Zdeněk Pírko

Analagmatické čáry v kvadratické inverzi

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 3, D266--D276

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123878

ANALAGMATICKÉ ČÁRY V KVADRATICKÉ INVERSI.

ZDENĚK PÍRKO, Praha.

1.0. Předmětem tohoto článku je určení všech algebraických čar, které se reprodukují kvadratickou inversí. Nazveme je — analogicky k názvu, jehož se používá v kruhové inversi — *čáry analagmatické*, ač název povahu těchto čar nijak nevystihuje.

Z obecných vlastností kvadratické inverse budou uvedeny (v odst. **1.1** až **1.3**) jen ony, jichž je třeba pro vytčený úkol, a ve formulaci jen tak obsažné, v jaké jich bude v dalším použito.

Nutno poznamenat: Transformací stupeň útvaru se všeobecně zvýší; s ohledem na tuto okolnost budeme rozumět pod pojmem analagmatických útvarů jen ony odpovídající součásti, které splývají se základním útvarem.

1.1. *Kvadratická inverse* **I** je příbuznost mezi body v rovině zprostředkovaná pevnou kuželosečkou **K** a pevným bodem P tímto způsobem: Obecnému bodu M odpovídá bod $'M$, který leží na přímce PM a zároveň na poláře bodu P vzhledem ke kuželosečce **K**.

Daná kuželosečka **K** sluje *řídicí kuželosečka inverse*, daný bod P *střed inverse*. O řídicí kuželosečce předpokládáme, že je jednoduchá, o středu, že neleží na řídicí kuželosečce.

Tyto vlastnosti inverse **I** plynou z definice ihned: Obecnému bodu M, to jest bodu, který ani nesplývá se středem inverse, ani neleží na řídicí kuželosečce, odpovídá jediný bod $'M$ a obráceně: **I** *je příbuznost obapolně jednoznačná* ... [1.1,1].

Z definice inverse **I** je patrno, že obecnému bodu $'M \equiv N$ odpovídá bod $'N \equiv M$: **I** *je příbuznost involutorní* ... [1.1,2].

Body M, $'M$ jsou podle definice kolineární s pevným bodem P: **I** *je příbuznost středová* ... [1.1,3].

Je známo, že mezi kvadratickými (viz odst. 1.2) involucemi je to právě kvadratická inverse **I**, která je charakterisována vlastnostmi [1.1,1] až [1.1,3].

1.2. Veďme ze středu P tečny ke kuželosečce **K**; buďtež X_1, X_2 body dotyku. Volme soustavu souřadnic tak, že bude

$$X_1(1;\,0;\,0),\quad X_2(0;\,1;\,0),\quad P(0;\,0;\,1).$$

Tím se uvede rovnice kuželosečky **K** na tvar $a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$ ($a_{33} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$). Požadavkem, aby tato kuželosečka ještě také obsahovala bod jednotkový, její rovnice se ještě zjednoduší na

$$x_3^2 - x_1x_2 = 0. \tag{1.2,1}$$

V takto zvolené soustavě obecnému bodu $M(x)$ (obecnému ve smyslu odst. 1.1) odpovídá bod $'M('x)$, který leží jednak na přímce PM, tedy

$$x_2'x_1 - x_1'x_2 = 0,$$

jednak na poláře bodu M vzhledem ke kuželosečce **K**, tedy

$$x_2'x_1 + x_1'x_2 - 2x_3'x_3 = 0.$$

I máme toto *analytické vyjádření* příbuznosti **I**:

$$'x_1 : 'x_2 : 'x_3 = x_1x_3 : x_2x_3 : x_1x_2; \tag{1.2,2$_1$}$$

vzhledem k involutorní povaze příbuznosti **I** je i obráceně

$$x_1 : x_2 : x_3 = 'x_1'x_3 : 'x_2'x_3 : 'x_1'x_2. \tag{1.2,2$_2$}$$

Podle rovnic (1.2,2) doplníme základní vlastnosti kvadratické inverse z odst. 1.1 ještě touto:

I *je příbuznost kvadratická* ... [1.2,1].

Pokud existují v rovině body, pro které rovnice (1.2,2) neplatí (tak zvané hlavní body příbuznosti; střed P a body X_1, X_2), rozšiřujeme platnost těchto rovnic definitoricky. Viz také odst. 1.3.

1.3 Bod, který v příbuznosti odpovídá sám sobě, sluje *samodružný bod* této příbuznosti.

V příbuznosti **I** jsou samodružné body — existují-li takové — určeny podmínkou

$$x_i = 'x_i; \quad i = 1, 2, 3$$

za současné platnosti rovnic (1.2,2$_1$) nebo (1.2,2$_2$). V obou případech platí však souhlasně

$$\frac{x_1}{x_1x_3} = \frac{x_2}{x_2x_3} = \frac{x_3}{x_1x_2},$$

a tedy za předpokladu, že všechna $x_i \neq 0$; $i = 1, 2, 3$,

$$x_3^2 - x_1x_2 = 0.$$

To však je rovnice (1.2,1): *Řídicí kuželosečka* **K** *je samodružná* ... [1.3,1$_1$].

Předpoklad $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ znamená, že jsme vyloučili střed P. V otázce samodružnosti tohoto bodu obraťme se k analytickému vyjádření příbuznosti. Pro $x_1 = x_2 = 0$ nelze rovnice (1.2,2$_1$) interpretovat; z rovnic (1.2,2$_2$) však plyne

$$'x_1'x_3 = 'x_2'x_3 = 0, \quad 'x_1'x_2 \neq 0.$$

Je tedy nutné i stačí, když $'x_3 = 0$. To však je polára X_1X_2 středu P vzhledem ke kuželosečce **K**. Vzhledem k involutorní povaze příbuznosti **I** máme tak: *Středu inverse odpovídá jeho polára vzhledem k řídicí kuželosečce. A obráceně* ... [1.3,2].

I doplníme větu [1.3,1$_1$] takto: *Kromě bodů řídicí kuželosečky nemá příbuznost* **I** *jiných bodů s touto vlastností* ... [1.3,1$_2$].

Řídicí kuželosečka **K**, jsouc samodružná, je bod za bodem analagmatickou čarou v příbuznosti **I**.

2.0. Budeme se zabývat otázkou *analagmatických přímek* v příbuznosti **I**.

Přímce
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$
odpovídá podle rovnic (1.2,2_2) a po vynechání akcentů kuželosečka
$$a_1x_1x_3 + a_2x_2x_3 + a_3x_1x_2 = 0,$$
procházející středem inverse P a body dotyku X_1, X_2 tečen vedených z bodu P k řídicí kuželosečce **K**. Aby se rozpadla, je nutné i stačí, když
$$a_1a_2a_3 = 0.$$
Vyloučíme-li případ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, pak to znamená:
buďto
$$a_i = 0, \; a_ja_k \neq 0,$$
nebo
$$a_i = a_j = 0, \; a_k \neq 0$$
$$(i, j, k = 1, 2, 3; \; i \neq j \neq k \neq i).$$
Vyšetříme (odst. 2.1 až 2.3) tyto případy.

2.1. V případě, kdy $a_1 = 0$, $a_2a_3 \neq 0$ prochází základní přímka $a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ ($a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$) bodem X_1; odpovídající kuželosečka se rozpadne na $x_2 = 0$, to jest přímku X_1P, a další součást $a_3x_1 + a_2x_3 = 0$, to jest přímku jdoucí bodem X_2. Obdobně v případě, kdy $a_2 = 0$, $a_1a_3 \neq 0$. První dvě možnosti tedy k analagmatickým přímkám nevedou.

Je-li však $a_3 = 0$, $a_1a_2 \neq 0$, základní přímka $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ ($a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$) prochází středem P; odpovídající kuželosečka se rozpadne na $x_3 = 0$, to jest přímku X_1X_2 (v souhlase s větou [1.3,2]) a další součást, která splývá s přímkou základní. Můžeme tudíž, nepřihlížíme-li k součásti X_1X_2 (to jest vyloučíme-li bod P základní přímky), prohlásit: *Přímka procházející středem inverse je analagmatická* ... [2.1,1].

Věta [2.1,1] *neplatí* pro přímky PX_1 a PX_2. Pak ale každá přímka, jdoucí středem P a jiná než PX_1, PX_2 protne řídicí kuželosečku ve dvou různých bodech A, B. Podle definice inverse z odst. 1.1 je zřejmé, že inversní bodové dvojice M, $'M$ na každé takové přímce tvoří s oběma jejími průsečíky A, B s řídicí kuželosečkou harmonickou čtveřinu v tomto pořadí: $(M'MAB) = -1$. I platí vzhledem k větě [1.3,1]: *Inversní bodové dvojice na analagmatické přímce tvoří involuci, jejíž samodružné body jsou průsečíky analagmatické přímky s řídicí kuželosečkou* ... ..., [2.1,2].

Věta [2.1,2] platí ovšem jen pro takové dvojice M, $'M$, kde žádný z obou bodů neleží na řídicí kuželosečce. O případech, kdy $A \equiv M$ resp. $B \equiv M$ viz větu [1.3,1].

2.2. Jestliže $a_2 = a_3 = 0$, ale $a_1 \neq 0$, je základní přímka $x_1 = 0$, to jest přímka PX_2; jí odpovídá kuželosečka $x_1x_3 = 0$, složená z přímek PX_2, X_1X_2. Z těchto dvou součástí přímka X_1X_2 odpovídá středu P (věta [1.3,2]), druhá přímka splývá s přímkou základní. Obdobně v případě, kdy $a_1 = a_3 = 0, a_2 \neq 0$. I platí, nepřihlížíme-li zase k součásti X_1X_2, věta [2.1,1] i pro přímky PX_1, PX_2.

Jestliže $a_1 = a_2 = 0$, ale $a_3 \neq 0$, je základní přímka $x_3 = 0$, to jest přímka X_1X_2; jí odpovídá kuželosečka $x_1x_2 = 0$, složená ze součástí PX_1, PX_2. Okolnost, vyslovená ve větě [1.3,2], vede nás k tomu, abychom za odpovídající útvar prohlásili singulární bod P této kuželosečky. K analagmatickým přímkám tato možnost tedy nevede.

2.3. Možnosti, vytčené v odst. 2.0, vyšetřili jsme v odst. 2.1, 2.2. Výsledkem je věta: *Nutná a postačující podmínka, aby přímka byla analagmatická, je ta, aby obsahovala střed inverse* ... [2.3,1].

K této větě mohli jsme dospět rychleji: Aby přímka byla analagmatická, je nutné, aby s každým svým bodem obsahovala i bod inversní. Taková dvojice je však tvořena body různými; kdyby totiž splývaly, byla by přímka samodružná, a to podle věty [1.3,1] není možné. Spojnice dvou inversních bodů prochází podle věty [1.1,3] středem P. Tedy: Aby přímka byla analagmatická, musí obsahovat střed inverse. To už však stačí: Přímka jdoucí středem P, to jest přímka $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, transformuje se rovnicemi $(1.2,2_2)$ v čáru, jejíž jednou součástí je základní přímka. I lze větu [2.3,1] vyslovit jinak takto: *Nutná a postačující podmínka, aby přímka byla analagmatická, je ta, aby obsahovala dvojici nesplývajících inversních bodů* ... [2.3,2].

3.0. *Analagmatické kuželosečky* určíme takto: Jednoduché kuželosečce

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ (|a_{ik}| \neq 0) \end{array}\right\} \quad (3.0,1)$$

odpovídá podle rovnic $(1.2,2_2)$ a po vynechání akcentů křivka čtvrtého stupně

$$a_{33}x_1^2x_2^2 + (a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2)x_3^2 + 2(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{12}x_3)x_1x_2x_3 = 0.$$

O povahu této kvartiky se nezajímáme.

Aby se rozpadla tak, že jednou součástí bude jednoduchá kuželosečka, k tomu postačí jedna z těchto možností*):

a) $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = a_{33} = 0$,
b) $a_{22} \neq 0$, $a_{11} = a_{33} = 0$,
c) $a_{33} \neq 0$, $a_{11} = a_{22} = 0$,

to jest, aby obsahovala dva ze tří bodů P, X_1, X_2. Vyšetříme je a při tom také zodpovíme otázku jejich nutnosti, aby kvadratická součást byla analagmatická.

3.1. a) Jestliže je $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = a_{33} = 0$, rovnice základní kuželosečky zní

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ {[a_{23}(2a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}) \neq 0];} \end{array}\right\} \quad (3.1,1_1)$$

*) V theorii kvadratických transformací obapolně jednoznačných se dokazuje, že uvedené možnosti jsou i nutné.

odpovídající kvartika je

$$x_1x_3(2a_{23}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_2 + a_{11}x_1x_3 + 2a_{12}x_2x_3) = 0$$

a její součásti jsou

$$x_1 = 0\ (PX_1),\ x_3 = 0\ (X_1X_2)$$

a kuželosečka

$$2a_{23}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_2 + a_{11}x_1x_3 + 2a_{12}x_2x_3 = 0. \qquad (3.1,1_2)$$

Za platnosti podmínek vytčených při rovnici $(3.1,1_1)$ není možné, aby kuželosečky $(3.1,1_1)$, $(3.1,1_2)$ splynuly.

b) Obdobně v případě, kdy $a_{22} \neq 0$, $a_{11} = a_{33} = 0$.

Možnosti a), b) k analagmatickým kuželosečkám nevedou.

c) Je-li však $a_{33} \neq 0$, $a_{11} = a_{22} = 0$, základní kuželosečka je

$$\left.\begin{array}{l} a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ {[a_{12}(2a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) \neq 0]} \end{array}\right\} \qquad (3.1,2_1)$$

a odpovídající kvartika

$$x_1x_2(2a_{12}x_3^2 + a_{33}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3) = 0$$

má součásti PX_1, PX_2 a kuželosečku

$$2a_{12}x_3^2 + a_{33}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \qquad (3.1,2_2)$$

Kuželosečky $(3.1,2_1)$, $(3.1,2_2)$ mohou splynout; k tomu je nutné, aby matice

$$\begin{pmatrix} a_{33}, & 2a_{12}, & 2a_{13}, & 2a_{23} \\ 2a_{12}, & a_{33}, & 2a_{13}, & 2a_{23} \end{pmatrix}$$

měla hodnost jedna, čili aby

$$a_{33}^2 - 4a_{12}^2 = 0,\ a_{33} - 2a_{12} = 0.$$

Odtud

$$a_{33} - 2a_{12} = 0. \qquad (3.1,3)$$

Tato podmínka už stačí: Kuželosečka

$$\left.\begin{array}{l} a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_1x_3 + a_{12}(x_1x_2 + x_3^2) = 0 \\ (a_{12} \neq 0,\ a_{13}a_{23} - a_{12}^2 \neq 0) \end{array}\right\} \qquad (3.1,4)$$

přejde rovnicemi $(1.2,2_2)$ — nepřihlížeme-li ovšem k součástem PX_1, PX_2 — v sebe. A tedy i kuželosečka (3.0,1) přejde za podmínek $a_{33} \neq 0$, $a_{11} = a_{22} = 0$ a podmínky (3.1,3) — nepřihlížíme-li k součástem PX_1, PX_2 — v sebe. Tím je zodpověděna i otázka po nutnosti podmínek uvedených v odst. 3.0; výsledkem je tato věta: *Nutné a postačující podmínky, aby kuželosečka*

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$
$$(|a_{ik}| \neq 0)$$

byla analagmatická, jsou $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{33} - 2a_{12} = 0$ ... [3.1,1]

V této formulaci jsou podmínky závislé na volbě soustavy souřadnic.

3.2. Najdeme význam podmínek, uvedených ve větě [3.1,1].

První dvě podmínky značí, že kuželosečka jde body X_1, X_2. Třetí podmínka $a_{33} - 2a_{12} = 0$ říká, že kuželosečka jdoucí body X_1, X_2 a bodem (x) prochází také inversním bodem $('x)$. Obráceně nechť kuželosečka jdoucí body X_1 a X_2 obsahuje s bodem (x) také inversní bod $('x) \neq (x)$. Snadno se najde, že pak platí podmínky uvedené ve větě [3.1,1]. Lze tedy větu [3.1,1] vysloviti také takto: *Nutné a postačující podmínky, aby jednoduchá kuželosečka byla analagmatická, jsou ty, aby obsahovala body dotyku X_1, X_2 tečen vedených ze středu inverse P k řídicí kuželosečce* **K** *a kromě toho dvojici bodů inversních ...* [3.2,1].

V této formulaci nejsou již podmínky závislé na volbě soustavy souřadnic. Poznamenejme ještě, že analagmatickou kuželosečku lze charakterisovat i jinými způsoby.

3.3. Rovnice (3.1,4) ukazuje, že jednoduché analagmatické kuželosečky tvoří síť; nazveme ji *analagmatická síť kuželoseček.*

Podmínky uvedené ve větě [3.1,1] ukazují: Okolnost, že kuželosečka sítě obsahuje body X_1, X_2, platí za dvě lineární podmínky pro koeficienty $a_{ik}(a_{11} = a_{22} = 0)$; okolnost, že obsahuje dvojici inversních bodů (a tudíž že obsahuje ∞^1 takových dvojic), platí za jednu lineární podmínku pro koeficienty $a_{ik}(a_{33} - 2a_{12} = 0)$. Uvedené podmínky jsou lineárně nezávislé.

Buďtež opět X_1, X_2 body dotyku tečen vedených ze středu P k řídicí kuželosečce **K**; pak existuje ∞^3 kuželoseček jdoucích body X_1, X_2, ovšem nikoliv nutně analagmatických. Tato soustava kuželoseček obsahuje síť (∞^2) analagmatických kuželoseček. Připojme další dva body M, $'M$, které nenáleží řídicí kuželosečce (při tom libovolný je pouze bod M nebo pouze $'M$; zbývající bod už odpovídá v inversi **I** definované útvary P a **K**); pak existuje ∞^1 kuželoseček, jež tvoří analagmatický svazek. Připojme další bod N resp. $'N$ neležící na řídicí kuželosečce (dvojice N, $'N$ je dvojice inversní); touto volbou a výše uvedenými prvky je stanovena jediná určitá analagmatická kuželosečka.

3.4. Uvedeme některé vlastnosti analagmatické sítě:

Jednoduchá kuželosečka sítě má rovnici

$$\left.\begin{array}{l} a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_1x_3 + a_{12}(x_1x_2 + x_3^2) = 0 \\ (a_{12} \neq 0,\ a_{13}a_{23} - a_{12}^2 \neq 0). \end{array}\right\} \qquad (3.4,1_1)$$

Polára libovolného bodu (y) vzhledem ke kuželosečce $(3.4,1_1)$ je

$$(a_{12}y_2 + a_{13}y_3)x_1 + (a_{12}y_1 + a_{23}y_3)x_2 + \\ + (a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + 2a_{12}y_3)x_3 = 0.$$

Budiž tímto bodem (y) bod $A(a_{23} : a_{13} : -a_{12})$; z předcházející rovnice plyne pro tento případ

$$(a_{13}a_{23} - a_{12}^2)x_3 = 0,$$

a tedy, jestliže předpokládáme $a_{13}a_{23} - a_{12}^2 \neq 0$,

$$x_3 = 0.$$

Za těchto podmínek je polárou přímka X_1, X_2; a obráceně, pólem přímky X_1X_2 je bod A. Přímka PA protne přímku X_1X_2 v bodě P^*; čtvrtý bod harmonický A^* k bodu A vzhledem k bodům P, P^* je patrně A^* $(a_{23} : a_{13} : + a_{12})$.

Hledejme nyní průsečík přímek

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}[a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_1x_3 + a_{12}(x_1x_2 + x_3^2)] &\equiv a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}[a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_1x_3 + a_{12}(x_1x_2 + x_3^2)] &\equiv a_{12}x_1 + a_{23}x_3 = 0; \end{aligned}\right|$$

nalezneme bod $A(a_{23} : a_{13} : - a_{12})$. Z tohoto (formálního) důvodu nazveme tento bod *„středem“ analagmatické kuželosečky* $(3.4,1_1)$.

Pišme

$$a_{23} : a_{13} : a_{12} = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3;$$

rovnice $(3.4,1_1)$ bude míti tvar

$$\lambda_1x_2x_3 + \lambda_2x_1x_3 + \lambda_3(x_1x_2 + x_3^2) = 0 \qquad (3.4,1_2)$$

a vzhledem k úvahám, vysloveným výše, můžeme vyslovit větu: *Za předpokladu, že $\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 \neq 0$, mají parametry $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ v síti analagmatických kuželoseček* $(3.4,1_2)$ *tento geometrický význam: Jsou to souřadnice bodu A^*, který je harmonicky sdružen se „středem“ A analagmatické kuželosečky vzhledem ke středu inverse P a průsečíku P^* přímky PA s přímkou X_1X_2* ... $[3.4,1_1]$.

Význam podmínky $\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 \neq 0$ nalezneme, ptáme-li se po *složených kuželosečkách analagmatické sítě.* Aby se kuželosečka $(3.4,1_2)$ rozpadla, je nutné a stačí, když

$$\lambda_3(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2) = 0.$$

Případ $\lambda_3 = 0$ vede na kuželosečku o součástech $x_3 = 0$ (X_1X_2), $a_{13}x_1 + a_{23}x_2 = 0$ (přímka středem P), což je analagmatický útvar v souhlase s větou [2.1,1]. Případ $\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 = 0$ $(\lambda_3 = \pm\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$ vede ke kuželosečkám

$$(\sqrt{\lambda_2}x_1 + \sqrt{\lambda_1}x_3)(\sqrt{\lambda_1}x_2 + \sqrt{\lambda_2}x_3) = 0,$$

které, jsouce samozřejmě analagmatické, reprodukují se — nepřihlížíme-li k součástem PX_1, PX_2 — v příbuznosti **I** jakožto celek, při čemž jejich součásti se navzájem zaměňují. Doplníme tedy větu $[3.4,1_1]$ takto: *Předpoklad $\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 \neq 0$ znamená, že jsme vyloučili ony složené kuželosečky sítě* $(3.4,1_2)$, *které se skládají z přímek jdoucích body X_1, X_2* ... $[3.4,1_2]$.

4.0. Analagmatické přímky příbuznosti **I** tvoří svazek (analagmatický svazek přímek) o středu P a základních přímkách PX_1, PX_2 (odst. 2.1); analagmatické kuželosečky příbuznosti **I** tvoří síť (analagmatickou síť kuželoseček) o těchto základních kuželosečkách: složené kuželosečky (PX_1, X_1X_2), (PX_2, X_1X_2) a jednoduchá kuželosečka $x_1x_2 + x_3^2 = 0$ (jde body X_1, X_2 a obsahuje nekonečně mnoho nesplývajících inversních dvojic; odst. 3.4).

V příbuznosti I kromě přímek a kuželoseček však existují další *analagmatické křivky*, stupně vyššího než druhého. Ukážeme (v odst. 4.1 až 4.3), jak je lze sestrojit.

4.1. Předpokládejme, že koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ v rovnici analagmatické kuželosečky (3.4,1_2) jsou algebraickými a homogenními (tedy spojitými a derivace schopnými) funkcemi parametru t:

$$\lambda_i = \lambda_i(t); \; i = 1, 2, 3.$$

Pokud se týká dalších podmínek, jimž jsou podrobeny funkce $\lambda_i(t)$, dojdeme k nim postupně.

Pak rovnice

$$\lambda_1(t)x_2x_3 + \lambda_2(t)x_1x_3 + \lambda_3(t)(x_1x_2 + x_3^2) = 0 \qquad (4.1,1_1)$$

představuje ∞^1 analagmatických kuželoseček (jednoduchých i složených). Jejich obálka, jestliže existuje, je určena rovnicí (4.1,1_1) a její derivací podle t:

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} x_2x_3 + \frac{d\lambda_2(t)}{dt} x_1x_3 + \frac{d\lambda_3(t)}{dt} (x_1x_2 + x_3^2) = 0, \qquad (4.1,1_2)$$

tedy buďto oběma rovnicemi (4.1,1_1), (4.1,1_2) současně, nebo dvěma homogenními rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} -(\lambda_2\lambda_3' - \lambda_2'\lambda_3)x_1^2 + (\lambda_1\lambda_2' - \lambda_1'\lambda_2)x_1x_3 + (\lambda_1\lambda_3' - \lambda_1'\lambda_3)x_3^2 = 0 \\ -(\lambda_1\lambda_3' - \lambda_1'\lambda_3)x_2^2 - (\lambda_1\lambda_2' - \lambda_1'\lambda_2)x_2x_3 + (\lambda_2\lambda_3' - \lambda_2'\lambda_3)x_3^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\lambda_i' \equiv \frac{d\lambda_i(t)}{dt}; \; i = 1, 2, 3\right),$$

které z nich snadno odvodíme.

Označíme-li Λ_i subdeterminant, příslušný k i-tému prvku v prvním řádku determinantu

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \lambda_1', & \lambda_2', & \lambda_3' \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3 \end{vmatrix},$$

to jest

$$\Lambda_1 \equiv \lambda_2'\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3', \; \Lambda_2 \equiv -(\lambda_1'\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3'), \; \Lambda_3 \equiv \lambda_1'\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2', \qquad (*)$$

můžeme předcházející soustavu psát jednodušeji:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1x_1^2 - \Lambda_3x_1x_3 + \Lambda_2x_3^2 = 0 \\ \Lambda_2x_2^2 - \Lambda_3x_2x_3 + \Lambda_1x_3^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1,2)$$

Z rovnic (4.1,2) plyne za předpokladu $\Lambda_1 \neq 0$, $\Lambda_2 \neq 0$:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{2\Lambda_1}(\Lambda_3 + \sqrt{\Lambda_3^2 - 4\Lambda_1\Lambda_2}), \; \frac{x_2}{x_3} = \frac{1}{2\Lambda_2}(\Lambda_3 + \sqrt{\Lambda_3^2 - 4\Lambda_1\Lambda_2}).$$

Případ $\Lambda_1 \equiv 0$ znamená, že $\lambda_2'\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3' \equiv 0$, tedy $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ = konst., obdobně případ $\Lambda_2 \equiv 0$ znamená, že $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$ = konst., a tedy i poměr kterýchkoliv dvou funkcí λ_i je stálý. Naším předpokladem jsme však tento případ vyloučili. Pak ale předcházející rovnice poskytují toto parametrické vyjádření obálky:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \Lambda_2 : \Lambda_1 : \tfrac{1}{2}(\Lambda_3 - \sqrt{\Lambda_3^2 - 4\Lambda_1\Lambda_2}). \qquad (4.1,3)$$

Snadno nahlédneme, že se rovnice (4.1,1), (4.1,2), (4.1,3) v příbuznosti **I** reprodukují. U rovnic (4.1,1_1), (4.1,1_2) je to samozřejmé, neboť obě vyjadřují analagmatickou kuželosečku. Rovnice (4.1,2) transformací (1.2,2_2) a po vynechání akcentů přejdou na

$$\left.\begin{aligned} x_1^2(\Lambda_1x_3^2 - \Lambda_3x_2x_3 + \Lambda_2x_2^2) &= 0 \\ x_2^2(\Lambda_2x_3^2 - \Lambda_3x_1x_3 + \Lambda_1x_1^2) &= 0, \end{aligned}\right\}$$

a tedy se za předpokladu, že současně $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ (to jest vyloučíme-li střed inverse; viz větu [1.3,2]), reprodukují jako celek. Konečně úměra (4.1,3) přejde inversí **I** na

$$x_1 : x_2 : x_3 = \Lambda_2 : \Lambda_1 : \tfrac{1}{2}(\Lambda_3 + \sqrt{\Lambda_3^2 - 4\Lambda_1\Lambda_2}),$$

tedy se, vzhledem k dvojznačnosti odmocniny $\sqrt{\Lambda_3^2 - 4\Lambda_1\Lambda_2}$, opět jako celek reprodukuje.

Vším tím jsme dokázali: *Obálka* ∞^1 *analagmatických kuželoseček utvořených způsobem* (4.1,1_1); *kde* $\lambda_i(t)$ *jsou algebraické homogenní (spojité a derivace schopné) funkce, z nichž žádné dvě nemají stálý poměr, existuje-li, je křivka analagmatická v téže inversi, v níž jsou analagmatické kuželosečky* (4.1,1_1). *Parametrické rovnice této křivky jsou dány rovnicemi* (4.1,3), *v nichž použito zkratek* (*) ... [4.1,1].

„Střed" jedné z analagmatických kuželoseček soustavy (4.1,1_1) je bod o souřadnicích $(\lambda_1 : \lambda_2 : -\lambda_3)$. Jestliže parametr t nabývá všech svých hodnot, popíše tento bod obecně křivku a její parametrické rovnice budou

$$y_1 : y_2 : y_2 = \lambda_1 : \lambda_2 : -\lambda_3; \qquad (4.1,4)$$

nazveme ji *deferentou* příslušné analagmatické křivky. Tedy: *K analagmatické křivce, určené větou* [4.1,1] (*rovnicemi* (4.1,3), *přísluší obecně jediná deferenta; její parametrické rovnice jsou* (4.1,4) ... [4.1,2].

A obráceně je patrno: *K deferentě přísluší (v dané inversi* **I**) *obecně jediná analagmatická křivka* ... [4.1,3].

4.2. Obráceně buď dána křivka analagmatická v inversi **I**; její rovnice nechť má tvar:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (4.2,1)$$

(f je algebraická homogenní funkce).

Existuje jediná analagmatická kuželosečka, která se křivky (4.2,1) dotýká v regulárním bodě jejím (x): Tečna křivky (4.2,1) v bodě (x) a v souřadnicích y je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0,$$

tečna analagmatické kuželosečky $(4.1,1_1)$ v tomtéž bodě je

$$(\lambda_3 x_2 + \lambda_2 x_3) y_1 + (\lambda_3 x_1 + \lambda_1 x_3) y_2 + (\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2 + 2\lambda_3 x_3) y_3 = 0.$$

Totožnost obou právě napsaných přímek vyžaduje, aby

$$\left.\begin{aligned} x_3\lambda_2 + x_2\lambda_3 &= \varrho f_1' \\ x_3\lambda_1 + \ x_1\lambda_3 &= \varrho f_2' \\ x_2\lambda_1 + x_1\lambda_2 + 2x_3\lambda_3 &= \varrho f_3' \end{aligned}\right\} \left(f_i' = \frac{\partial f}{\partial x_i};\ i = 1, 2, 3;\ \varrho \neq 0\right).$$

Determinant soustavy těchto rovnic je

$$\Delta \equiv 2x_3(x_1x_2 - x_3^2);$$

vyloučíme-li tedy případ, že by bod (x) ležel na přímce $x_3 = 0$ (přímce X_1X_2) nebo na kuželosečce $x_1x_2 - x_3^2 = 0$ (řídicí kuželosečce **K** příbuznosti), existuje jediná trojice čísel λ_i takových, že

$$\Delta\lambda_1 = \begin{vmatrix} \varrho f_1', & x_3, & x_2 \\ \varrho f_2', & 0\ , & x_1 \\ \varrho f_3', & x_1, & 2x_3 \end{vmatrix} = \varrho(x_1x_2f_2' + x_1x_3f_3' - x_1^2f_1' - 2x_3^2f_2')$$

a dva další vztahy. Poněvadž ale platí $x_1f_1' + x_2f_2' + x_3f_3' = 0$, nalezneme posléze jednodušeji obecně jedinou trojici čísel λ_i:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_2 = \\ &= (x_1^2f_1' + x_3^2f_2') : (x_2^2f_2' + x_3^2f_1') : x_3^2f_3', \end{aligned}\right\} \qquad (4.2,2)$$

a tedy obecně jedinou kuželosečku požadované vlastnosti, jak jsme chtěli dokázat.

Všimněme si ještě případů, které jsme vyloučili. Jestliže $x_3 = 0$, pak to pro analagmatickou kuželosečku znamená především, že je $\lambda_3 x_1 x_2 = 0$; a uvažujeme-li jen ony body, pro které $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, tedy $\lambda_3 = 0$. Obdobně případ $x_1x_2 - x_3^2 = 0$ znamená pro analagmatickou kuželosečku, že je $x_3(\lambda_1x_2 + \lambda_2x_1 + 2\lambda_3x_3) = 0$, a poněvadž $x_3 \neq 0$ (případ $x_3 = 0$ jsme právě probrali!), tedy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ale první případ $\lambda_3 = 0$ vede na složenou analagmatickou kuželosečku (viz odst. 3.4), druhý případ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_2 = 0$ neurčuje vůbec žádnou kuželosečku.

V příbuznosti **I** analagmatická křivka se reprodukuje; kuželosečka o parametrech λ_i určených rovnicemi (4.2,2), jsouc analagmatická, reprodukuje se rovněž. Jestliže tedy bod (x) nabývá všech poloh na křivce (4.2,1) s výjimkou bodů X_1, X_2 a na kuželosečce **K**, vznikne ∞^1 analagmatických kuželoseček, obalených křivkou (4.2,1). Přitom „stře-

dy^{t_1} těchto kuželoseček popíší křivku (deferentu), jejíž parametrické rovnice jsou (4.2,2), v nichž ovšem píšeme $-f_3'$ místo f_3', k nimž přistupuje ještě vztah (4.2,1) mezi parametry x_1, x_2, x_3. Platí tudíž obrácení věty [4.1,1]: *Analagmatická křivka je obálkou ∞^1 analagmatických kuželoseček, jejichž „středy" popisují jistou křivku, totiž příslušnou deferentu. Je-li* (4.2,1) *rovnice analagmatické křivky, jsou rovnice* $y_1 : y_2 : y_3 = (x_1^2 f_1' + x_3^2 f_2') : (x_2^2 f_2' + x_3^2 f_1') : -x_2^2 f_3'$ a $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ *parametrickým vyjádřením její deferenty* ... [4.2,1]

V předcházející úvaze došli jsme k větě [4.2,1], aniž jsme rozlišovali mezi jednoduchými a složenými kuželosečkami soustavy (4.1,1_1). Vztah složených kuželoseček této soustavy k obálce (4.2,1) je však mimo rámec tohoto článku.

4.3. Dokázali jsme, že obálka ∞^1 analagmatických kuželoseček je křivka analagmatická (věta [4.1,1]); obráceně, že analagmatická křivka je obálkou takových kuželoseček (věta [4.2,1]). Odtud: *Nutná a postačující podmínka, aby křivka byla analagmatická, je ta, aby byla obálkou ∞^1 analagmatických kuželoseček, jejichž „středy" popisují libovolnou křivku — deferentu* ... [4.3,1].

Dokázali jsme (věty [4.1,2,3]), že k deferentě existuje jediná analagmatická křivka; obráceně, že k analagmatické křivce existuje jediná deferenta. Odtud: *Vztah mezi analagmatickou křivkou a deferentou je obapolně jednoznačný* ... [4.3,2].

V rovnicích (4.1,3) je odmocnina $\sqrt{\Lambda_3^2 - 4\Lambda_1\Lambda_2}$ dvojznačná: k dané hodnotě t [to jest k dané analagmatické kuželosečce soustavy (4.1,1_1)] přísluší dva body dotyku s obálkou a oba tvoří inversní dvojici. Jediný bod dostali bychom jen pro ony hodnoty t, které vyhovují rovnici $\Lambda_3^2 - 4\Lambda_1\Lambda_2 = 0$ čili

$$(\lambda_1'\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2')^2 + 4(\lambda_1'\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3')(\lambda_2'\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3') = 0.$$

Budiž t^* řešení této rovnice; i odpovídá mu analagmatická kuželosečka, která má se svou obálkou jen jeden bod dotyku. Ten ale je nutně bodem samodružným a tudíž (věta [1.3,1_2]) leží na řídicí kuželosečce **K**. Lze tedy říci: *Analagmatická kuželosečka dotýká se analagmatické křivky dvojnásob a to v bodech, které jsou kolineární se středem inverse a tvoří inversní dvojici* ... [4.3,3].

Les courbes anallagmatiques. Nous appellons anallagmatiques les courbes, ayant la propriété de se reproduire par l'inversion quadratique. Les plus simples de ces courbes sont la droite et la conique. Les coniques anallagmatiques font un réseau spécial. Toute courbe anallagmatique (droites et coniques exceptées) est l'enveloppe d'un système de coniques anallagmatiques. Toute conique enveloppée est bitangente à la courbe anallagmatique.