Eduard Čech

Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces. II

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 75 (1950), No. 3, 123--136

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123886`

# GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE DES CORRESPONDANCES ENTRE DEUX ESPACES II.

EDUARD ČECH, Praha.

(Reçu le 15. Février 1950.)

Ce Mémoire fait suite au Mémoire portant le même titre paru dans ce Journal 74 (1949), 32—48. (Comptes-Rendus du congrès à Prague 1949.)

**14.** Si l'on a une correspondance entre le point $A$ décrivant un espace à $n$ dimensions $S_n$ et le point $B$ décrivant aussi un tel espace $S_n'$, on sait (v. § 1) qu'il existe, pour chaque couple $A$, $B$ de points correspondants, $\infty^n$ *homographies tangentes* $K$ à la correspondance donnée. Au § 9 nous avons attaché à chaque choix de $K$ la *transformation $K$-linéarisante*

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\Omega_1, \ldots, \Omega_n). \tag{9,3}$$

On peut classifier les correspondances entre deux espaces suivant la nature algébrique de la transformation (9,3). Après les correspondances homographiques, le cas le plus simple est sans doute celui où toutes les formes quadratiques $\Omega_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sont proportionnelles l'une a l'autre:

$$\Omega_i = a_i\Omega, \quad (1 \leq i \leq n), \tag{14,1}$$

où la forme quadratique $\Omega$ ne peut être identiquement nulle, si nous excluons le cas banal d'une correspondance homographique (v. § 13). Les droites $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ telles que $\Omega = 0$ sont les droites $K$-principales; elles engendrent dans ce cas un cône quadratique, que nous nommerons *cône $K$-principal*. Pour chaque droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ non $K$-principale, la droite $K$-linéarisante de $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ est la droite $(a_1, \ldots, a_n)$ que nous nommerons *droite totalement $K$-linéarisante*. Il s'agit donc de trouver toutes les correspondances eutre deux espaces à $n$ dimensions telles que, pour un choix convenable de l'homographie tangente $K$, il existe une droite totalement $K$-linéarisante. Dans ce Mémoire et dans le suivant, on trouve la solution complète de ce problème. Au Mémoire IV de cette série, on verra que notre problème admet une autre interprétation géométrique (transformation asymptotique d'une congruence).

**15.** Pour $n = 2$ on a le résultat simple que *chaque correspondance entre deux plans appartient au type qui vient d'être décrit*. En effet, choisissons une homographie tangente particulière quelconque $K$ et introduisons les repères du § 5. L'homographie tangente la plus générale $K^*$ est donnée par (10,1). En passant de $K$ à $K^*$, il faut selon (10,2) et (10,3) remplacer $\Omega_1$, $\Omega_2$ par

$$\Omega_1 - 2\omega_1(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2), \quad \Omega_2 - 2\omega_2(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2).$$

Il s'agit donc seulement de prouver qu'on peut choisir les $\mu_1$, $\mu_2$ de manière qu'il existe des quantités $a_1$, $a_2$ telles qu'on ait identiquement en $\omega_1$, $\omega_2$

$$\begin{vmatrix} \Omega_1 - 2\omega_1(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2), & a_1 \\ \Omega_2 - 2\omega_2(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2), & a_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{15,1}$$

la solution banale $a_1 = a_2 = 0$ devant être exclue; pour chaque solution de (15,1), $(a_1, a_2)$ est la droite totalement $K^*$-linéarisante, l'homographie $K^*$ correspondante étant donnée par (10,1). En posant

$$\Omega_1 = c_{10}\omega_1^2 + 2c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{12}\omega_2^2, \quad \Omega_2 = c_{20}\omega_1^2 + 2c_{21}\omega_1\omega_2 + c_{22}\omega_2^2, \tag{15,2}$$

condition (15,1) devient

$$(c_{10} - 2\mu_1)a_2 - c_{20}a_1 = (c_{11} - \mu_2)a_2 - (c_{21} - \mu_1)a_1 = c_{12}a_2 - \\ - (c_{22} - 2\mu_2)a_1 = 0. \tag{15,3}$$

En éliminant $\mu_1$ et $\mu_2$, on obtient

$$\begin{vmatrix} c_{10}a_1^2 + 2c_{11}a_1a_2 + c_{12}a_2^2, & a_1 \\ c_{20}a_1^2 + 2c_{21}a_1a_2 + c_{22}a_2^2, & a_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{15,4}$$

ce qui signifie simplement que $(a_1, a_2)$ est une droite caractéristique de la correspondance envisagée. Pour chaque droite caractéristique $(a_1, a_2)$ il existe donc une homographie tangente $K^*$ telle que $(a_1, a_2)$ soit la droite totalement $K^*$-linéarisante. Il existe donc en général trois homographies tangentes $K^*$ possédant une droite totalement $K^*$-linéarisante, le nombre *trois* pouvant s'abaisser à *deux* ou à *un*.

On peut chercher la condition pour qu'il existe une droite $K_0$-linéarisante, $K_0$ étant l'homographie locale (v. § 2). Pour répondre à cette question, on peut supposer que $K = K_0$. Selon (5,13), (7,4) et (15,2), cela veut dire que

$$c_{10} + c_{21} = 0, \quad c_{11} + c_{22} = 0. \tag{15,5}$$

En outre, on doit avoir (15,3) avec $\mu_1 = \mu_2 = 0$, c'est-à-dire

$$c_{10} : c_{11} = c_{11} : c_{21} = c_{12} : c_{22}. \tag{15,6}$$

Or les équations (15,5) et (15,6) expriment que l'équation (15,4) possède une racine triple $a_1 : a_2$. Donc *s'il existe une droite caractéristique triple, cette droite est la droite totalement $K_0$-linéarisante, $K_0$ étant l'homographie locale* et c'est l'unique cas où il existe une droite totalement $K_0$-linéarisante.

**16.** Nous pouvons donc supposer dans tout ce qui suit que

$$n \geq 3. \tag{16,1}$$

Soit $K$ une homographie tangente telle qu'il existe une droite totalement $K$-linéarisante. On peut choisir les repères de manière que la droite totalement $K$-linéarisante soit la droite $(\omega_1, \ldots, \omega_n) = (0, \ldots, 0, 1)$ c'est-à-dire que ce soit la droite $[AA_n]$ dans l'espace $S_n$ et la droite $[BB_n]$ dans l'espace $S_n'$. Nous allons maintenir cette supposition dans tout ce qui suit. La condition (14,1) devient alors

$$\Omega_1 = \ldots = \Omega_{n-1} = 0, \tag{16,2}$$

tandis que

$$\Omega_n \neq 0, \tag{16,3}$$

car nous excluons les correspondances homographiques. Remarquons que, si $K^*$ est une homographie tangente différente de $K$, il ne peut exister une droite totalement $K^*$-linéarisante puisque, en vertu de (9,3), (10,2) et (16,2), cela exigerait que les formes $\omega_i \sum_{k=1}^{n} \mu_k \omega_k (1 \leqq i \leqq n-1)$ soient proportionnelles l'une à l'autre ce qui n'est pas possible pour $n \geqq 3$ que si $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$.

Pour des valeurs fixes de paramètres principaux, l'homographie $K$ est fixe (en négligeant son facteur numérique arbitraire) et, si l'on choisit le repère $A, A_1, \ldots, A_n$, le repère $B, B_1, \ldots, B_n$ est, en vertu de (5,2), complètement déterminé à un facteur scalaire près, commun à tous les $n+1$ points $B, B_1, \ldots, B_n$. Ceci est exprimé par les équations (8,4). Quant au repère $A, A_1, \ldots, A_n$, pour des valeurs fixes de paramètres principaux, le point $A$ et la droite totalement $K$-linéarisante $[AA_n]$ sont fixes en position et il n'y a pas d'autres restrictions pour ce repère.

Outre (8,3) et (8,4), on doit donc avoir

$$e_{n1} = \ldots = e_{n,n-1} = 0. \tag{16,4}$$

Si l'on fait la supposition (6,1), on a encore

$$e_{00} + e_{11} + \ldots + e_{nn} = t_{00} = 0, \tag{16,5}$$

tandis que

$$\begin{aligned} &e_{i0},\ e_{ii} - e_{00},\ (1 \leqq i \leqq n-1), \\ &e_{ik},\ (1 \leqq i,\ k \leqq n-1,\ i \neq k), \\ &e_{n0},\ e_{nn} - e_{00} \end{aligned} \tag{16,6}$$

restent arbitraires.

**17.** Le problème à résoudre est exprimé analytiquement par les équations (5,9) (disant que $K$ est une homographie tangente) que nous écrivons de nouveau:

$$\tau_{01} = \ldots = \tau_{0n} = 0 \tag{17,1}$$

et par les équations (16,2) qui, en vertu de (5,15), peuvent être remplacées par les équations de Pfaff

$$\tau_{ii} - \tau_{00} = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1, \tag{17,2}$$

$$\tau_{ik} = 0 \text{ pour } 1 \leqq i,\ k \leqq n-1,\ i \neq k, \tag{17,3}$$

$$\tau_{ni} = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{17,4}$$

Il s'agit de trouver les solutions à $n$ dimensions du système de Pfaff (17,1) + (17,2) + (17,3) + (17,4) soumis à deux inégalités

$$[\omega_1, \ldots, \omega_n] \neq 0 \tag{17,5}$$

et (16,3). En différentiant extérieurement les équations du système de Pfaff [ce qui ce fait selon les équations de structure (5,7) et (5,8)], on en déduit les conditions d'intégrabilité:

$$\sum_{i=1}^{n-1} [\omega_i, \tau_{in}] + [\omega_n, \tau_{nn} - \tau_{00}] = 0, \tag{17,6}$$

$$\sum_{r=1}^{n} [\omega_r \tau_{r0}] + [\omega_i \tau_{i0}] = [\tau_{in}, \omega_{ni}] \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1, \tag{17,7}$$

$$[\omega_i, \tau_{j0}] = [\tau_{jn}, \omega_{ni}] \text{ pour } 1 \leqq i,\ j \leqq n-1,\ i \neq j, \tag{17,8}$$

$$[\omega_i, \tau_{n0}] = [\tau_{nn} - \tau_{00}, \omega_{ni}] \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{17,9}$$

**18.** Supposons d'abord qu'il existe une solution de notre système de Pfaff ayant la propriété que, pour chaque choix du scalaire $\lambda$, on puisse trouver au moins deux formes linéairement indépendantes parmi les $n-1$ formes de Pfaff

$$\omega_{ni} + \lambda\omega_i, \quad (1 \leqq i \leqq n-1), \tag{18,1}$$

ce qui exige que $n \geqq 4$. Nous allons voir que c'est impossible. De (17,9) on déduit

$$[\omega_i, \tau_{n0}, \tau_{nn} - \tau_{n0}] = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1.$$

Puisque $n \geqq 4$ et les $\omega_i$ sont linéairement indépendantes, ceci exige

$$[\tau_{n0}, \tau_{nn} - \tau_{00}] = 0.$$

Si l'on avait $\tau_{nn} - \tau_{00} \neq 0$, on pourrait donc choisir $\lambda$ de manière que $\tau_{n0} = \lambda(\tau_{nn} - \tau_{00})$. Alors on déduirait de (17,9)

$$[\omega_{ni} + \lambda\omega_i, \tau_{nn} - \tau_{00}] = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1$$

ce qui contredit la supposition faite sur les formes (18,1). Il en résulte que

$$\tau_{nn} - \tau_{00} = 0. \tag{18,2}$$

D'après (5,15), (18,2) signifie que $\dfrac{\partial \Omega_n}{\partial \omega_n} = 0$. Il est aisé de voir que, si l'on particularise le repère $A, A_1, \ldots, A_n$ d'une manière convenable, on aura

$$\Omega_n = \varepsilon_1\omega_1^2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1}^2$$

ou bien, d'après (5,15),

$$\tau_{in} = \varepsilon_i\omega_i \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1 \tag{18,3}$$

ou

$$\varepsilon_i = 1 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq h,\ \varepsilon_i = 0 \text{ pour } h+1 \leqq i \leqq n-1 \tag{18,4}$$

avec

$$1 \leqq h \leqq n-1. \tag{18,5}$$

(17,9) donne en vertu de (18,2)

$$[\omega_i \tau_{n0}] = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1,$$

ce qui exige

$$\tau_{n0} = 0. \tag{18,6}$$

(17,8) donne en vertu de (18,3) et (18,4)

$$[\omega_i, \tau_{j0}] = 0 \text{ pour } h+1 \leqq j \leqq n-1,\ 1 \leqq i \leqq n-1,\ i \neq j, \tag{18,7}$$

$$[\omega_i, \tau_{i0}] = [\omega_j, \omega_{ni}] \text{ pour } 1 \leqq j \leqq h,\ 1 \leqq i \leqq n-1,\ i \neq j. \tag{18,8}$$

Puisque $n \geqq 4$, on déduit de (18,7) que

$$\tau_{j0} = 0 \text{ pour } h+1 \leqq j \leqq n-1. \tag{18,9}$$

Pour chaque indice $j$ tel que $1 \leqq j \leqq h$ on déduit de (18,8) (puisque $n \geqq 4$), qu'il existe deux indices $i$, $k$ tels que

$$1 \leqq i < k \leqq n-1,\ [\omega_i \omega_j \tau_{j0}] = 0,\ [\omega_k \omega_j \tau_{j0}] = 0,$$

ce qui exige $[\omega_j \tau_{j0}] = 0$. Il exite donc des scalaires $\lambda_j$ tels que

$$\tau_{j0} = \lambda_j \omega_j \text{ pour } 1 \leqq j \leqq h. \tag{18,10}$$

Des équations (17,7) on déduit, tenant compte de (18,6), (18,9) et (18,10),

$$[\tau_{in}, \omega_{ni}] = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1,$$

de sorte qu'il résulte de (18,3) et (18,4) qu'on peut poser

$$\omega_{nj} = \mu_j \omega_j \text{ pour } 1 \leqq j \leqq h. \tag{18,11}$$

D'après (18,8) et (18,10) on a

$$[\omega_j, \omega_{ni} + \lambda_j \omega_i] = 0 \text{ pour } 1 \leqq j \leqq h,\ 1 \leqq i \leqq n-1,\ i \neq j,$$

en particulier

$$[\omega_1, \omega_{ni} + \lambda_1 \omega_i] = 0, \tag{18,12}$$

pour $2 \leqq i \leqq n-1$. D'après (18, 11) la relation (18,12) reste vraie aussi pour $i = 1$. On a donc (18,12) pour $1 \leqq i \leqq n-1$, ce qui contredit la supposition faite sur les formes (18,1).

**19.** Nous allons chercher d'abord les solutions de notre problème ayant la propriété que, pour toutes les positions du couple $A$, $B$ de points correspondants, *les droites totalement K-linéarisantes* $[AA_n]$ *dans l'espace* $S_n$ *passent par un point fixe*. Nous pouvons particulariser le repère $A$, $A_1, \ldots, A_n$ de sorte que ce point fixe soit $A_n$. D'après (4,4), ceci est exprimé analytiquement par les équations

$$\omega_{n0} = \omega_{n1} = \ldots = \omega_{n,n-1} = 0. \tag{19,1}$$

Ayant égard à (19,1), on déduit de (17,9) que $[\omega_i \tau_{n0}] = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n-1$. Puisque $n \geqq 3$, on a nécessairement

$$\tau_{n0} = 0. \tag{19,2}$$

Pareillement on déduit de (17,7) et (17,8) en vertu de (19,1) et (19,2) que $[\omega_i \tau_{j0}] = 0$ pour $1 \leqq i, j \leqq n-1$, d'où

$$\tau_{i0} = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{19,3}$$

D'après (5,10), (17,4) et (19,2) on a

$$\overline{\omega}_{n0} = \overline{\omega}_{n1} = \ldots = \overline{\omega}_{n,n-1} = 0,$$

d'où $dB_n = \overline{\omega}_{nn} B_n$ d'après (5,4)'; le point $B_n$ est donc fixe en position, c'est-à-dire *aussi dans l'espace $S_n'$*, comme dans $S_n$, *toutes les droites totalement K-linéarisantes passent par un point fixe.* De (5,7), (5,8), (5,10), (19,2) et (19,3) on déduit que $[d\tau_{00}] = 0$ de sorte que

$$\tau_{00} = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

est une différentielle totale. Il résulte de (6,4) qu'on peut alors supposer que

$$\tau_{00} = 0. \tag{19,4}$$

Les équations fondamentales (5,3)', (5,4), (5,5)' et (5,6) s'écrivent, tenant compte de (5,10), (17,2), (17,3), (17,4), (19,1), (19,2), (19,3) et (19,4),

$$\left.\begin{aligned} dA &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n, \\ dA_i &= \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \ldots + \omega_{in}A_n \quad \text{pour } 1 \leqq i \leqq n-1 \\ dA_n &= \omega_{nn}A_n, \end{aligned}\right\} \tag{19,5}$$

$$\left.\begin{aligned} dB &= \omega_{00}B + \omega_1 B_1 + \ldots + \omega_n B_n, \\ dB_i &= \omega_{i0}B + \omega_{i1}B_1 + \ldots + \omega_{i,n-1}B_{n-1} + (\omega_{in} + \tau_{in})B_n \\ &\qquad \text{pour } 1 \leqq i \leqq n-1, \\ dB_n &= (\omega_{nn} + \tau_{nn})B_n. \end{aligned}\right\} \tag{19,6}$$

Or on vérifie sans peine que le système

$$\left.\begin{aligned} dC &= \omega_{00}C + \omega_1 C_1 + \ldots + \omega_{n-1}C_{n-1} + \omega_n(C_n + C_{n+1}), \\ dC_i &= \omega_{i0}C + \omega_{i1}C_1 + \ldots + \omega_{in}C_n + \overline{\omega}_{in}C_{n+1} \ (1 \leqq i \leqq n-1) \\ dC_n &= \omega_{nn}C_n, \\ dC_{n+1} &= \overline{\omega}_{nn}C_{n+1} \end{aligned}\right\} \tag{19,7}$$

est complètement intégrable. En l'intégrant, on a dans un espace $S_{n+1}$ à $n+1$ dimensions un point $C$ décrivant une hypersurface $(C)$ et deux points $C_n$ et $C_{n+1}$ fixes en position. On peut choisir le système de référence dans $S_{n+1}$ de manière que les points $C_n$ et $C_{n+1}$ coincident en position avec $(0, \ldots, 1, 0)$ et $(0, \ldots, 0, 1)$, respectivement. Pour un point quelconque $X$ de $S_{n+1}$, soit $\overline{X}$ la projection de $X$ du point vue $C_{n+1}$ dans l'hyperplan $x_{n+2} = 0$, et $\overline{\overline{X}}$ la projection de $X$ du point de vue $C_n$ dans l'hyperplan $x_{n+1} = 0$. On obtient les coordonnées de $\overline{X}$ et de $\overline{\overline{X}}$ des coordonnées de $X$ en y effaçant la $(n+2)$-ième ou $(n+1)$-ième coordonnée, respectivement. Or on voit tout de suite qu'on a pour $\overline{C}, \overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_{n-1}, \overline{C}_n$ le même système (19,5) que pour $A, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$, et pour $\overline{\overline{C}}, \overline{\overline{C}}_1, \ldots, \overline{\overline{C}}_{n-1}$,

$\overline{\overline{C}}_{n+1}$ le même système (19,6) que pour $B, B_1, \ldots, B_{n-1}, B_n$. Il en résulte qu'il existe deux homographies $H$ et $H'$ à coefficients constants tels que

$$HA = \overline{C}, \quad H'B = \overline{\overline{C}},$$

pour toutes les valeurs des paramètres. Or la propriété imposée au § 14 à la correspondance entre $A$ et $B$ était telle, qu'elle ne change pas en soumettant les espaces $S_n$ et $S_n'$ à des homographies fixes quelconques. En négligeant ces homographies, on peut supposer simplement que $A = \overline{C}$, $B = \overline{\overline{C}}$ et on obtient le solution suivante pour le problème de la détermination de toutes les correspondances entre deux espaces $S_n$ et $S_n'$ à $n$ dimensions (supposées immergées dans un espace $S_{n+1}$ à $n+1$ dimensions) telles qu'il existe, pour chaque couple $A$ et $B$ de points correspondants, une homographie tangente $K$ possédant une droite totalement $K$-linéarisante, en supposant de plus que toutes les droites totalement $K$-linearisantes (dans l'espace $S_n$ et *par suite* aussi dans $S_n'$) passent par un point fixe: *On choisit dans $S_{n+1}$ une hypersurface $(C)$ ainsi que deux points fixes différents $C_n$ et $C_{n+1}$. Le point $A$ arbitrairement choisi dans $S_n$ est projeté du point de vue $C_{n+1}$ dans l'hypersurface $(C)$ et la projection est projetée de nouveau du point de vue $C_n$ dans l'hyperplan $S_n'$ cette seconde projection $B$ est l'image cherchée du point $A$.* Toutes les droites totalement $K$-linéarisantes de l'espace $S_n$ passent évidemment par l'intersection de la droite $[C_nC_{n+1}]$ avec l'espace $S_n$; pareillement, les droites totalement $K$-linéarisantes de l'espace $S_n'$ passent par l'intersection de $[C_nC_{n+1}]$ avec l'espacé $S_n'$. Le cône $K$-principal est donné par l'équation $\Omega_n = 0$ ou bien [v. (5,13) et (5,15)]

$$\sum_{i=1}^{n-1}\tau_{in}\omega_i + (\tau_{nn} - \tau_{00})\omega_n = 0.$$

Or on voit sans peine de (19,7) que le plan $[C, dC, d^2C]$ est situé dans l'hyperplan $[CC_1 \ldots C_{n-1}, C_n + C_{n+1}]$ tangent à l'hypersurface $(C)$ si et seulement si $\Omega_n = 0$. Par suite, *les cônes $K$-linéarisants de $S_n$ et de $S'_n$, respectivement, s'obtiennent du cône des tangentes asymptotiques à l'hypersurface $(C)$ en le projetant du point de vue $C_{n+1}$ dans $S_n$, ou bien du point de vue $C_n$ dans $S_{n+1}$.*

Le problème proposé au commencement de ce paragraphe est complètement résolu, car on voit sans peine que l'hypersurface $(C)$ et les deux poins fixes $C_n$ et $C_{n+1}$ ne sont soumis à aucune restriction pourvu que $(C)$ ne soit pas un hyperplan; dans ce cas, la correspondance construite entre $A$ et $B$ devient une homographie.

En employant des coordonnées non homogènes $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ dans l'espace $S_{n+1}$, on peut supposer les deux points $C_n$ et $C_{n+1}$ situés à l'infini dans la direction $(0, \ldots, 0, 1, 0)$ et $(0, \ldots, 0, 0, 1)$ respectivement. Si

$$x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{19,8}$$

(avec une fonction arbitraire non linéaire $f$) est l'équation de l'hypersurface $(C)$, on a, en coordonnées non homogènes,

$$A = (x_1, \ldots, x_n), \quad B = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f), \tag{19,9}$$

ce qui donne l'expression analytique la plus simple de la solution discutée.

On peut chercher la condition pour que $K$ soit l'homographie locale. Cette condition est donnée par l'équation (7,3) qui, en vertu de (17,2) et (19,4), devient simplement

$$\tau_{nn} = 0. \tag{19,10}$$

Or il résulte de (19,7) que

$$\mathrm{d}(C_n + C_{n+1}) = \omega_{nn}(C_n + C_{n+1}) + \tau_{nn}C_{n+1}$$

de sorte que (19,10) signifie que le point $C_n + C_{n+1}$ reste fixe en position. Mais $C_n + C_{n+1}$ est, d'après la première équation (19,7), le point d'intersection de la droite $[C_nC_{n+1}]$ avec l'hyperplan tangent à l'hypersurface $(C)$. Donc $K$ *est l'homographie locale si, et seulement si, l'hypersurface* $(C)$ *étant un cône, la droite fixe* $[C_nC_{n+1}]$ *passe par le sommet de ce cône.* On trouve aisément que, dans la solution (19,8) et (19,9), $K$ est l'homographie locale si, et seulement si, la fonction $f$ a la forme

$$x_{n+1} = cx_n + \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

où $c \neq 0$ est une constante et $\varphi$ une fonction arbitraire (non linéaire).

**20.** Remarquons d'abord qu'une solution de notre problème appartient au type étudié au § 19 si l'on a $\omega_{ni} = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n-1$. Car on a alors $\mathrm{d}A_n = \omega_{n0}A + \omega_{nn}A_n$; si $\omega_{n0} = 0$, le point $A_n$ est fixe en position ce qui est le type étudié. Et $\omega_{n0} \neq 0$ est impossible, parce qu'alors le point $A_n$ décrirait une courbe et le point $A$ serait situé à la tangente à cette courbe; $A$ serait donc limité au plus à une variété à deux dimensions, ce qui est une contradiction, car $n \geqq 3$.

Cela posé, il résulte du § 18 qu'il existe un scalaire $\lambda$ et une forme de Pfaff $\Theta \neq 0$ de sorte que

$$[\omega_{ni} + \lambda\omega_i, \Theta] = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{20,1}$$

Or nous pouvons changer le repère $A$, $A_1, \ldots, A_n$ en y remplaçant $A_n$ par $A_n + \lambda A$ (pourvu que nous remplaçions simultanément $B_n$ par $B_n + \lambda B$; en il résulte que nous pouvons supposer que

$$[\omega_{ni}, \Theta] = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{20,2}$$

Par un nouveau changement de repères (substitution linéaire homogène en $A_1, \ldots, A_{n-1}$ accompagnée à la même substitution en $B_1, \ldots, B_{n-1}$) nous pouvons même supposer que

$$\omega_{nj} = 0 \text{ pour } 2 \leqq j \leqq n-1. \tag{20,3}$$

Il résulte de la remarque qui précède que, si nous ne voulons pas retomber sur la solution du § 19, nous avons nécessairement

$$\omega_{n1} \neq 0. \tag{20,4}$$

*Remarque.* En passant de (20,1) à (20,2), nous avons fixé la position du point $A_n$ sur la droite totalement $K$-linéarisante $[AA_n]$. *Pour $n \geqq 4$, une telle particularisation n'est possible que d'une seule manière.* En effet, dans le cas contraire, on voit sans peine qu'il existe deux nombres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ et deux formes de Pfaff $\Theta_1 \neq 0$ et $\Theta_2 \neq 0$ de sorte que

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad [\omega_{ni} + \lambda_1\omega_i\Theta_1] = [\omega_{ni} + \lambda_2\omega_i\Theta_2] = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n-1).$$

Il résulte que toutes les formes $\omega_i$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ sont des combinaisons linéaires de $\Theta_1$ et $\Theta_2$, ce qui est impossible pour $n \geqq 4$. Au contraire, pour $n = 3$ il se peut qu'il y a deux valeurs différentes de $\lambda$ telles qu'on ait (20,1) pour une forme de Pfaff $\Theta$ convenable. En effet (20,1) signifie pour $n = 3$ que

$$[\omega_{31} + \lambda\omega_1, \omega_{32} + \lambda\omega_2] = 0$$

ou bien

$$[\omega_{31}, \omega_{32}] + \lambda([\omega_1, \omega_{32}] + [\omega_{31}, \omega_2]) + \lambda^2[\omega_1, \omega_2] = 0$$

et il se peut bien qu'il y a deux scalaires $\lambda$ différents qui y satisfassent.

**21.** De (17,9) et (20,3) il résulte que $[\omega_j\tau_{n0}] = 0$ pour $2 \leqq j \leqq n-1$. Lorsque $n \geqq 4$, on en déduit tout de suite que

$$\tau_{n0} = 0. \tag{21,1}$$

Or nous allons prouver que (21,1) doit avoir lieu même pour $n = 3$. Soit au contraire

$$n = 3, \quad \tau_{30} \neq 0.$$

D'après (20,3) et (20,4) on a

$$\omega_{32} = 0, \quad \omega_{31} \neq 0.$$

Alors les équations (17,7), (17,8) et (17,9) donnent pour $i = 1$

$$\left.\begin{aligned} &2[\omega_1\tau_{10}] + [\omega_2\tau_{20}] + [\omega_3\tau_{30}] = [\tau_{13}\omega_{31}] \\ &[\omega_1\tau_{20}] = [\tau_{23}\omega_{31}] \\ &[\omega_1\tau_{30}] = [\tau_{33} - \tau_{00}\omega_{31}], \end{aligned}\right\} \tag{21,2}$$

et pour $i = 2$

$$\left.\begin{aligned} &[\omega_1\tau_{10}] + 2[\omega_2\tau_{20}] + [\omega_3\tau_{30}] = 0, \\ &[\omega_2\tau_{10}] = 0, \ [\omega_2\tau_{30}] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21,3}$$

D'après (21,3) on peut poser

$$\tau_{10} = 2a\omega_2, \quad \tau_{20} = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3, \quad \tau_{30} = 2c\omega_2;$$

en substituant ces valeurs dans (21,2) on obtient

$$[a\omega_1 + c\omega_3, \omega_2] = [\tau_{13}\,\omega_{31}], \quad [\omega_1, b\omega_2 + c\omega_3] = [\tau_{23}, \omega_{31}],$$
$$2c[\omega_1\omega_2] = [\tau_{33} - \tau_{00}\omega_{31}],$$

d'où il résulte

$$[a\omega_1 + c\omega_3, \omega_2, \omega_{31}] = 0, \quad [\omega_1, b\omega_2 + c\omega_3, \omega_{31}] = 0, \quad c[\omega_1, \omega_2, \omega_{31}] = 0.$$

Puisque $\tau_{30} \neq 0$, on doit avoir $c \neq 0$, d'où

$$[\omega_1\omega_2\omega_{31}] = 0, \quad [\omega_1\omega_3\omega_{31}] = 0, \quad [\omega_2\omega_3\omega_{31}] = 0,$$

ce qui est impossible, puisque $\omega_{31} \neq 0$.

**22.** Nous venons de voir que, pour chaque solution de notre problème differente de celle étudiée au § 19 on peut supposer la validité des relations (20,3), (20,4) et (21,1), que nous allons écrire de nouveau:

$$\omega_{nj} = 0 \text{ pour } 2 \leqq j \leqq n - 1, \tag{22,1}$$

$$\omega_{n1} \neq 0, \tag{22,2}$$

$$\tau_{n0} = 0. \tag{22,3}$$

D'après (17,8) et (22,1) on a

$$[\omega_j \tau_{i0}] = 0 \text{ por } 1 \leqq i \leqq n - 1,\ 2 \leqq j \leqq n - 1,\ i \neq j.$$

Lorsque $n \geqq 5$, on en déduit immédiatement que

$$\tau_{i0} = 0 \text{ opur } 1 \leqq i \leqq n - 1. \tag{22,4}$$

Lorsque $n = 4$, on obtient d'abord seulement

$$\tau_{10} = 0,\ [\omega_2 \tau_{30}] = [\omega_3 \tau_{20}] = 0.$$

Or, pour $n = 4$, on déduit de (17,7) selon (22,1)

$$[\omega_1 \tau_{10}] + 2[\omega_2 \tau_{20}] + [\omega_3 \tau_{30}] = 0,$$
$$[\omega_1 \tau_{10}] + [\omega_2 \tau_{20}] + 2[\omega_3 \tau_{30}] = 0.$$

Puisque $\tau_{10} = 0$, on a donc $[\omega_2 \tau_{20}] = [\omega_3 \tau_{30}] = 0$ ce qui, joint aux relations $[\omega_2 \tau_{30}] = [\omega_3 \tau_{20}] = 0$ déja trouvées, montre que (22,4) à lieu aussi pour $n = 4$.

Au contraire, *pour* $n = 3$ *les relations* (22,4) *ne sont plus nécessairement vraies.* Dans ce qui suit nous n'excluons pas le cas $n = 3$, mais nous y supposons la validité de (22,4) même pour $n = 3$. Les solutions que nous allons obtenir, jointes à celles du § 19, fournissent pour $n \geqq 4$ l'ensemble de toutes les solutions du problème posé au § 14. Par contre pour $n = 3$ il faut encore ajouter les solutions du système de Pfaff (17,1) + + (17,2) + (17,3) + (17,4) + (22,1) + (22,3) pour lesquelles $\omega_{31} \neq 0$ et $\tau_{10} \neq 0$ ou $\tau_{20} \neq 0$; ces nouvelles solutions seront indiquées au Mémoire suivant.

**23.** D'après (22,3) et (22,4) on déduit de (17,7), (17,8) et (17,9) pour $i = 1$:

$$[\tau_{in} \omega_{n1}] = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n - 1,\ [\tau_{nn} - \tau_{00} \omega_{n1}] = 0.$$

D'après (22,2) on peut donc poser

$$\tau_{in} = \alpha_i \omega_{n1} \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n - 1,\ \tau_{nn} - \tau_{00} = \alpha_n \omega_{n1}. \tag{23,1}$$

La relation (17,6) fournit encore

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega_i \, \omega_{n1}\right] = 0. \tag{23,2}$$

De (5,13), (5,15) et (23,1) il résulte

$$\Omega_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega_i \,.\, \omega_{n1}$$

de façon que, vue l'inégalité (16,3), on ne peut avoir $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = = \alpha_n = 0$.

Ecrivons de nouveau la définition (5,2) de l' homographie $K$:

$$KA = B,\ KA_1 = B_1, \ldots, KA_n = B_n.$$

On en déduit par différentiation, tenant compte de (5,3) — (5,6), (17,1) až (17,4), (22,1) — (22,4),

$$\mathrm{d}K \,.\, A = \tau_{00}B,\ \mathrm{d}K \,.\, A_i = \tau_{00}B_i + \alpha_i\omega_{n1}B_n \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-1,$$
$$\mathrm{d}K \,.\, A_n = (\tau_{00} + \alpha_n\omega_{n1})B_n. \tag{23,4}$$

Les équations (23,3) et (23,4) expriment tout d'abord que l'homographie $K$ ne dépend que d'un paramètre $t$ (l'équation $\mathrm{d}t = 0$ étant équivalente et à $\omega_{n1} = 0$ et à $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\omega_i = 0$) et que par suite $K$ reste fixe tant que le point $A$ décrit un certain hyperplan $H(t)$ (c'est l'hyperplan $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 0$, $x_i$ étant les coordonnées du point $X = A + \sum_{i=1}^{n}x_iA_i$. En outre il résulte de (23,4) que l'on a

$$[KX,\ \mathrm{d}K \,.\, X] = 0, \tag{23,5}$$

pour chaque point $X$ de l'hyperplan $H(t)$.

Nous allons montrer que les propriétés qui viennent d'être énumérées suffisent à caractériser les correspondances cherchées.

**24.** Soit donc $\{K(t)\}$ une famille d'homographies entre $S_n$ et $S_n'$ dépendante d'un paramètre $t$ et $\{H(t)\}$ une famille d'hyperplans de $S_n$ dépendante du même paramètre et telle qu'on ait la propriété (23,5). Nous allons prouver qu'en attachant à chaque point $X$ de $H(t)$ le point $KX$ on obtient (en variant $t$) une correspondance entre $S_n$ et $S_n'$ du type étudié, $K(t)$ étant l'homographie tangente correspondante à tous les points de l'hyperplan $H(t)$. Pour une application à faire dans la suite de ce Mémoire, remarquons que le résultat vaut pour chaque $n \geqq 2$. Soit $N$ l'intersection de tous les hyperplans $H(t)$; $N$ est un espace linéaire d'une certaine dimension $h - 1$, où

$$0 \leqq h \leqq n-1; \tag{24,1}$$

pour $h = 0$ l'espace $N$ est vide. Si $h > 0$, choisissons des points fixes $C_1, \ldots, C_h$ de manière que $N = [C_1 \ldots C_h]$. Il est bien connu qu'on peut choisir le point $D = D(t)$ de sorte que

$$H(t) = [C_1 \ldots C_hD\,\mathrm{d}D\,\mathrm{d}^2D \ldots \mathrm{d}^{n-h-1}D]; \tag{24,2}$$

on aura nécessairement

$$[C_1 \ldots C_hD\,\mathrm{d}D\,\mathrm{d}^2D \ldots \mathrm{d}^{n-h}D] \neq 0. \tag{24,3}$$

L'homographie $K(t)$ satisfaisant à (23,5) n'est déterminée qu'à un facteur scalaire près. Il est aisé de voir que l'on peut choisir ce facteur scalaire de façon que (23,5) prenne la forme plus simple

$$dK \,.\, X = 0 \text{ pour chaque point } X \text{ de } H(t). \tag{24,4}$$

Définissons $D_i = D_i(t)$ $(0 \leqq i \leqq n-h)$ moyennant les équations

$$D = D_0,\ dD_i = D_{i+1}\, dt \text{ pour } 0 \leqq i \leqq n-h-1 \tag{24,5}$$

et posons

$$KC_j = C_j'(1 \leqq j \leqq h),\ KD_i = D_i' \ ((0 \leqq i \leqq n-h). \tag{24,6}$$

Il résulte de (24,2) et (24,4) (puisque $dC_j = 0$).

$$dC_j' = 0 \text{ pour } 1 \leqq j \leqq h, \tag{24,7}$$

$$dD_i' = D_{i+1}'dt \text{ pour } 0 \leqq i \leqq h-1. \tag{24,8}$$

En posant $D_0' = D'$ on obtient les relations analogues à (24,2) et (24,3) [($H'(t)$ est l'hyperplan image de $H(t)$ moyennant $K(t)$)]:

$$H'(t) = [C_1' \ldots C_h'D'\, dD'\, d^2D' \ldots d^{n-h-1}D'], \tag{24,9}$$

$$[C_1' \ldots C_h'D'\, dD' \ldots d^{n-h}D'] \neq 0. \tag{24,10}$$

Les points $C_1'. \ldots, C_h'$ sont fixes et l'homographie $K$ est déterminée par

$$KC_j = C_j'(1 \leqq j \leqq h),\ KD = D',\ Kd^iD = d^iD'(1 \leqq i \leqq n-h). \tag{24,11}$$

La correspondance à étudier fait passer le point

$$A = \sum_{j=1}^{h} x_jC_j + \sum_{i=0}^{n-h-1} y_iD_i \tag{24,12}$$

dans le point

$$B = KA = \sum_{j=1}^{h} x_jC_j' + \sum_{i=0}^{n-h-1} y_iD_i'. \tag{24,13}$$

On doit supposer que $y_{n-h-1} \neq 0$, pour ne pas violer les inégalités (1,1) et (1,2). En différentiant on obtient d'abord

$$K \,.\, dA = dB \tag{24,14}$$

de sorte que $K$ est bien une homographie tangente, et ensuite

$$K \,.\, d^2A = d^2B + y_{n-h-1} \,.\, dt^2(KD_{n-h-1} - D'_{n-h-1}), \tag{24,15}$$

où

$$D_{n-h+1}dt = dD_{n-h},\ D'_{n-h+1}dt = dD'_{n-h}. \tag{24,16}$$

Evidement, on a des équations de la forme

$$D_{n-h+1} = \sum_{j=1}^{h} \alpha_jC_j + \sum_{i=0}^{n-h} \beta_iD_i,\quad D'_{n-h+1} = \sum_{j=1}^{h} \alpha_j'C_j' + \sum_{i=0}^{n-h} \beta_i'D_i', \tag{24,17}$$

les $\alpha_j, \alpha_j', \beta_i, \beta_i'$ étant des fonctions de $t$. En substituant les valeurs (24,17) dans (24,15), on obtient

$$K \,.\, d^2A = d^2B + y_{n-h-1}dt^2 \,.\, E', \tag{24,18}$$

où

$$E' = \sum_{j=1}^{h} (\alpha_j - \alpha_j')C_j' + \sum_{i=0}^{n-h} (\beta_i - \beta_i')D_i'. \tag{24,19}$$

Dans le cas où

$$\alpha_j = \alpha_j' \text{ pour } 1 \leqq j \leqq h,\ \beta_i = \beta_i' \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n-h,$$

notre correspondance est homographique. En excluant ce cas, la correspondance appartient au type étudié; la droite totalement $K$-linéarisante de l'espace $S_n$ est la droite $[AE]$, où

$$E = \sum_{j=1}^{h}(\alpha_j - \alpha_j')C_j + \sum_{i=0}^{n-h}(\beta_i - \beta_i')D_i; \tag{24,20}$$

la droite totalement $K$-linéarisante de l'espace $S_n'$ est la droite $[BE']$. Le cône $K$-principal se réduit à l'hyperplan $H(t)$ compté deux fois dans l'espace $S_n$ et à l'hyperplan $H'(t)$ compté deux fois dans l'espace $S_n'$.

On peut se demander quand est-ce que $K$ soit l'homographie locale. On prouve sans difficulté que cela arrive si, et seulement si,

$$\beta_{n-h-1} = \beta'_{n-h-1}, \tag{24,21}$$

ce qui signifie que le rapport

$$[C_1 \dots C_hD\, \mathrm{d}D \dots \mathrm{d}^{n-h}D] : [C_1' \dots C_h'D'\, \mathrm{d}D' \dots \mathrm{d}^{n-h}D'] \tag{24,22}$$

est constant.

Nous avons examiné dans ce paragraphe un type de correspondances qu'on peut appeler *correspondances développables* (enveloppes d'une famille $\infty^1$ d'homographies) par voie de calcul. On peut faire une analyse purement géometrique de cet intéressant type de transformations, mais ceci sera fait dans une autre occasion.

## Projektivní diferenciální geometrie korespondencí mezi dvěma prostory. II.

(Obsah předešlého článku.)

Se stanoviska vyloženého v předcházejícím pojednání jsou po kolineacích nejjednodušší takové korespondence mezi dvěma prostory $S_n$, $S_n'$, u nichž pro každý pár sobě příslušných bodů $A$, $B$ lze zvoliti tečnou kolineaci $K$ tak, že v trsu $A$ existuje pevná přímka $(w)$, která je $K$-linearisující přímkou všech přímek trsu $A$; řekneme, že $(w)$ je *totálně $K$-linearisující přímka*. Taková totálně $K$-linearisující přímka $(w)$ existuje potom nutně také v trsu $B$. Určení všech korespondencí mezi dvěma $n$-rozměrnými prostory, u kterých pro každý pár $A$, $B$ lze voliti tečnou kolineaci $K$ tak, že existuje totálně $K$-linearisující přímka, je předmětem tohoto a následujícího pojednání. Pro $n = 2$ má každá korespondence žádanou vlastnost, a to zpravidla při třech různých volbách tečné kolineace $K$. Pro $n \geqq 3$ může žádaná vlastnost býti splněna jen pro jedinou volbu tečné kolineace $K$.

Nejjednodušší je ten případ, kdy v prostoru $S_n$ existuje pevný bod $C$, kterým procházejí všecky totálně $K$-linearisující přímky. Takový pevný bod $D$ existuje potom nutně ve druhém prostoru $S_n'$. Všecky korespondence tohoto druhu lze sestrojiti takto. Zvolíme bod $C$ v prostoru $S_n$ a bod $D$ v prostoru $S_n'$. Dále zvolíme libovolný kolineární vztah $\varphi$ mezi trsem přímek $C$ a trsem přímek $D$. Posléze přiřadíme bodům každé přímky $p$ trsu $C$ podle zcela libovolného zákona body příslušné přímky $\varphi(p)$ trsu $D$.

Vedle právě popsaných korespondencí závislých na jedné libovolné funkci $n$ proměnných má náš problém pro každé $n \geq 3$ ještě další řešení závislé na $2n$ libovolných funkcích jedné proměnné. Tato řešení se vyznačují tím, že v každém z obou prostorů existuje soustava $\infty^1$ nadrovin, z nichž každé je při dané korespondenci transformována kolineárně. Jestliže tyto nadroviny neprocházejí žádným pevným bodem, potom dostaneme korespondenci, která bodu

$$A = x_0 C + x_1 \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}u} + \ldots + x_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}C}{\mathrm{d}u^{n-1}}$$

přiřazuje bod

$$B = x_0 D + x_1 \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}u} + \ldots + x_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}D}{\mathrm{d}u^{n-1}},$$

při čemž oba body $C$, $D$ závisejí na témž parametru $u$ a opisují křivky, které nejsou vnořeny do lineárního prostoru o méně než $n$ dimensích. Podobné vyjádření dostaneme, i když nadroviny kolineárně transformované procházejí v jednom (a potom nutně i ve druhém) z prostorů $S_n$, $S_n'$ pevným bodem nebo několika pevnými body.

Pro $n \geq 4$ je tím vyčerpán soubor všech řešení našeho problému. Avšak pro $n = 3$ existují další řešení, která budou určena v následujícím pojednání.