Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vilém Santholzer

Základy theorie atomového reaktoru

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 3, D319--D327

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123874

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1950

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

de la qualité des instruments visuels d'optique. Il apparaît que la limite de résolution de l'oeil est fonction de la brillance, du contraste et du diamètre de la pupille. Pour rendre possible l'évaluation de la qualité d'un instrument par voie expérimentale, l'auteur définit l'efficacité et la performance de l'instrument. A la fin du travail, l'auteur décrit la manière de l'évaluation théorique „a priori" à partir des données du calcul.

ZÁKLADY THEORIE ATOMOVÉHO REAKTORU

Dr VILÉM SANTHOLZER, Praha.

I. Základní pojmy. Theorie reaktoru předpokládá znalost základních konstant atomových jader, která tvoří generační oblast reaktoru (oblast, kde se odehrává štěpení a kde se brzdí rychlosti neutronů). Především jsou to *účinné průřezy* (σ) a *střední volné dráhy* (λ) neutronů. Je třeba rozeznávat tyto účinné průřezy: pro štěpení jader neutrony (σ_f), pro neštěpné pohlcování neutronů v jádrech (σ_a) a pro rozptyl neutronů na jádrech (σ_s). Podobně rozlišujeme střední volné dráhy neutronů a také střední doby života neutronů. Podle základní poučky je lineární absorpční koeficient μ roven makroskopickému účinnému průřezu σN, kde N značí počet atomů v 1 cm^3 hmoty. Protože lineární absorpční koeficient μ je převratnou hodnotou střední volné dráhy λ částice (podobně jako rozpadová konstanta radioaktivního prvku je převratnou hodnotou střední doby života jeho jader), platí vztah

$$\lambda = \frac{1}{\sigma N}, \tag{1}$$

který je základním vzorcem pro theorii reaktoru. Rozměr λ je cm, což souhlasí s tím, že rozměr $\sigma N = \mu$ je cm^{-1}.

Střední doba života neutronu před jeho štěpným pohlcením je tudíž

$$\tau = \frac{\text{dráha}}{\text{rychlost}} = \frac{1}{\sigma_f v N}, \tag{2}$$

takže za jednu vteřinu vznikne $1 : \tau = \sigma_f v N$ neutronů. V případě, že *hustota neutronů n* (množství v 1 cm^3) zůstává konstantní, plyne z toho vzorec pro výkon W reaktoru objemu V:

$$W = \frac{n v \sigma_f N V}{3 \,.\, 10^{10}} \text{ wattů}, \tag{3}$$

protože přibližně $3 \,.\, 10^{10}$ štěpení odpovídá 1 joule. Uvažujeme reaktor stejnorodý (homogenní), jehož generační prostor je tvořen čistou štěpitelnou hmotou, na příklad uranem 235 nebo plutoniem. Za hustotu neutronů n je třeba dosadit střední hustotu, neboť hustota je závislá od polohy uvažovaného objemového elementu v reaktoru. Pro reaktor nestejnorodý (heterogenní), na příklad soustavu tyčí z přírodního uranu (směs U 238 a U 235) v tuhovém moderátoru, platí v podstatě stejný vzorec.

2. Časový průběh hustoty neutronů ve stejnorodém reaktoru bez neutronů zpožděných. Uvažujeme pro jednoduchost reaktor s neutrony pouze jedné rychlosti (monochromatické). Neutron poletuje v reaktoru až do okamžiku, kdy je štěpně nebo neštěpně pohlcen. Štěpným pohlcováním vznikají další generace neutronů, neboť při rozštěpení uranového jádra se uvolní středně asi dva neutrony, obecně η neutronů. Neštěpným pohlcováním se neutrony pro reprodukční děj ztrácejí. Je třeba definovat *činitel využití* f:

$$f = \frac{\text{počet neutronů pohlcených štěpně}}{\text{celkový počet pohlcených neutronů}}. \qquad (4)$$

Za jeden pohlcený neutron se tedy získá ηf neutronů, což je *reprodukční* neboli *multiplikační konstanta* k. Pro $k = 1$ zůstává hustota neutronů stálá a reaktor pracuje se stálým výkonem.

Soubor neutronů v reaktoru můžeme si představit jako soubor radioaktivních atomů, které se rozpadají a mají určitou střední dobu životní. Rozpadová rychlost je úměrná okamžitému množství radioaktivních atomů, konstanta úměrnosti je rozpadová konstanta, která je převratnou hodnotou střední doby života. V souboru neutronů je tudíž „rozpadovou konstantou“ $v : \lambda_f$, kde v je rychlost neutronu a λ_f střední volná dráha neutronu před jeho štěpným polapením v jádře. Střední doba života neutronu je tudíž $\lambda_f : v$. Úbytek neutronů štěpením v čase dt je tedy

$$dF = nv\sigma_f N_f dt,$$

protože platí vztah (1). N_f značí počet štěpitelných jader v 1 cm^3, takže úbytek dF se vztahuje rovněž k 1 cm^3. Za každý neutron ztracený štěpením vznikne η neutronů, takže za čas dt je *zisk neutronů* $(\eta - 1)dF$.

Soubor neutronů v reaktoru prožívá ještě absorpci neštěpnou, která není zdrojem nových neutronů. Analogicky pro ztrátu neutronů absorpcí v 1 cm^3 odvodíme výraz $nv\sigma_a N_a\, dt$, kde index a se vztahuje k absorpci. Celková bilance neutronů v reaktoru je tudíž určena rovnicí:

$$V\frac{dn}{dt} = (\eta - 1)\, nv\sigma_f N_f V - nv\sigma_a N_a V, \qquad (5)$$

kde V je objem reaktoru. Uvážíme-li, že $k = \eta f$ a že využití f můžeme vyjádřit poměrem $\sigma_f N_f : (\sigma_f N_f + \sigma_a N_a)$, a že dále střední doba života neutronu vzhledem k polapením všech druhů je

$$\tau_0 = \frac{1}{v(\sigma_f N_f + \sigma_a N_a)}, \qquad (6)$$

můžeme řešení rovnice (5) napsat ve tvaru:

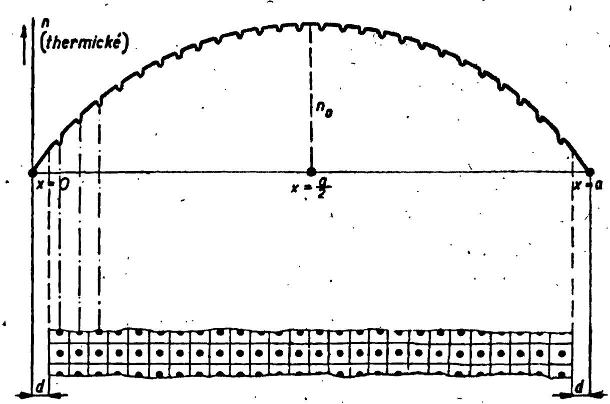
$$n = n_0 \exp\left[\frac{(k-1)t}{\tau_0}\right].$$

(Pro $t = 0$ je $n = n_0$).

Stoupání hustoty neutronů, nebo pro $(k - 1) < 1$ klesání, odehrává se tedy podle zákona exponenciálního.

Podobně stoupá nebo klesá výkon reaktoru. Výraz $\tau_0 : (k - 1)$ se nazývá *perioda reaktoru*. Poločas vzrůstu nebo klesání je

$$T \approx 0{,}7 \frac{\tau_0}{k-1}. \tag{7}$$



Průběh hustoty neutronů v krychlovém, heterogenním reaktoru. Dole je naznačena struktura reaktoru, složeného z tuhových bloků, v nichž jsou zasunuty tyče z kovového uranu. Tyče jsou naznačeny plnými kroužky. V okolí tyčí nastávají malé místní variace hustoty neutronů, které se jeví jako zoubky na jinak hladké sinusoidě. Hustota n ve skutečném reaktoru poklesne na nulovou hodnotu ve vzdálenosti od středu poněkud větší než polovina hrany krychle, takže v praxi se počítá s *extrapolovanými rozměry* reaktoru. Podle [1].

V praxi pro reaktor s thermickými neutrony je hodnota T_0 velmi nepatrná, takže *nadbytek reaktoru* $k - 1$ musel by být naregulován tak, aby k se jen velmi nepatrně lišilo od 1. To se prakticky nedá provést, neboť na příklad vliv teploty na multiplikační činitel k by značně převýšil požadovanou jemnost regulace [1]. Thermický reaktor nedal by se ovládat, protože jeho poločas T je velmi krátký. Regulační ústrojí by nemělo čas zasáhnout. V našich úvahách jsme však předpokládali *neutrony okamžité* a nevzali jsme v úvahu *neutrony zpožděné*. Z celkového množství neutronů je pouze asi 1% zpožděných, ale jejich význam je zásadního rázu.

3. Stejnorodý reaktor s neutrony monochromatickými, včetně neutronů zpožděných. Podmínka bezpečnosti reaktoru. Souhrn neutronů zpožděných (latentních) si budeme představovat jako jedinou skupinu; střední doba života latentního neutronu budiž τ_d; zpožděné neutrony jsou vlastně *neutronovou radioaktivitou* štěpných zplodin (jader vznikajících štěpením). Rovnici (5) s pomocí (6) je možno tudíž napsat ve tvaru, jenž zahrnuje také zpožděné neutrony hustoty c:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{n[\eta f(1 - z) - 1]}{\tau_0} + \frac{c}{\tau_d}; \tag{8}$$

v rovnici je z zlomek zpožděných neutronů z celkového množství neutronů; množství neutronů okamžitých je tudíž $1 - z$. Za jeden štěpně pohlcený neutron se získá $\eta f(1 - z)$ neutronů okamžitých a ηfz neutronů zpožděných.

Průběh hustoty neutronů zpožděných je dán rovnicí:

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = \frac{n\eta fz}{\tau_0} - \frac{c}{\tau_d}, \tag{9}$$

protože v jednotce časové se v 1 cm³ vytvoří $nv(\sigma_f N_f + \sigma_a N_a)\,\eta fz$ zpožděných neutronů, t. j. $n\eta fz : \tau_0$ neutronů. Neutrony, jimž přísluší hustota n, nazýváme také *volné neutrony*.

Děje, které popisují rovnice (8) a (9), se odehrávají simultánně. Obecné řešení má tvar:

$$n = n_{01} \exp\left[\frac{t}{\tau_1}\right] + n_{02} \exp\left[\frac{t}{\tau_2}\right],$$

$$c = c_{01} \exp\left[\frac{t}{\tau_1}\right] + c_{02} \exp\left[\frac{t}{\tau_2}\right].$$

Dosažením řešení do rovnic (8) a (9) a odstraněním hustot neutronů n_{01}, n_{02}, c_{01} a c_{02} vyplyne pro periody reaktoru τ_1, τ_2 kvadratická rovnice:

$$\tau^2(a + kz) + \tau(a\tau_d - \tau_0) - \tau_0\tau_d = 0,$$

kde $a = k(1 - z) - 1$. Jedna perioda (τ_2) je zásadně záporná, tedy klesající a bezpečná. Druhá perioda (τ_1) může být stoupající. Uvážíme-li, že střední doba života thermických neutronů τ_0 je velmi nepatrná (řádově tisíciny sec), a že střední doba života zpožděných neutronů τ_d je řádově 10 sec, je možno druhou periodu vyjádřit velmi jednoduše:

$$\tau_2 \approx -\frac{a\tau_d}{k - 1} \text{ neboli } \tau_2 \approx \tau_d \frac{1 - k(1 - z)}{k - 1}. \tag{10}$$

Výraz $k(1 - z)$ se nazývá multiplikační činitel pro okamžité (promptní) neutrony a bývá označován k_p. Pro poločas T reaktoru plyne tedy vzorec ANDERSONŮV:

$$T \approx 0{,}7 \frac{1 - k_p}{k - 1} \tau_d, \tag{11}$$

neboť $T = \tau \operatorname{lognat} 2 \approx 0{,}7\tau$. [2]

Ze vzorce (10) odvodíme podmínku bezpečnosti reaktoru. Reaktor bude zcela jistě bezpečný, jestliže hustota neutronů v něm poroste s periodou větší než τ_d, tedy větší než asi 10 sec. Mechanické kontrolní zařízení v tom případě bude mít čas zasáhnout a vzrůst hustoty neutronů zastavit.

Podle vzorce (10) bude τ_2 větší než τ_d, jestliže platí:

$$1 - k(1 - z) > k - 1.$$

Z toho plyne: Je-li nadbytek $(k - 1)$ neutronů v jedné generaci menší než asi polovina neutronů zpožděných tvořených v jedné generaci (kz), hustota neutronů vzrůstá dostatečně pomalu a nemůže se vyskytnout žádná nebezpečně krátká perioda reaktoru.

4. Kritická velikost reaktoru. Až dosud jsme sledovali časový průběh hustoty neutronů v reaktoru. Nyní přejdeme k odvození vzorce pro kritický rozměr reaktoru, kdy řetězová reakce právě začíná a kdy únik neutronů z generačního prostoru je vyrovnáván tvorbou nových neutronů, která nahrazuje rovněž ztráty neutronů neštěpným pohlcováním.

Hustota neutronů $n = f(x, y, z)$ v reaktoru tvoří skalární pole, kdežto tok neutronů (S) je vektorem. V obecné theorii difuse se odvozuje, že tok neutronů ve směru x plošnou jednotkou je dán vzorcem

$$S = -D \frac{dn}{dx}, \tag{12}$$

kde D je difusní konstanta ($\frac{1}{3}\lambda v$; v je rychlost neutronů, λ střední volná dráha neutronů mezi srážkami všech druhů; v čisté štěpitelné hmotě je řádově 10 cm). Vzorec (12) se odvodí za předpokladu, že hustota neutronů n závisí na souřadnici x lineárně v oboru, jehož velikost je řádově rovna střední volné dráze λ. Z této vzdálenosti středně přiletují neutrony k uvažovanému plošnému elementu a zhruba jedna třetina neutronů letí k němu kolmo. Za čas $\Delta t = \lambda : v$ projde elementem $\frac{1}{3}\lambda(n_2 - n_1)$ neutronů, jsou-li n_2 a n_1 sousední střední hustoty neutronů. Za 1 sec prochází tedy plošným elementem

$$\tfrac{1}{3}\lambda(n_2 - n_1)\frac{v}{\lambda} = \tfrac{1}{3}v(n_2 - n_1) = \tfrac{1}{3}\lambda v \frac{dn}{dx},$$

neboť $n_2 - n_1 = \dfrac{dn}{dt}\lambda$. To je podstata odvození vzorce (12). Zobecněním úvahy do libovolného směru vyplyne základní vzorec theorie difuse neutronů:

$$S = -\tfrac{1}{3}\lambda v \operatorname{grad} n = -D \operatorname{grad} n. \tag{13}$$

Vektorové pole tvořené tokem neutronů je zřídlové, protože štěpení atomových jader je zřídlem nových neutronů. Označme q počet neutronů tvořících se v 1 cm³ za 1 sec., a a počet pohlcených neutronů. Uvnitř reaktoru musí tedy platit rovnice kontinuity:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = q - a - \operatorname{div} S,$$

tedy vzhledem k rovnici (13)

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = q - a + D\nabla^2 n. \tag{14}$$

Jednotlivé členy rovnice vystihují děje, které se v reaktoru uplatňují. První člen na pravé straně (q) je *zdrojová hustota* vystihující tvorbu neutronů; druhý člen (a) vystihuje úbytek neutronů neštěpným pohlcováním a třetí výsledný odtok neutronů difusí.

Neutron před neštěpným pohlcením urazí dráhu λ_a v čase $\tau_0 = \lambda_a : v$. Za čas τ_0 se pohltí n neutronů, za 1 sec tudíž $\dfrac{n}{\tau_0} = \dfrac{nv}{\lambda_a}$ neutronů. Je tedy $a = \dfrac{nv}{\lambda_a}$. Podobně odvodíme, že zdrojová hustota $q = \dfrac{n}{\tau_0}\dfrac{\sigma_f}{\sigma_a}\eta$, kde $\sigma_f : \sigma_a$ je poměr účinných průřezů hmoty reaktoru pro štěpení a pro pohlcování všech druhů, a η množství neutronů vznikajících rozštěpením jádra. (Účinný průřez za stejných podmínek je úměrný počtu jaderných dějů.) Pro stacionární stav, kdy nastává *stav kritický*, je $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = 0$, takže rovnici (14) můžeme napsat ve tvaru:

$$\tfrac{1}{3}\lambda v \nabla^2 n + \eta \frac{n}{\tau_0}\frac{\sigma_f}{\sigma_a} - \frac{n}{\tau_0} = 0,$$

neboli

$$\nabla^2 n + \frac{3n}{\lambda v \tau_0}\left(\frac{\sigma_f \eta}{\sigma_a} - 1\right) = 0. \tag{15}$$

Rovnice se obyčejně píše ve tvaru

$$\nabla^2 n + H^2 n = 0 \tag{15a}$$

a její řešení pro různá tělesa jsou známá. Konstanta H je charakteristická pro dané generační prostředí. Můžeme se domnívat*), že v čisté štěpitelné hmotě převládá štěpné pohlcování neutronů nad neštěpným, takže poměr

$$\frac{\text{množství neutronů pohlcených štěpně}}{\text{celkové množství pohlcených neutronů}} = \frac{\sigma_f}{\sigma_a} \approx 1.$$

*) Přesné údaje nebyly dosud uveřejněny.

Protože $\tau_0 = \lambda : v$, (počet neutronů z jednoho rozštěpení) $\eta \approx 2$, je

$$H \approx \frac{\sqrt{3}}{\lambda}.$$

5. Reaktor kulový z čisté štěpitelné hmoty bez reflektoru a s reflektorem neutronů. Pro kulový reaktor při patřičných okrajových podmínkách ($n = 0$ pro $r = R$, t. j. na povrchu koule; $n = n_0$, t. j. n maximální ve středu koule) upravená rovnice (15) má řešení:

$$n = n_0 \frac{\sin Hr}{Hr} = n_0 \frac{\sin \frac{\pi r}{R}}{\frac{\pi r}{R}}.$$

Kritický poloměr R koule z čisté štěpitelné hmoty je tedy

$$R = \frac{\pi}{H} \approx \lambda \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1{,}8\ \lambda. \tag{16}$$

Poloměr koule při kritickém stavu je tedy řádově stejné velikosti jako střední volná dráha neutronů mezi srážkami s atomy štěpitelné hmoty. Je-li $\lambda = 10$ cm, je poloměr kritické koule 18 cm. Přesná hodnota λ nebyla však uveřejněna. Náš výsledek je vlastně v neshodě s původně vytčeným předpokladem, že rozměry generačního prostoru reaktoru jsou veliké proti střední volné dráze neutronů, neboť to jsme předpokládali při odvození základní rovnice difusní (13). Přesnější theorie však dokazuje, že odvozený výsledek není příliš chybný [1].

Je-li reaktor obklopen hmotou, která jen velmi nepatrně pohlcuje neutrony, nastává v ní *odraz neutronů*. Je zřejmé, že reaktor s reflektorem neutronů má menší kritickou hmotu; koule ze štěpitelné hmoty musí míti takový poloměr, aby na povrchu byla hustota neutronů prakticky nulová, aby únik neutronů byl zanedbatelný. Pro kouli s reflektorem může být nulová hustota až v reflektoru. Pro reflektor se hodí na příklad tuha, jejíž σ_a je nepatrný ($0{,}005 \cdot 10^{-24}$ cm^2).

I v reflektoru nastávají menší ztráty neutronů, neboť některé neutrony se v něm rozptylují, takže jejich klikatá dráha se reaktoru vyhne a probíhá pouze v reflektoru. Uvažujme pouze ideální případ, kdy $\sigma_a = 0$. V reflektoru je nezřídlové vektorové pole, divergence toku neutronů je nulová. V rovnici (14) jsou členy a i q nulové, takže $\nabla^2 n = 0$. Jak známo, této rovnici vyhovuje vztah $n = \frac{b}{r}$, kde b je konstanta. Řešení splňuje také podmínku, že pro lim $r = \infty$ je hustota nulová. Dále je samozřejmou podmínkou, aby na rozhraní reaktoru a reflektoru nenastávalo hromadění neutronů, aby se hustota i tok neutronů měnily spojitě. Pro poloměr R reaktoru platí

$$n = n_0 \frac{\sin HR}{HR}, \text{ a tudíž musí platit } n = \frac{b}{R}; \tag{17}$$

tím je zaručena stejná hustota neutronů na rozhraní. Toky neutronů jsou stejné, jestliže platí

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{r}\right) \text{ atd., neboli } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin Hr}{Hr}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{r}\right) \text{ atd.,}$$

protože podle (13) tok neutronů je — D grad n. S použitím (17) vznikne podmínka:

$$\cos HR = 0, \text{ a tudíž } R = \frac{\pi}{2H}.$$

Tedy vzhledem k rovnici (16): Kritický poloměr koule z čisté štěpitelné hmoty v případě reflektoru je poloviční.

6. Reaktor krychlový. Rovnice (15a) v případě krychlového reaktoru má řešení

$$n = n_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} \sin\frac{\pi z}{a}, \tag{18}$$

jestliže počátek byl zvolen v jednom rohu krychle. Z rovnic (18) a (15a) plyne pro hranu kritické krychle vzorec:

$$a = \frac{\pi\sqrt{3}}{H}. \tag{19}$$

Objem kritické koule je ze všech kritických těles nejmenší. Poměr objemů kritické krychle a koule je asi 1,24. V praxi se většinou staví reaktory krychlové nebo hranolové, protože stavba reaktoru kulového je technicky obtížnější.

V reaktoru tvaru pravoúhlého hranolu je hustota neutronů v závislosti na souřadnicích uvažovaného místa dána vzorcem:

$$n = n \cdot \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \sin\frac{\pi z}{c},$$

je-li počátek v jednom rohu. Pro $a = b = c$ z něho plyne vzorec (18). Také výpočet hustoty neutronů v reaktoru válcovém nečiní zvláštních obtíží.

7. Hustota neutronů v reaktoru heterogenním. Úvahy z předchozích odstavců platí pro reaktory homogenní, stejnorodé, buď z čisté štěpitelné hmoty nebo alespoň reaktory t. zv. obohacené, kdy v přírodním uranu je uměle zvětšeno množství atomového „paliva" uranu 235. Dá se však dokázat, že odvozené vzorce platí i pro reaktory heterogenní, v nichž štíhlé tyče nebo malé koule z přírodního uranu nebo kysličníku uranu jsou rozmístěny do moderátoru, takže vznikne mřížoví. Místní variace hustoty neutronů, které vznikají vlivem periodické struktury mřížoví, dají se zanedbat, a heterogenní soustava pro výpočet se nahradí soustavu homogenní s ní rovnocennou.

*

Elementary pile theory. Basic formulae of the elementary pile theory have been derived. Critical radius of the sphere without and with the reflector, and the side of the cubic lattice cell have been computed.

LITERATURA.

[1] V. F. WEISSKOPF, F. L. FRIEDMAN, C GOODMAN, Science and Engineering of Nuclear Power, 1947.

[2] V. SANTHOLZER: Fysika v technice, **2**, 278 (1947).