolzano mohl si porozprávěti o svých pracích s interesovaným kolegou nebo s chápavým žákem, že by byl tyto omyly buď sám nebo s jejich pomocí poznal. Je ovšem otázka, zda by byl za své nesprávné úvahy našel vhodné náhrady (hlavně u § 39 — spojitost funkcí několika proměnných — je to pochybno; důkaz spojitosti Bolzanovy funkce v § 75 byl by mohl snadno provésti přímo, bez okliky přes obecné věty o stejnoměrné konvergenci).

Považujeme-li tedy § 18 za náhodný omyl (jenž bohužel zkazil i několik pozdějších odstavců), vidíme, že jediným podstatným nedostatkem tohoto 1. oddílu jsou omyly, vztahující se k pojmu stejnoměrnosti. Tyto omyly jednak způsobily jistou nedokonalost v diskusi Bolzanovy funkce (§ 75), především však znemožnily Bolzanovi správné vybudování teorie spojitých funkcí několika proměnných (vlivem § 39). Za to teorie spojitosti funkcí jedné proměnné — i když vynecháme všechny nesprávné odstavce — jest vybudována u Bolzana s úplností vskutku obdivuhodnou.[35])

Bolzano byl si jistě vědom revoluční novosti svého díla; zajímavé je v tomto ohledu jedno místo z Úvodu (Einleitung, § 2); odstavec je věcně málo zajímavý, tím zajímavější je psychologicky. Bolzano praví v něm asi toto: Funkce, jež lze vyjádřiti jediným předpisem, platným pro všechna x, budeme nazývati funkcemi 1. druhu (na př. $f(x) = 30x + 5$ nebo $f(x) = \sin x$ atd.); funkce, u nichž to není možno, budem nazývati funkcemi 2. druhu (na př. $f(x) = x$ pro $x < 1$, $f(x) = 2$ pro $1 \leqq x \leqq 2$, $f(x) = x^3$ pro $x > 2$). Je pochopitelně velmi důležito rozeznávati, zda funkce o kterou jde, je prvního či druhého druhu. A na konci § 2 praví Bolzano: budeme se zabývati ne sice výhradně, ale přesto většinou jen funkcemi prvního druhu. K tomu bych poznamenal: 1. Z celého 1. oddílu je patrno, že rozdíl mezi funkcemi 1. a 2. druhu nemá pro Bolzanovy úvahy vůbec důležitosti. 2. Zmiňuje-li se Bolzano někde v dalším o funkcích 1. a 2. druhu, činí to jen proto, aby zdůraznil, že jeho úvahy platí jak pro funkce 1. druhu tak pro funkce 2. druhu. 3. Zdá se mi pochybno, že by se Bolzano, tak náročný ve svých definicích, byl mohl spokojiti s pojmy tak špatně vymezenými, jako jsou „funkce 1. a 2. druhu". Spíše se mi zdá,[36]) že celý tento odstavec je známkou rozpaků, jež Bolzano pociťoval, vida novost svých problémů a metod; na štěstí však Bolzano, jak se zdá, brzo na tyto rozpaky zapomněl a vytvořil tak dílo skutečně nové, originální, průkopnické a v mnohých částech bezvadné.

Zweiter Abschnitt. Abgeleitete Functionen.

Tento oddíl, jak již z nadpisu zřejmo, pojednává o základech diferenciálního počtu. Základní stanovisko Bolzanovo je stejné jako v prvním oddílu; podstatný je však rozdíl v provedení. Kdežto v prvním oddílu, jak jsme viděli, zhostil se Bolzano svého úkolu většinou s obdivuhodným zdarem, nalézáme v druhém oddílu

[35]) Zmínil jsem se hned na počátku o tom, že Bolzano nebyl matematický rutinér. Na méně závažných místech objevují se proto u něho někdy přehlédnutí až nepochopitelně naivní. Nemluvil jsem o nich, ježto pro celek nemají významu; uvádím však spoň dva takové příklady na ukázku: v § 35 tvrdí Bolzano, že funkce $x^2 + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{2-y} + \frac{1}{3-y} + \frac{1}{4-y} + \ldots$ je spojitou funkcí x pro každé y, vyjma pro $y = 1, 2, 3, 4, \ldots$; v oddílu 2, § 12 praví: že ze spojitosti funkce neplyne existence derivace, vidíme na funkci $\frac{1}{1-x}$ pro $x = 1$.

[36]) Je to ovšem jen můj osobní dojem; bylo by třeba historika, kdyby se měl nalézti pravý význam tohoto odstavce v díle Bolzanově.

pestrou směsici správných úvah i závažných omylů. Je to zcela pochopitelno, neboť důkazy, o něž se Bolzano zde pokouší, jsou většinou podstatně složitější, než v prvním oddílu; jejich dokonalé provedení bylo by vyžadovalo — vedle hlubokého a kritického ducha — též značné „řemeslné" zručnosti a poznamenali jsme již, že Bolzano velký rutinér nebyl; ostatně je těžko požadovati od někoho rutinu v oboru, jejž musil sám namáhavě od prvních počátků stavěti.[37]) Těmito poznámkami nechci se nikterak nešetrně dotýkati obdivuhodného díla Bolzanova: stejně jako první oddíl jest i druhý oddíl dílem průkopnickým a svrchovaně významným; Bolzano ukazuje v něm, na jakých základech jest nutno vybudovati diferenciální počet a jakými metodami má se toto vybudování provésti. Základní hledisko, definice, stanovisko při důkazech jsou vhodné a bez kazu; pouze provedení — místy příliš obtížné — na četných místech se nezdařilo. Z tohoto důvodu nebudu zde tento oddíl probírati odstavec za odstavcem; dostali bychom tak pouze nepřehlednou směs posudků kladných a záporných, propletených sledováním vzájemného vlivu jednotlivých omylů a nejasností. Také se necítím k tomuto složitému úkolu kompetentním: důkazy, v nichž je zdravá myšlenka, jež však obsahují kazy, nejsou proto ještě bezcenné; jejich cenu jest však možno odhadnouti pouze relativně, vzhledem k době a k poměrům, v nichž vznikly — k tomuto úkolu jest však povolán pouze historik matematiky. Omezím se proto na některá místa, jež se mi zdají býti zvláště zajímavá. Čtenář ostatně si mohl učiniti úplnější představu o postupu Bolzanovy práce z referátu o prvním oddílu.

Oddíl druhý jest opět rozdělen na paragrafy (§§ 1—99). Definice derivace jest obsažena v § 2, kde Bolzano opět definuje (podobně jako při spojitosti) nejenom oboustrannou derivaci, nýbrž i derivaci zprava a zleva. Diskutuje dále obšírně důsledky této definice; tak v § 12 ukazuje: má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 na př. derivaci zprava, jest $f(x)$ v bodě x_0 spojitá zprava.[38]) Tuto větu nelze však obrátiti: funkce spojitá v bodě x_0 nemusí míti v bodě x_0 derivaci. V § 19 ukazuje dokonce Bolzano, že body, v nichž spojitá „funkce Bolzanova" (sestrojená v 1. oddílu, § 75) nemá derivaci (oboustrannou), tvoří množství všude husté v intervalu $\langle a, b\rangle$. Další výklady o diferenciálním počtu obsahují mnoho zajímavých jednotlivostí; jak jsem však řekl, nebudu se jimi podrobně zabývati. Uvádím pouze — jako příklad — následující

[37]) Ve složitějších úvahách jistě Bolzanovi velmi vadil nedostatek vhodné symboliky a terminologie (na př. ani pro absolutní hodnotu nezavádí Bolzano zvláštní značky, nýbrž vždy v textu zvlášť poznamenává, že jde o absolutní hodnotu).

[38]) Bolzano mluví (téměř vždy) jen o *vlastní* (t. j. konečné) derivaci.

drobnost z teorie relativních extrémů (§§ 76—77): Pro funkci $f(x)$ mohou v bodě x_0 nastati tyto případy: 1. $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci zprava i zleva, 2. $f(x)$ nemá v bodě x_0 buď derivaci zprava nebo zleva (nebo obě). V případě 1. jsou možny tyto případy: 1*a*) obě derivace (zprava i zleva) mají totéž znamení, 1*b*) mají opačná znamení, 1*c*) aspoň jedna z nich se rovná nule. A Bolzano ukazuje: v případě 1*a*) nemůže nastati extrém, v případě 1*b*) musí nastati extrém, v případě 1*c*) a v případě 2. může, ale nemusí nastati extrém.

Nás bude hlavně zajímati, jak se Bolzano staví k základním větám diferenciálního počtu: k větě o střední hodnotě a k větě Taylorově.

Větu o střední hodnotě dokazujeme a vyslovujeme dnes takto: napřed se dokáže věta Rolleova a z ní se jednoduchou transformací obdrží věta o střední hodnotě, která zní takto: $f(x)$ nechť je spojitá v $\langle a, b\rangle$ a nechť má derivaci v (a, b);[39]) potom existuje číslo c $(a < c < b)$ tak, že

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c).^{40})$$

Důkaz Bolzanův probíhá podstatně jinak; jest podobný důkazu Cauchyovu,[41]) liší se však od něho v jednom důležitém bodě. Důkaz Cauchyův probíhá asi takto: předpokládejme, že $f(x)$ je spojitá a má spojitou derivaci v $\langle a, b\rangle$. *Ježto*

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \tag{1}$$

lze k libovolnému kladnému číslu ε zvoliti kladné číslo δ tak, že

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro všechna h, pro něž $0 < |h| \leqq \delta$. Úsudek, obsažený v této větě, je ovšem nesprávný; Cauchy v něm totiž vlastně tvrdí, že konvergence výrazu $h^{-1}(f(x+h) - f(x))$ k funkci $f'(x)$ je *stejnoměrná*; to je sice pravda (když $f'(x)$ je spojitá), ale není to samozřejmé, jest třeba tuto stejnoměrnost dokázati.[42]) Další postup důkazu jest celkem správný a probíhá asi takto: K číslu $\varepsilon > 0$ najděme číslo $\delta > 0$ tak, jak bylo svrchu vytčeno a rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ dělicími body $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b)$ tak, že $x_i - x_{i-1} < \delta$. Budiž A

[39]) Tato derivace smí býti i nevlastní.

[40]) Dnešní forma důkazu připisuje se Bonnetovi.

[41]) Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, 7ème leçon.

[42]) Cauchy zavádí předpoklad o spojitosti derivace až o něco později, takže vlastně i jeho tvrzení je nesprávné; podobně nemá vlastně později práva mluviti o největší a nejmenší hodnotě funkce $f'(x)$.

nejmenší a B největší hodnota funkce $f'(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest

$$A - \varepsilon \leqq f'(x_{i-1}) - \varepsilon < \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} < f'(x_{i-1}) + \varepsilon \leqq B + \varepsilon,$$

a tedy

$$(A - \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) < f(x_i) - f(x_{i-1}) < (B + \varepsilon)(x_i - x_{i-1});$$

sečtu tyto nerovnosti pro $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ a dostanu

$$(A - \varepsilon)(b - a) < f(b) - f(a) < (B + \varepsilon)(b - a)$$

a tedy — ježto $\varepsilon > 0$ je libovolné —

$$A(b - a) \leqq f(b) - f(a) \leqq B(b - a),$$

$$f(b) - f(a) = M(b - a) \quad (\text{kde } A \leqq M \leqq B).$$

Ježto A a B jsou hodnoty spojité funkce $f'(x)$ a ježto $A \leqq M \leqq B$, musí existovati c takové $(a \leqq c \leqq b)$, že $f'(x) = M$ a tedy

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \quad (a \leqq c \leqq b).$$

Bolzano přejímá (§§ 28, 29) v podstatě tento Cauchyův důkaz; uvědomil si však Cauchyův omyl a snaží se jej v § 27 odstranit. Úkolem tohoto § 27 byl tedy vlastně důkaz oné stejnoměrné konvergence, t. j. důkaz této věty:

Věta A. Jsou-li $f(x)$ a $f'(x)$ spojité v $\langle a, b\rangle$,[43]) potom lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézti $\delta > 0$ tak, že platí

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon, \tag{2}$$

jakmile jest $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq x + h \leqq b$, $0 < |h| \leqq \delta$.

Této věty Bolzano skutečně dále v § 28 užívá; v § 27 vyslovuje však Bolzano místo toho větu, jejíž slovné znění jest velmi složité a poněkud nejasné; je možno Bolzanově formulaci rozuměti tak, že chtěl vysloviti větu A; též však jest možno větu z § 27 interpretovati takto:

Věta B. Jsou-li $f(x)$ a $f'(x)$ spojité v $\langle a, b\rangle$,[43]) potom lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézti $\delta > 0$ tak, že ke každému x $(a \leqq x \leqq b)$ existuje aspoň jedno číslo h — při čemž $|h| \geqq \delta$ — tak, že

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon \quad (a \leqq x + h \leqq b).$$

Věta B praví zřejmě méně než věta A; neboť věta A zaručuje nerovnost (2) pro *všechna* $|h| \leqq \delta$,[44]) kdežto věta B zaručuje ne-

[43]) V bodech a, b předpokládá Bolzano pouze jednostrannou derivaci.
[44]) Tedy i pro $|h| = \delta$.

rovnost (2) po příp. pouze pro *jediné* $|h| \geqq \delta$, při čemž toto h může býti dokonce ještě závislé na x. Bolzanův důkaz v § 27 (interpretujeme-li některé drobné nejasnosti v Bolzanův prospěch) dokazuje celkem správně větu B, nikoliv však větu A. Rozhodně není tedy Bolzanův důkaz věty o střední hodnotě zcela správný: interpretujeme-li větu z § 27 jako větu A, není správný důkaz v § 27; interpretujeme-li ji jako větu B, není správný § 28, ježto Bolzano v něm pak užívá věty A. Přesto vzbuzuje Bolzanův pokus v § 27 úctu; opět zde máme případ, kdy Bolzano narazil na „stejnoměrnost" a kdy poznal, že nějakého pojmu toho druhu by bylo třeba; měli jsme ovšem též příležitost seznati (1. oddíl, § 39 a § 75), že v jiných případech Bolzano potřebnost takovýchto úvah prostě přehlédl. Bolzanův důkaz v § 27 je nepřímý; dovolím si jej zde (formálně upravený) pro jeho zajímavost reprodukovati. Nechť pro funkci $f(x)$ platí předpoklady věty B, nikoliv však její tvrzení. Potom tedy existuje číslo $\varepsilon > 0$ a posloupnost x_1, x_2, x_3, ... tak, že

$$\left|\frac{f(x_n+h)-f(x_n)}{h}-f'(x_n)\right| \geqq \varepsilon \qquad (2)$$

pro všechna $|h| \geqq \frac{1}{n}$.[45]) Budiž ξ hromadný bod posloupnosti $x_1, x_2, \ldots$ Zvolme $\delta \neq 0$ tak, že

$$\left|\frac{f(\xi+\delta)-f(\xi)}{\delta}-f'(\xi)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z předpokladu spojitosti plyne existence čísla $\eta > 0$ takového, že

$$\left|\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}-f'(x)\right| < \varepsilon$$

pro $|\xi - x| < \eta$. Zvolme n tak, že $\frac{1}{n} \leqq |\delta|$ a že $|\xi - x_n| < \eta$; potom jest

$$\left|\frac{f(x_n+\delta)-f(x_n)}{\delta}-f'(x)\right| < \varepsilon,$$

ačkoliv $|\delta| \geqq \frac{1}{n}$, což dává spor s (2).[46])

Přes obdivuhodné úsilí Bolzanovo není jeho důkaz věty o střední hodnotě — jak jsme již podotkli — zcela bezvadný; ale

[45]) Pro stručnost nevypisuji nerovnosti, jež praví, že nesmím opustit interval $\langle a, b\rangle$ — čtenář je snadno doplní.

[46]) Tento důkaz — a to ještě ve formě méně uspokojivé — zaujímá u Bolzana přes 2 tiskové strany; nový příklad pro to, s jakými potížemi musil Bolzano zápasiti.

také znění této věty není zcela uspokojivé. Věta o střední hodnotě je vyjádřena rovnicí

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c),$$

při čemž $f(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$ a $f'(x)$ existuje v (a, b); c je vhodné číslo intervalu (a, b). Proti tomuto modernímu znění předpokládá Bolzano nad to *spojitost* derivace a existenci derivace v koncových bodech (tento předpoklad snaží se Bolzano odstraniti v § 31, ale důkaz je nesprávný); největší závadou však jest, že místo nerovnosti $a < c < b$ dostává pouze $a \leqq c \leqq b$. To se jeví rušivě na př. v § 80 (relativní extrémy). Budiž na př. $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ a budiž $f''(x)$ spojité v okolí bodu x_0. Potom nastává v bodě x_0 relativní minimum, což můžeme (na základě *dnešního* znění věty o střední hodnotě) dokázati takto: Je-li $|\, h\, |$ dosti malé, $h \neq 0$, jest

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1);$$
$$hf'(x_0 + \vartheta h) = h[f'(x_0 + \vartheta h) - f'(x_0)] =$$
$$= \vartheta h^2 f''(x_0 + \vartheta\vartheta' h) > 0 \quad (0 < \vartheta' < 1).$$

Stejně usuzuje Bolzano; nemá však k tomu práva, ježto z *jeho* znění věty o střední hodnotě plyne pouze $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, a pro $\vartheta = 0$ by mu vyšlo $f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$.

Taylorovu větu vyslovuje Bolzano takto: Jestliže funkce $f(x)$ a všechny její derivace až do n-té jsou spojité v intervalu $\langle a, a + h\rangle$, platí

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \Theta h),$$

kdež $0 \leqq \Theta \leqq 1$. Důkaz provádí Bolzano indukcí (§ 82): pro $n = 1$ jest to prostě věta o střední hodnotě; předpokládejme tedy, že věta je platna pro $n = k - 1$ a dokažme ji pro $n = k$ (pro jednoduchost budiž $h > 0$). Na základě učiněných předpokladů jest pro $0 \leqq y \leqq h$

$$f'(a + y) = f'(a) + \sum_{i=1}^{k-2} \frac{y^i}{i!} f^{(i+1)}(a) + \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(a + \Theta' y)$$

$(0 \leqq \Theta' \leqq 1)$; jestliže tedy $f^{(k)}(p)$ resp. $f^{(k)}(q)$ jest nejmenší resp. největší hodnota $f^{(k)}(x)$ pro $a \leqq x \leqq a + h$, jest

$$f'(a + y) - \sum_{i=0}^{k-2} \frac{y^i}{i!} f^{(i+1)}(a) - \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(p) \geqq 0,$$

$$f'(a + y) - \sum_{i=0}^{k-2} \frac{y^i}{i!} f^{(i+1)}(a) - \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(q) \leqq 0.$$

Primitivní funkce k levé straně první nerovnosti jest tedy neklesající; tato primitivní funkce jest však — volíme-li vhodně integrační konstantu —

$$f(a+y)-f(a)-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{y^i}{i!}f^{(i)}(a)-\frac{y^k}{k!}f^{(k)}(p);$$

pro $y=0$ je tato funkce rovna nule, pro $y=h$ je tedy $\geqq 0$:

$$f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(a)-\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(p)\geqq 0$$

a obdobně obdržíme

$$f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(a)-\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(q)\leqq 0;$$

vzhledem k spojitosti funkce $f^{(k)}(x)$ je tedy pro vhodné Θ $(0\leqq\Theta\leqq 1)$

$$f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(a)-\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a+\Theta h)=0.$$

Bolzano se pokouší také omeziti podmínky v koncových bodech; příslušná úvaha není však správná.[47]) Podmínky pro rozvinutelnost funkce v *nekonečnou* řadu Taylorovu uvádí Bolzano celkem správně, ne však ve formě zvlášť vhodné.

Bolzano mluví v tomto 2. oddílu hojně též o funkcích několika proměnných; nebudu se však těmito úvahami zabývati, ježto většinou nejsou správné. Téměř stále opakuje se v nich chyba, které se Bolzano dopustil již při studiu spojitosti funkcí několika proměnných (1. oddíl, § 39), totiž nedbání požadavku stejnoměrnosti. Je zajímavo sledovati, jak si Bolzano místy nutnost takového požadavku uvědomuje, po několika řádcích však jej klidně opomine. Na př. v § 33 snaží se dokázati větu (nesprávnou): Jestliže pro $a<x<b$ jest $\lim\limits_{y=0} f(x,y)=0$ a existuje-li $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, jest též $\lim\limits_{y=0}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ (není zcela určitě vysloveno, v kterých oborech se ty předpoklady činí). Zde praví Bolzano: Jest

$$\frac{f(x+\omega,y)-f(x,y)}{\omega}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\Omega,$$

kde $\lim\limits_{\omega=0}\Omega=0$ při *pevném* x, y; levá strana konverguje současně s y k nule při *pevném* x, ω; z toho však nelze souditi, že $\lim\limits_{y=0}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$; zcela správně! Ale dále hned nahrazuje tuto úvahu úvahou stejně

[47]) Podobně jako u věty o střední hodnotě v § 31.

nesprávnou: Jest

$$\frac{f(x+\omega, y) - f(x, y)}{\omega} = \frac{\partial f(x+\mu\omega, y)}{\partial x}, (0 \leq \mu \leq 1);$$

tedy (dodejme: při pevném x a ω) jest

$$\lim_{y=0} \frac{\partial f(x+\mu\omega, y)}{\partial x} = 0; \tag{3}$$

ale rovněž platí (ježto $\frac{\partial f}{\partial x}$ je spojitou funkcí proměnné x) [48])

$$\lim_{\omega=0} \frac{\partial f(x+\mu\omega, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \tag{4}$$

(dodejme: při pevném y); z (3) a (4) pak prý plyne $\lim_{y=0} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$ — tedy v podstatě stejná chyba jako před tím!

Doufám, že si čtenář z těchto poznámek učinil jakousi představu i o druhém oddílu Bolzanovy knihy; podrobné studium a definitivní ocenění tohoto díla jest vděčným, ale jistě ne lehkým úkolem pro historika matematiky.

V Praze, 18. března 1931.

---

[48]) Jak Bolzano k tomuto podivnému tvrzení přišel, není mi jasno (viz v Bolzanovi str. 119, ř. 1—3 zdola); přijměme je však za správné — třeba jako předpoklad.