Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Vyčichlo

Poznámka k sestrojení normální křivky zborcené plochy šroubové

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 4-5, 128--131

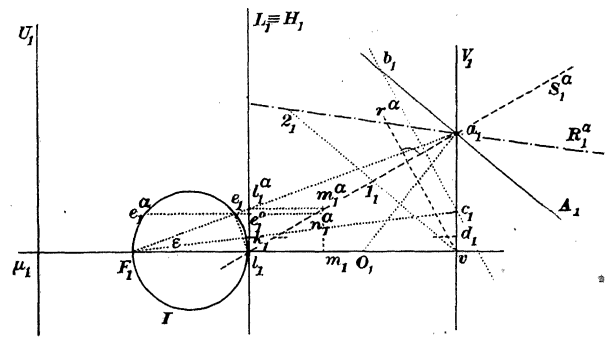
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123914

Poznámka k sestrojení normální křivky zborcené plochy šroubové.

F. Vyčichlo.

(Došlo 28. ledna 1932.)

Plocha šroubová P budiž vytknuta osou O a přímkou vytvořující V s daným parametrem p. Vyjadřme tuto plochu ortogonálním průmětem do roviny kolmé k O, jež obsahuje osu přímek O, V a buď dále v stopník přímky V na průmětně. Jest tudíž v pata kolmice spuštěné s průmětu O_1 osy O na průmět V_1 přímky V (obr. 1). Mění-li se přímka V na ploše, proběhne bod v normální křivku plochy. Naší úlohou bude sestrojiti elementárně oskulační kružnici této křivky v bodě v.



Obr. 1.

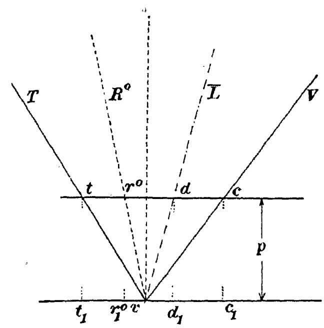
Rovina tečná α v libovolném bodě a přímky V uvažované plochy je stanovena přímkou V a tečnou A šroubové křivky příslušné bodu a. Protněme tuto rovinu rovinou rovnoběžnou k průmětně a mající od této vzdálenost $+ p$ nebo $- p$, v přímce $\overline{bc}$, kde b je průsečík přímky A, c průsečík přímky V. Průmět spádové přímky S^a, vedené bodem a v rovině α, je kolmice spuštěná s a_1 na $\overline{b_1c_1}$, která nechť protne přímku $\overline{vO_1}$ v bodě l_1.

Přímky A a S^a jsou konjugované tečny plochy P a tedy také hyperboloidu H_V, který ji podél přímky V oskuluje. Náleží tedy přímka R^a, pro kterou $(AS^aVR^a) = -1$, tomuto hyperboloidu H_V.

Protne tudíž kolmice spuštěná s v na $\overline{a_1O_1}$ přímky $\overline{a_1l_1}$, $R_1{}^a$ v bodech 1_1, 2_1, pro něž úsečka $\overline{1_12_1}$ rovná se úsečce $\overline{v_1l_1}$.

Asymptotická rovina plochy H_V a příslušná přímce V protíná tudíž tuto plochu ještě v přímce U souměrně k V položené podle promítacího paprsku bodu l_1. Je tedy obrysem průmětu plochy H_V kuželosečka, která má bod v, jakož i symetrický k němu vzhledem k l_1 položený bod u_1 za vrcholy a bod O_1 za střed křivosti příslušný bodu v. Následkem toho druhá osa tohoto obrysu leží na přímce $H_1 \parallel V_1$ vedené bodem 1_1 a čtverec poloosy rovná se tu součinu $\overline{vO_1} \cdot \overline{vl_1}$.

Kolmice spuštěná s v na $\overline{a_1 l_1}$ seče $R_1{}^a$ v bodě r^a náležejícím stopě K_π plochy H_V na průmětně. Poněvadž kuželosečka K_π má v a u taktéž za vrcholy, je tím stanovena. Roviny rovnoběžné s průmětnou protínají H_V v kuželosečkách, jejichž středy leží na přímce L, pro kterou $L_1 \equiv H_1$, a jež je polárou vzhledem k ploše H_V nekonečně vzdálené přímky náležející průmětně. Hledejme přímku L.



Obr. 2.

Položme $\overline{vO_1} = m$, $\overline{vl_1} = n$ a protněme H_V rovinou rovnoběžnou s průmětnou a mající od ní vzdálenost p. Tato rovina seče V v bodě c a tečnu sestrojenou v bodě v ke křivce šroubové, kterou tento bod opíše, nechť protne v bodě t (obr. 2 je vzhledem k obr. 1 dvakráte větší); potom přímka R^0 harmonická k V vzhledem k tečně $\overline{vt}$ a promítacímu paprsku bodu v leží na ploše H_V. Je-li r^0 průsečík přímky R^0 s přímkou $\overline{ct}$ je $r_1{}^0$ harmonický k c_1 vzhledem k bodům v a t_1. Poněvadž $\overline{vc_1} = \overline{O_1 l_1}$ jest $\overline{vc_1} = n - m$, $\overline{vt_1} = -m$, takže

$$-\frac{2}{m} = \frac{1}{n-m} + \frac{1}{\overline{vr_1{}^0}},$$

odkud plyne

$$\overline{vr_1{}^0} = -\frac{m(n-m)}{2n-m}.$$

Půlicí bod d_1 úsečky $\overline{c_1 r_1{}^0}$ má od v vzdálenost

$$\overline{vd_1} = \tfrac{1}{2}(\overline{vc_1} + \overline{vr_1{}^0}) = \frac{(n-m)^2}{2n-m}.$$

Je-li d_1 průmětem bodu d na přímce $\overline{ct}$ ležícím, jest patrně přímka $\overline{vd}$ rovnoběžná s hledanou přímkou L.

Průměry procházející body na V těch kuželoseček plochy H_V, které leží v rovinách rovnoběžných k průmětně, vytvořují hyperbolický paraboloid, který má rovinu centrální plochy H_V náležející přímce V za jednu rovinu řídicí, která je rovinou promítací přímky V. Paraboloid proto obsahuje jednu přímku F kolmou k průmětně. Tvoří tudíž průměty uvažovaných průměrů svazek, jehož vrchol F_1 leží na přímce $\overline{vO_1}$. Ten z těchto průměrů, který prochází bodem c, seče L v bodě k, pro nějž $\overline{l_1k_1} = \overline{vd_1}$. Z podobných trojúhelníků $\triangle c_1vF_1$, $\triangle k_1l_1F_1$ plyne úměra

$$\overline{vc_1} : \overline{l_1k_1} = \overline{vF_1} : (\overline{l_1v_1} + vF_1),$$

z níž dostaneme

$$vF_1 = 2n - m.$$

Leží tedy F_1 symetricky k bodu O_1 vzhledem k l_1.

Budiž dále K^a kuželosečka, ve které seče H_V rovina rovnoběžná s průmětnou a procházející bodem a, l^a budiž její střed. Kolmice s bodu l_1^a na V_1 nechť protne $\overline{a_1l_1}$ v bodě m_1^a; z úměry

$$\overline{m_1^al_1^a} : \overline{vl_1} = \overline{l_1l_1^a} : \overline{va_1} = \overline{l_1k_1} : \overline{vc_1}$$

obdržíme

$$\overline{m_1^al_1^a} = \frac{n(n-m)}{2n-m}.$$

Protíná-li rovnoběžka k přímce V_1 bodem m_1^a vedená přímku $\overline{vl_1}$ v bodě m_1, jest

$$vm_1 = \frac{n^2}{2n-m}.$$

Je patrno, že m_1 je středem křivosti křivky K_π pro bod v.

Určeme též střed křivosti n_1^a kuželosečky K_1^a pro bod a_1 tím, že patou e_1 kolmice s bodu l_1 na $a_1l_1^a$ spuštěné vedeme rovnoběžku k $\overline{vl_1}$, jež vytíná bod n_1^a z přímky $a_1m_1^a$. Protíná-li tato rovnoběžka přímku L_1 v bodě e_1^0, vyjádříme délku úsečky $\overline{e_1^0n_1^a}$ pomocí úměry

$$\overline{n_1^0e_1^a} : \overline{l_1e_1^0} = \overline{m_1^al_1^a} : \overline{l_1l_1^a}.$$

Označíme-li ε úhel přímky $\overline{F_1a_1}$ s přímkou $\overline{F_1v}$, jest

$$\overline{l_1e_1^0} = \overline{l_1F_1} \sin\varepsilon \cos\varepsilon,\ \overline{m_1^al_1^a} = \frac{n(n-m)}{2n-m}\ \text{ a }\ \overline{l_1l_1^a} = l_1F_1 \operatorname{tg}\varepsilon.$$

Dosazením těchto hodnot obdržíme z uvedené úměry

$$\frac{\overline{n_1^ae_1^0}}{\overline{l_1F_1}\cos^2\varepsilon} = \frac{n}{2n-m}.$$

Opišme nad $\overline{l_1F_1}$ jakožto průměrem kružnici I, tato prochází bodem e_1 a přímka $n_1^ae_1$ ji protne ještě v bodě e_1^a. Jelikož $e_1^0e_1^a =$

$= \overline{l_1F_1} \cos^2 \varepsilon$, přechází poslední úměra v relaci

$$\frac{\overline{n_1{}^a e_1{}^0}}{\overline{e_1{}^0 e_1{}^a}} = \frac{n}{2n - m}.$$

Z toho plyne, že středy křivosti kuželoseček na ploše H_V v rovinách rovnoběžných k průmětně, pro body ležící na přímce V se promítají na kuželosečku N_1, která má $\overline{m_1l_1}$ za jednu osu a jejíž druhá osa má délku rovnou $\overline{l_1O_1}$. Kuželosečka ta jest totiž s kružnicí I a tedy i s kružnicí nad průměrem $\overline{l_1O_1}$ v poloze ortogonální afinity pro H_1 jakožto osu afinity.

*

Remarque relative à la construction de la courbe normale de l'hélicoïde réglée.

(Extrait de l'article précédent.)

Pour construire la courbe normale de l'hélicoïde réglé il faut d'abord connaître les cercles de courbure en ses points particuliers. L'auteur construit un tel cercle pour un point arbitraire à l'aide de l'hyperboloïde osculateur de l'hélicoïde; l'hyperboloïde est construit le long de la droite passant par le point pris en considération. Tous les centres de courbure de toutes les courbes normales pour les points d'une même droite, ont leurs projections, dans le plan ortogonal à l'axe de l'hélicoïde et qui passe par la perpendiculaire commune de cet axe et de la droite, sur une certaine élipse. — Cette courbe a un rapport intéressant à l'égard de la section de l'hyperboloïde avec le plan pris en considération.