Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zdeněk Pírko

Základní rovnice raketové theorie

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 3, D293--D306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123876

ZÁKLADNÍ ROVNICE RAKETOVÉ THEORIE.

ZDENĚK PÍRKO, Praha.

0,1. Definice rakety. Základní předpoklady. Raketou budeme rozumět jen takové zařízení, které je schopné pohybu v důsledku reaktivního působení proudu vytékajícího plynu. Plynu se dostalo rychlosti následkem fysikálně-chemického procesu a následující expanse uvnitř rakety. Všechnu zásobu látek, jichž je zapotřebí k vytvoření takového proudu, nese si raketa s sebou.

O povaze dějů uvnitř rakety nečiníme zvláštních všeobecných předpokladů. Pokud se v dalším ukáže nutnost takové předpoklady zavést, vytkneme je na příslušném místě. Učiníme však důležité předpoklady, které se týkají prostředí, jímž se raketa pohybuje, a systému, v němž její pohyb pozorujeme. Jsou to:

a) Na raketu nepůsobí vnější síly. (Raketa se pohybuje v prostředí prázdném a beztížném.)

b) Pohyb rakety je přímočarý v systému, který je spjat s místem startu. (Nebude na újmu obecnosti našich úvah, budeme-li předpokládat, že raketa vystupuje svisle vzhůru vzhledem k pevné a rovné Zemi.)

0,2. Použité označení. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že raketa je kontinuitního typu, to jest po vstupu v činnost tuto ukončí až po spotřebování celé zásoby pohonných látek. V této fázi činnosti rakety nechť značí:

t čas;
$M = M(t)$ okamžitá hmota rakety;
$v = v(t)$ okamžitá rychlost rakety vzhledem k pevné Zemi;

$c = c(t)$ okamžitá výtoková rychlost plynu vzhledem k systému, který je spjat s raketou;
$m = m(t)$ okamžitá hmota vyproudivších plynů;
$w = w(t)$ okamžitá rychlost vyproudivších plynů vzhledem k pevné Zemi.

Při extrémních rychlostech v zavedeme ve smyslu speciální theorie relativnosti tato další označení:

$\gamma = 3 \,.\, 10^{10}$ cm sec^{-1} rychlost světla v prázdném prostředí;
${}^0M(t)$ resp. ${}^0m(t)$ klidové hodnoty hmot M resp. m;
v_* resp. c_* resp. w_* rychlosti v resp. c resp. w měřené rychlostí světla

$$\left(v_* = \frac{v}{\gamma},\ c_* = \frac{c}{\gamma},\ w_* = \frac{w}{\gamma}\right).$$

V okamžiku startu ($t = 0$), případně v okamžiku ukončení činnosti rakety ($t = T$) označíme:

$M_0 = M(0)$ počáteční hmota rakety;
$\mu = M(T)$ konečná hmota rakety;
$V = v(T)$ konečná rychlost rakety vzhledem k pevné Zemi;
$N_0 = M_0 - \mu$ počáteční hmota pohonných látek;
$\varkappa$ hmota M_0 měřená konečnou hmotou rakety $\left(\varkappa = \dfrac{M_0}{\mu}\right)$.

V čase $0 < t < T$ budeme uvažovat ještě tyto veličiny:

$\boldsymbol{I} = -\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$ intensita hoření [$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}(t)$];
$\boldsymbol{R}$ reaktivní síla [$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t)$];
$a = a(t)$ okamžité zrychlení rakety vzhledem k pevné Zemi;
$s = s(t)$ dráha rakety měřená od místa startu;
$A = a(T)$ resp. $S = s(T)$ konečné hodnoty veličin a resp. s.

1,1. Základní soustava a základní rovnice raketové theorie (klasicky). Za předpokladů **0,1** platí zákony klasické mechaniky: (1) zákon zachování hmoty, (2) zákon zachování impulsu, (3) součtový theorém o rychlostech:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}m &= -\mathrm{d}M \\ \mathrm{d}(Mv) &= \mathrm{d}m \,.\, w \\ w &= c - v \end{aligned}} \quad (0 < t < T). \qquad \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Tato soustava (*základní soustava raketové theorie*) za uvedených okolností popisuje úplně a obecně pohyb rakety v době $0 < t < T$.

Eliminujeme-li z rovnic (1), (2), (3) veličiny m, w, obdržíme *základní rovnici raketové theorie*:

$$\frac{\mathrm{d}M}{M} = -\frac{\mathrm{d}v}{c}$$

s integrálem

$$M = \text{konst.}\ \exp\left(-\int \frac{dv}{c}\right). \tag{4}$$

1,2. Základní soustava a základní rovnice raketové theorie (relativisticky). Za předpokladů **0,1** a pro rychlosti v souměřitelné s rychlostí světla platí zákony relativistické mechaniky: (1) zákon zachování energie, (2) zákon zachování impulsu, (3) součtový theorém o rychlostech:

$$\boxed{\begin{aligned} d\left(\frac{{}^0m\gamma^2}{\sqrt{1-w_*^2}}\right) &= -d\left(\frac{{}^0M\gamma^2}{\sqrt{1-v_*^2}}\right) \quad (1)\\ d\left(\frac{{}^0M}{\sqrt{1-v_*^2}}v_*\right) &= d\left(\frac{{}^0m}{\sqrt{1-w_*^2}}\right)\cdot w_* \quad (2)\\ w &= \frac{c-v}{1-c_*v_*} \quad (3)\end{aligned}}$$

$$(0 < t < T).$$

Tato soustava (*základní soustava raketové theorie relativisticky korigovaná*) za uvedených okolností (a za předpokladu, že $v < \gamma$ pro jakékoliv t) popisuje pohyb rakety v době $0 < t < T$ úplně a obecně.

Eliminujeme-li z rovnic (1), (2), (3), veličiny $\frac{{}^0m}{\sqrt{1-w_*^2}}$, w_*, obdržíme *základní rovnici raketové theorie relativisticky korigovanou:*

$$\frac{d\,{}^0M}{{}^0M} = -\frac{dv}{c(1-v_*^2)}$$

s integrálem

$$ {}^0M = \text{konst.}\ \exp\left(-\int \frac{dv}{c(1-v_*^2)}\right). \tag{4}$$

Pro $v \ll \gamma$ přejde relativistický vztah **1,2**(4) v klasický vztah **1,1**(4); totéž platí i o důsledcích z této rovnice učiněných.

Podle rovnice (4) se vyskytují v relativisticky korigované theorii rakety jen hmoty klidové; můžeme tedy exponent 0 napříště vynechávat.

2,1. Rakety se stálou výtokovou rychlostí. Dějů uvnitř rakety týká se tento běžně činěný předpoklad: Děj v raketě budiž řízen tak, že *výtoková rychlost c je v čase $0 < t < T$ stálá.*

Za předpokladu, že c = konst., plyne z rovnic **1,1**(4) resp. **1,2**(4)

$$M = \text{konst.}\ \exp\left(-\frac{v}{c}\right) \tag{1}$$

(klasicky),

resp.

$$M = \text{konst. } \exp\left(-\frac{1}{2c_*}\log\frac{1+v_*}{1-v_*}\right) \tag{2}$$

(relativisticky).

Přejdeme k důsledkům těchto rovnic.

2,2. Počáteční podmínky; zákon ubývání hmoty s rychlostí. Arbitrární konstantu v rovnicích **2,1**(1), (2) odstraníme vhodnou volbou *počátečních podmínek*; přijímáme tu

$$\text{pro } t = 0 \text{ je } v = 0 \text{ (a ovšem } M(0) = M_0).$$

Obdržíme tak *zákony ubývání hmoty s rychlostí*:

$$M = M_0 \exp\left(-\frac{v}{c}\right) \quad (c = \text{konst.},\ 0 < v < V) \tag{1}$$

(klasicky),

$$M = M_0 \exp\left(-\frac{1}{2c^*}\log\frac{1+v_*}{1-v_*}\right) \quad (c = \text{konst.},\ 0 < v < V < \gamma) \tag{2}$$

(relativisticky).

Odtud

$$v = c \log\frac{M_0}{M} \quad (c = \text{konst.},\ 0 < v < V) \tag{3}$$

(klasicky),

$$v_* = \frac{1-\left(\dfrac{M}{M_0}\right)^{2c_*}}{1+\left(\dfrac{M}{M_0}\right)^{2c_*}} = \operatorname{Tg}\left(c_* \log\frac{M_0}{M}\right) \quad (c = \text{konst.},\ 0 < v < V < \gamma) \tag{4}$$

(relativisticky).

2,3. Konečné podmínky; rovnice Cjolkovského a rovnice Ackeretova. Z rovnic **2,2**(1), (2), (3), (4) plyne pro *konečné podmínky*

$$\text{pro } t = T \text{ je } v = V \text{ (a ovšem } M(T) = \mu)$$

jednak

$$\mu = M_0 \exp\left(-\frac{V}{c}\right) \quad (c = \text{konst.}) \tag{1}$$

(klasicky),

$$\mu = M_0 \exp\left(-\frac{1}{2c_*}\log\frac{1+V_*}{1-V_*}\right) \quad \left(c = \text{konst.},\ V_* = \frac{V}{\gamma},\ V < \gamma\right) \tag{2}$$

(relativisticky);

jednak

$$\boxed{V = c\log\frac{M_0}{\mu} = c\log\varkappa} \quad (c = \text{konst.}) \tag{3}$$

(klasicky),

$$\boxed{V_* = \frac{1-\left(\dfrac{\mu}{M_0}\right)^{2c_*}}{1+\left(\dfrac{\mu}{M_0}\right)^{2c_*}} = \mathrm{Tg}\left(c_*\log\frac{M}{\mu}\right) = \mathrm{Tg}(c_*\log\varkappa)} \tag{4}$$

$$\left(c = \text{konst.},\ V_* = \frac{V}{\gamma},\ V < \gamma\right)$$

(relativisticky).

Rovnice (3) nazývá se *rovnice Cjolkovského*; relativisticky korigovaná rovnice Cjolkovského (4) nazývá se *rovnice Ackeretova*. Pro theorii rakety mají obě význam základní.

Za předpokladu, že výtoková rychlost má touž hodnotu pro raketu řídící se zákony klasickými, i pro raketu, pro niž platí zákony relativisticky korigované, a za předpokladu, že poměr hmot $\varkappa$ je pro obě rakety stejný, plyne z rovnic (3), (4) tento vzájemný vztah obou konečných rychlostí:

$$V_{*(\text{rel.})} = \mathrm{Tg}V_{*(\text{klas.})} \quad \left(c = \text{konst.},\ V_* = \frac{V}{\gamma},\ V < \gamma\right). \tag{5}$$

Vzhledem k řádové velikosti poměru V_* lze odtud odvoditi tento přibližný vztah:

$$V_{(\text{rel.})} \approx V_{(\text{klas.})} - \frac{1}{3\gamma^2} V^3_{(\text{klas.})}, \tag{5'}$$

který může sloužit k posouzení vlivu relativistické korekce.

3,1. Rakety c = konst., I = konst.; základní vlastnosti. Předpokladu **2,1** odpovídá nejspíše předpoklad, že *intensita hoření I je v čase $0 < t < T$ stálá.*

Ze vztahu

$$I = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \tag{*}$$

vzhledem k počátečním podmínkám **2,2** plyne pro tento typ raket ***zákon ubývání hmoty s časem***

$$\boxed{M = M_0 - It} \quad (c = \text{konst.},\ I = \text{konst.},\ 0 < t < T); \tag{1}$$

vzhledem ke konečným podmínkám 2,3 dospíváme k vztahu mezi konstantami M_0, μ, N_0, l, T:

$$M_0 - \mu = N_0 = lT \quad (c = \text{konst.}, l = \text{konst.}). \tag{2}$$

Za předpokladu, že vnitřní mechanismus rakety, vyjádřený rovnicí (1) (a ovšem i rovnicí c = konst.), beze změny lze přenést i do obecně platných relativistických vztahů odvozených v předcházejících odstavcích, nalezneme pro rakety c = konst., l = konst. tyto základní vlastnosti:

Spojíme-li rovnici 3,1(1) s rovnicí 2,2(1) resp. 2,2(2), obdržíme

$$M_0 - lt = M_0 \exp\left(-\frac{v}{c}\right)$$
$$(c = \text{konst.}, l = \text{konst.}, 0 < t < T, 0 < v < V) \tag{3}$$
(klasicky)

resp.

$$M_0 - lt = M_0 \exp\left(-\frac{1}{2c_*} \log \frac{1 + v_*}{1 - v_*}\right)$$
$$(c = \text{konst.}, l = \text{konst.}, 0 < t < T, 0 < v < V < \gamma) \tag{4}$$
(relativisticky);

spojíme-li rovnici 3,1(1) s rovnicí 2,2(3) resp. 2,2(4) [nebo i přímým výpočtem z předcházejících rovnic (3), (4)] obdržíme

$$v = c \log \frac{M_0}{M - lt}$$
$$(c = \text{konst.}, l = \text{konst.}, 0 < t < T, 0 < v < V) \tag{5}$$
(klasicky)

resp.

$$v_* = \mathrm{Tg}\left(c_* \log \frac{M_0}{M_0 - lt}\right)$$
$$(c = \text{konst.}, l = \text{konst.}, 0 < t < T, 0 < v < V < \gamma) \tag{6}$$
(relativisticky).

Rovnice Cjolkovského 2,3(3) a rovnice Ackeretova 2,3(4) zůstávají ovšem nezměněny.

3,2. Pohybová rovnice. Násobme rovnici 2,2(1) zleva $-\frac{d}{dt}$; vzhledem k vztahu 3,1(*) obdržíme nejprve

$$l = \frac{1}{c} M_0 \exp\left(-\frac{v}{c}\right) a$$

a znovu vzhledem k rovnici 2,2(1)

$$Ma = cl \quad (c = \text{konst.}, \, l = \text{konst.}, \, 0 < t < T) \tag{1}$$
(klasicky).

To je *pohybová rovnice raket* $c =$ konst., $l =$ konst. Z ní vzhledem k předpokladům **0,1** plyne ihned pro reaktivní sílu

$$R = cl \quad (c = \text{konst.}, \, l = \text{konst.}, \, 0 < t < T) \tag{2}$$
(klasicky).

Týmž postupem plyne z rovnic **2,2**(2) a **3,1**(*)

$$Ma = c(1 - v_*^2)l \quad (c = \text{konst.}, \, l = \text{konst.}, \, 0 < t < T, \, v < \gamma) \tag{3}$$
(relativisticky)

a tedy

$$R = c(1 - v_*^2)l \quad (c = \text{konst.}, \, l = \text{konst.}, \, 0 < t < T, \, v < \gamma) \tag{4}$$
(relativisticky)

Pro $v \ll \gamma$ relativistické výsledky (3), (4) přecházejí ve výsledky klasické (1), (2).

3,3. První a druhý integrál rovnice 3,2(1) resp. 3,2(3).

a) Z rovnic **3,2**(1) a **3,1**(*) plyne pro zrychlení rakety výraz

$$a = \frac{cl}{M_0 - lt} \quad (c = \text{konst.}, \, l = \text{konst.}, \, 0 < t < T) \tag{1}$$
(klasicky);

odtud speciálně pro počátek a konec činnosti rakety

$$a(0) = \frac{cl}{M_0}, \; a(T) = A = \frac{cl}{\mu}. \tag{2}$$

Integrací rovnice (1) za počátečních podmínek **2,2** dojdeme k vztahům již známým:

$$v = c \log \frac{M_0}{M_0 - lt} \quad (c = \text{konst.}, \, l = \text{konst.}, \, 0 < t < T) \tag{3,1(5)}$$
(klasicky),

speciálně

$$v(0) = 0, \; v(T) = V = c \log \frac{M_0}{\mu} = c \log \varkappa. \tag{2,3(3)}$$

To je *první integrál* (zákon rychlosti) pohybové rovnice **3,2**(1).

Dvojí integrací rovnice (1) za počátečních podmínek **2,2** (k nimž nyní ovšem přistupuje podmínka $s = 0$ pro $t = 0$) obdržíme

$$s = ct - \frac{c}{l}(M_0 - lt) \log \frac{M_0}{M_0 - lt} \quad (c = \text{konst.}, \, l = \text{konst.}, \, 0 < t < T) \tag{3}$$
(klasicky),

speciálně pro konec činnosti rakety

$$s(T) = S = cT - \frac{c}{I}\mu \log \frac{M_0}{\mu}$$

nebo, vzhledem k rovnici **2,3**(3),

$$S = cT - \frac{\mu}{I} V \quad (c = \text{konst.}, \ I = \text{konst.}) \tag{4}$$

(klasicky).

To je *druhý integrál* (zákon dráhy) pohybové rovnice **3,2**(1).

Konečně z rovnic **3,1**(5) a **3,3**(3) plyne tento vztah mezi dráhou a rychlostí:

$$s = \frac{M_0}{I}\left[c - (c + v) \exp\left(-\frac{v}{c}\right)\right]. \tag{5}$$

b) Týmž postupem (a za předpokladu vytčeného v odst. **3,1** z rovnic **3,2**(3) a **3,1**(*) plyne pro zrychlení výraz

$$a = \frac{c(1 - v_*^2)\, I}{M_0 - It};$$

po vyloučení v_*^2 pomocí rovnice **2,2**(4) bude

$$a = \frac{cI}{M_0 - It} \frac{1}{\mathrm{Cos}^2\left(c_* \log \frac{M_0}{M_0 - It}\right)} \tag{6}$$

$(c = \text{konst.}, \ I = \text{konst.}, \ 0 < t < T, \ v < \gamma)$

(relativisticky),

speciálně pro $t = 0$ a $t = T$

$$a(0) = \frac{cI}{M_0}, \quad a(T) = A = \frac{cI}{\mu} \frac{1}{\mathrm{Cos}^2(c_* \log \varkappa)}. \tag{7}$$

Jako první integrál pohybové rovnice **3,2**(3) nalezli bychom opět **3,1**(6) s důsledky **2,3**(4) (a ovšem $v_*(0) = 0$).

Pro druhý integrál pohybové rovnice **3,2**(3) plyne z rovnice **3,1**(6) nejprve

$$\mathrm{d}s = \gamma\, \mathrm{Tg}\left(c_* \log \frac{M_0}{M_0 - It}\right) \mathrm{d}t; \tag{*}$$

substitucí $c_* \log \dfrac{M_0}{M_0 - It} = \tau$ obdržíme

$$\mathrm{d}s = \gamma \frac{M_0}{c_* I} \mathrm{Tg}\tau \exp\left(-\frac{\tau}{c_*}\right) \mathrm{d}\tau,$$

substitucí $\exp\tau = \vartheta$ obdržíme

$$ds = \gamma\,\frac{M_0}{c_* l}\,\frac{\vartheta^\alpha - \vartheta^\beta}{1+\vartheta^2}\,d\vartheta$$

$$\left(\alpha = 1 - \frac{1}{c_*},\ \beta = -1 - \frac{1}{c_*}\right),$$

kde příslušnou integraci lze provést nekonečnou řadou.

Podobně však, jako v odst. **2,3**, použijeme i zde s ohledem na řádovou velikost argumentu funkce Tg na pravé straně rovnice (*) této aproximace:

$$\gamma\,\mathrm{Tg}\left(c_*\log\frac{M_0}{M_0 - lt}\right) \approx c\log\frac{M_0}{M_0 - lt} - \frac{c^3}{3\gamma^2}\log^3\frac{M_0}{M_0 - lt}.$$

Tak obdržíme místo rovnice (*) přibližný vztah

$$s \approx \text{konst.} + c\int\log\frac{M_0}{M_0 - lt}\,dt - \frac{c^3}{3\gamma^2}\int\log^3\frac{M_0}{M_0 - lt}\,dt. \qquad (**)$$

Nepřihlížíme-li k integrační konstantě, pak první integrál na pravé straně rovnice (**) není nic jiného než pravá strana rovnice **3,3**(3), to jest druhý integrál klasické pohybové rovnice. Druhý integrál na pravé straně rovnice (**) je tedy aproximace pro relativistickou korekci.

Píšeme-li postupně

$$\log\frac{M_0}{M_0 - lt} \approx \log\left(1 + \frac{l}{M_0}t\right) \approx \frac{l}{M_0}\left(1 - \frac{l}{2M_0}t\right)t,$$

$$\log^3\left(1 + \frac{l}{M_0}t\right)^{-1} \approx \frac{l^3}{M_0^3}\left(1 - \frac{3l}{2M_0}t\right)t^3 \approx \frac{l^3}{M_0^3}t^3,$$

obdržíme pro relativistickou korekci (velmi hrubě) $-\dfrac{c^3}{12\gamma^2}\dfrac{l^3}{M_0^3}t^4$, a tedy, nyní už vzhledem k počátečním podmínkám **2,2** (a další podmínce $s(0) = 0$),

$$s \approx ct - \frac{c}{l}(M - lt)\log\frac{M_0}{M_0 - lt} - \frac{c^3}{12\gamma^2}\left(\frac{l}{M_0}\right)^3 t^4 \qquad (8)$$

$$(c = \text{konst.},\ l = \text{konst.},\ 0 < t < T,\ v < \gamma)$$

(relativisticky).

Speciálně pro konec činnosti rakety

$$S \approx cT - \frac{\mu}{I} V - \frac{c^3}{12\gamma^2}\left(\frac{I}{\mu}\right)^3 T^4 \quad (c = \text{konst.},\ I = \text{konst.}) \tag{9}$$

(relativisticky).

Rovnice (8) je druhý integrál pohybové rovnice **3,2**(3).

4,1. Rakety c = konst., a = konst. O vnitřním ději v raketě lze (mimo předpokladu, že výtoková rychlost je stálá) učinit ovšem i jiný předpoklad, než byl náš dosavadní **3,1**. V praxi má ještě také význam, předpokládáme-li, že *zrychlení a je v čase $0 < t < T$ stálé.*

4,2. Klasická theorie. Ve smyslu klasické theorie plyne z rovnice **2,2**(3) vztah

$$\mathrm{d}v = -c\,\frac{\mathrm{d}M}{M}; \tag{*}$$

vzhledem k předpokladu **4,1** je však $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$ (a = konst.), takže integrováním rovnice (*) vzhledem k počátečním podmínkám **2,2** obdržíme *zákon ubývání hmoty s časem*

$$M = M_0 \exp\left(-\frac{a}{c}t\right) \quad (c = \text{konst.},\ a = \text{konst.},\ 0 < t < T) \tag{1}$$

(klasicky).

Tentýž výsledek plyne ovšem přímo i z rovnice **2,2**(1) a vztahu $v = at$ (a = konst.). Jako důsledek rovnice (1) máme tento vztah mezi konstantami M_0, μ, a, c, T:

$$\frac{M_0}{\mu} = \varkappa = \exp\left(\frac{a}{c}T\right).$$

Pišme rovnici (*) ve tvaru $\frac{\mathrm{d}M}{M} = -\frac{a}{c}\,\mathrm{d}t$; ve spojení s rovnicí (1) nalezneme tedy pro intensitu hoření

$$I = -\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{c}M = \frac{a}{c}M_0 \exp\left(-\frac{a}{c}t\right)$$

$$(c = \text{konst.},\ a = \text{konst.},\ 0 < t < T) \tag{2}$$

(klasicky)

a speciálně

$$I(0) = \frac{a}{c}M_0, \quad I(T) = \frac{a}{c}\mu. \tag{3}$$

Z rovnice (1) plyne $Ma = aM_0 \exp\left(-\frac{a}{c}t\right)$, takže vzhledem k předpokladu **0,1** nalézáme pro reaktivní sílu vztah

$$\mathbf{R} = aM = aM_0 \exp\left(-\frac{a}{c}t\right) (c = \text{konst.},\ a = \text{konst.},\ 0 < t < T) \quad (4)$$

(klasicky)

a speciálně

$$\mathbf{R}(0) = aM_0,\ \mathbf{R}(T) = a\mu. \quad (5)$$

Doplňme ještě, že z předpokladu **4,1** plyne tento první a druhý integrál příslušné pohybové rovnice raket c = konst., a = konst.:

$$\left.\begin{aligned} v &= at(0 < t < T),\ \text{speciálně}\ V = aT\ , \\ s &= \tfrac{1}{2}at^2\,(0 < t < T),\ \text{speciálně}\ S = \tfrac{1}{2}aT^2 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(klasicky).

4,3. Relativistická theorie. Otázka relativistických korekcí nemá u raket c = konst., a = konst. smyslu. Ve speciální theorii relativnosti odvozuje se vztah, který při konstantním zrychlení a udává rychlost jako funkci času; zní

$$v_* = \mathrm{Tg}\frac{a}{\gamma}t. \quad (1)$$

Formálně bychom k němu dospěli také tak, že bychom do rovnice **2,2**(4) zavedli klasický vztah pro ubývání hmoty s časem **4,2**(1).

Pro dráhu by pak podle rovnice (1) platil vztah

$$ds = \gamma \mathrm{Tg}\left(\frac{a}{\gamma}t\right)dt$$

čili

$$s = \frac{\gamma^2}{a}\ \mathrm{logCos}\ \frac{a}{\gamma}t. \quad (2)$$

Pro úvahy tohoto druhu nemáme však zvláštního důvodu.

5,0. Závěr. Výsledky, které jsme našli v předcházejících odstavcích pro oba základní typy raket c = konst., $\mathbf{I}$ = konst. a c = konst., a = konst. shrneme. Relativistické korekce, které je třeba uvažovat při extrémních rychlostech, připojíme jen v nejdůležitějších případech.

5,1. Klasická theorie raket se stálou výtokovou rychlostí a stálou intensitou hoření. Tabulka obsahuje výsledky odstavců **2,1** až **2,3** a **3,1** až **3,3** ve smyslu klasické theorie.

Rakety c = konst., $\mathbf{l}$ = konst. (klasicky).

Funkce	Čas		
	$t = 0$	$0 < t < T$	$t = T$
hmota	$M(0) = M_0$	$M(t) = M_0 - \mathbf{l}t = M$ **3,1**(1)	$M(T) = M_0 - \mathbf{l}T = \mu$ **3,1**(2)
rychlost	$v(0) = 0$	$v(t) = c \log \frac{M_0}{M}$ **2,2**(3); **3,1**(5)	$v(T) = c \log \frac{M_0}{\mu} = V$ ($V = c \log \varkappa$) **2,3**(3)
zrychlení	$a(0) = \frac{c\mathbf{l}}{M_0}$ **3,3**(2)	$a(t) = \frac{c\mathbf{l}}{M}$ **3,3**(1)	$a(T) = \frac{c\mathbf{l}}{\mu} = A$ **3,3**(2)
dráha	$s(0) = 0$	$s(t) = ct - \frac{c}{\mathbf{l}} M \log \frac{M_0}{M}$ **3,3**(3)	$s(T) = cT - \frac{c}{\mathbf{l}} \mu \log \frac{M_0}{\mu} = S$ $\left(S = cT - \frac{\mu}{\mathbf{l}} V\right)$ **3,3**(4)
reaktivní síla	$\mathbf{R}(0) = c\mathbf{l}$ **3,2**(2)	$\mathbf{R}(t) = c\mathbf{l}$ **3,2**(2)	$\mathbf{R}(T) = c\mathbf{l}$ **3,2**(2)

5,2. Relativistická theorie raket se stálou výtokovou rychlostí a stálou intensitou hoření. Tabulka obsahuje výsledky odstavců **2,1** až **2,3** a **3,1** až **3,3** ve smyslu speciální theorie relativnosti.

Rakety c = konst., I = konst. (relativisticky).

Funkce	Čas		
	$t = 0$	$0 < t < T$	$t = T$
hmota	$M(0) = M_0$	$M(t) = M_0 - It = M$ **3,1**(1)	$M(T) = M_0 - IT = \mu$ **3,1**(2)
rychlost	$v(0) = 0$	$v_*(t) = \mathrm{Tg}\left(c_* \log \frac{M_0}{M}\right)$ **2,2**(4); **3,1**(6)	$V_* = \mathrm{Tg}(c_* \log \varkappa)$ **2,3**(4)
zrychlení	$a(0) = \frac{cI}{M_0}$	$a(t) = \frac{cI}{M} \frac{1}{\mathrm{Cos}^2\left(c_* \log \frac{M_0}{M}\right)}$ **3,3**(6)	$A = \frac{cI}{\mu} \frac{1}{\mathrm{Cos}^2(c_* \log \varkappa)}$ **3,3**(7)
dráha	$s(0) = 0$	$s(t) \approx ct - \frac{c}{I} M \log \frac{M_0}{M} - \frac{c^3}{12\gamma^2} \left(\frac{I}{M_0}\right)^3 t^4$ **3,3**(8)	$S \approx cT - \frac{\mu}{I} V - \frac{c^3}{12\gamma^2} \left(\frac{I}{\mu}\right)^3 T^4$ **3,3**(9)
reaktivní síla	$R(0) = cI$ **3,2**(4)	$R(t) = c(1 - v_*^2) I$ **3,2**(4)	$R(T) = c(1 - V_*^2) I$ **3,2**(4)

5,3. Klasická theorie raket se stálou výtokovou rychlostí a stálým zrychlením. Tabulka obsahuje výsledky odstavců **4,1** a **4,2** ve smyslu klasické theorie.

Rakety c = konst., a = konst. (klasicky).

Funkce	Čas: $t = 0$	Čas: $0 < t < T$	Čas: $t = T$
hmota	$M(0) = M_0$	$M(t) = M_0 \exp\left(-\frac{a}{c}t\right) = M$ 4,2(1)	$M(T) = M_0 \exp\left(-\frac{a}{c}T\right) = \mu$.
reaktivní síla	$R(0) = aM_0$ 4,2(5)	$R(t) = aM$ 4,2(4)	$R(T) = a\mu$ 4,2(5)
intensita hoření	$I(0) = \frac{a}{c}M_0$ 4,2(3)	$I(t) = \frac{a}{c}M$ 4,2(2)	$I(T) = \frac{a}{c}\mu$ 4,2(3)
rychlost	$v(0) = 0$	$v(t) = at$ 4,2(6)	$V = aT = c \log\varkappa$
dráha	$s(0) = 0$	$s(t) = \frac{1}{2}at^2$ 4,2(6)	$S = \frac{1}{2}aT^2$

Théorie de la fusée sous les conditions réduites (sans aucunes forces extérieures et pendant le mouvement rectiligne) s'exprime toujours par un système des équations **1,1** (1, 2, 3) ou **1,2** (1, 2, 3). Dans l'article précédent nous appliquons cettes équations dans les cas les plus fréquents: des fusées à combustion constante et cettes à l'accélération constante.