Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Poznámky arithmetické. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 1, 25–34

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123870

Konečně lze uvažovati invariantivné funkce, do nichž vcházejí oboje proměnné x i ξ; takové slují dle *Sylvestera smíšenými konkomitanty*; nejjednoduší takový útvar jest $x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$, jenž linearnou transformací se vůbec nemění.

Jest patrno, že každá mocnost diskriminantu jest též invariantem, a lze snadno nahlédnouti, že forma f jiných invariantův nemá. Neboť je-li I invariantem a platí-li

$$I'^1 = T^\alpha I,$$

tu

$$\frac{I'}{\Delta\alpha} = \frac{(T^\alpha I)^2}{(T^2\Delta)^\alpha} = \frac{I^2}{\Delta^\alpha};$$

zůstává tedy podíl $I^2 : \Delta^\alpha$ při linearné transformaci úplně nepromĕnným, jinak řečeno on jest *absolutním invariantem.* Takový však u kvadratické ternarné formy může býti jen absolutní stálou; neboť příhodnou linearnou transformací lze toho dosíci, aby nové koefficienty a'_{hk} nabyly hodnot libovolně daných — ovšem neannullujících Δ' — a zůstává tedy podíl $I^2 : \Delta^\alpha$ týž, nechť jsou koefficienty a_{hk} jakékoli, t. j. on jest stálým. Z toho ale

$$I = c\Delta^{\frac{\alpha}{2}},$$

jakož jsme tvrdili; α ovšem jest sudé.

(Dokončení.)

Poznámky arithmetické.

Sdílí

M. Lerch,
docent vysoké školy technické v Praze.

Buď $f(x, y)$ kladná a spojitá funkce *souměrná* dvou kladných proměnných x, y, která roste, když jedna proměnná roste a druhá se nemění; je-li z kladné, znamenejme řešení rovnice

$$f(x, y) = z$$

takto:

$$x = F(y; z) \quad \text{aneb} \quad y = F(x; z).$$

Symbolem $E(z)$ neb $[z]$ znamenejme největší kladné celistvé číslo, které nepřevyšuje hodnotu z, takže

$$E(z) \leqq z < E(z) + 1;$$

je-li $z \leqq 1$ aneb záporné, pak značí $E(z)$ nullu. Toto předeslavše, veďme v rovině křivku K, jejíž rovnice v pravoúhlé soustavě souřadnic x, y zní

$$f(x, y) = m,$$

kde m je určitá kladná konstanta, a uvažujme součet

$$S = \sum_{\alpha=1}^{a} E(F(\alpha; m)).$$

Tu patrně $E(F(\alpha; m))$ znamená počet bodů o společné úsečce $x = \alpha$, které mají pořadnice $y = 1, 2, \ldots$ a při tom hovící podmínce $y \leqq F(\alpha; m)$, tedy počet bodů s celistvými kladnými souřadnicemi ležících na přímce $x = \alpha$ mezi osou úseček a křivkou $y = F(x; m)$, t. j. křivkou K; i plyne odtud, že součet S rovná se počtu bodů s celistvými kladnými souřadnicemi položených v oboru omezeném osou x, pořadnicemi $x = 1$ a $x = a$ a konečně křivkou K.

Tato křivka K klesá k ose x s rostoucími úsečkami a tedy jest hodnota $F(a; m)$, příslušná poslední hodnotě $\alpha = a$, nejmenší ze všech hodnot y. Vedeme-li přímku $y = [F(a; m)]$, rozdělí se tím náš obor ve dvě části, z nichž spodní jest obdélník a svrchní je omezena osou y, čarou K a vedenou přímkou.

Ve svrchní části veďme rovnoběžku s osou úseček

$$y = \beta, \quad \beta \geqq [F(a; m)] + 1, \quad (\beta = \text{celistvé číslo})$$

a určeme počet bodů s celistvými kladnými úsečkami, ležícími na této přímce mezi osou pořadnic a křivkou K; úsečky bodů těch budou

$$x = 1, 2, \ldots [F(\beta; m)],$$

ježto rovnici čáry K lze psáti $x = F(y; m)$.

Počet všech bodů naší soustavy položených ve svrchní části oboru bude tedy dán výrazem

$$S_1 = \sum_{\beta=[F(a; m)]+1}^{[F(1; m)]} E(F(\beta; m)).$$

Poněvadž body ve spodní části oboru položené jsou v počtu

$$S_2 = a \, . \, E(F(a\,; m)),$$

máme z rovnice $S = S_1 + S_2$ vztah

$$\sum_{\alpha=1}^{a} E(F(\alpha\,; m)) = a \, . \, E(F(a\,; m)) + \sum_{\beta=[F(a;\,m)]+1}^{[F(1;\,m)]} E(F(\beta\,; m))$$

aneb přičteme-li na obou stranách členy $\beta = 1, 2, \ldots [F(a\,; m)]$ a nahradíme E závorkou,

$$(1) \quad \sum_{\alpha=1}^{a} [F(\alpha\,; m)] + \sum_{\alpha=1}^{[F(a;\,m)]} [F(\alpha\,; m)] = a\,[F(a\,; m)] + \sum_{\alpha=1}^{[F(1;\,m)]} [F(\alpha\,; m)] \, .$$

Vzorec ten platí tedy pro každou kladnou a spojitou funkci $F(x\,; m)$, klesající s rostoucím x, která znázorňuje čáru $y = F(x\,; m)$ souměrnou ke přímce $x = y$, takže též $x = F(y\,; m)$.

Volme na př. $f(x, y) = xy$, pak máme křivku K o rovnici $xy = m$, takže $y = F(x\,; m) = \dfrac{m}{x}$, a rovnice (1) nám poskytne vztah

$$(2) \quad \sum_{\alpha=1}^{a} E\left(\frac{m}{\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{a}\right]} E\left(\frac{m}{\alpha}\right) = aE\left(\frac{m}{a}\right) + \sum_{\alpha=1}^{m} E\left(\frac{m}{\alpha}\right),$$

kde jsme volili za m kladné celistvé číslo. Je-li a dělitelem čísla m, takže $m = ab$, obdržíme odtud vzorec známý *)

$$\sum_{\alpha=1}^{a} E\left(\frac{ab}{\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{b} E\left(\frac{ab}{\alpha}\right) = ab + \sum_{\alpha=1}^{ab} E\left(\frac{ab}{\alpha}\right).$$

Volíme-li dále

$$f(x, y) = (u + x)(u + y),$$

kde u je kladné číslo celistvé, bude

$$F(x\,; m) = \frac{m}{u + x} - u,$$

a tedy zní vzorec (1) v tomto případě

*) Viz E. Cesàro (Comptes Rendus sv. 96., p. 1029.).

$$(3)\qquad \sum_{\alpha=1}^{a} E\left(\frac{m}{u+\alpha}-u\right)+\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{u+a}-u\right]} E\left(\frac{m}{u+\alpha}-u\right)$$

$$=aE\left(\frac{m}{u+a}-u\right)+\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{u+1}-u\right]} E\left(\frac{m}{u+\alpha}-u\right).$$

Je-li splněna podmínka $\frac{m}{u+a}\geqq u$, budou veškery ve vzorci se vyskytující argumenty funkce E kladny (aneb rovny nulle), takže bude veskrze

$$E\left(\frac{m}{u+x}-u\right)=E\left(\frac{m}{u+x}\right)-u,$$

a tedy levá strana bude

$$\sum_{\alpha=1}^{a} E\left(\frac{m}{u+\alpha}\right)+\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{u+a}\right]-u} E\left(\frac{m}{u+\alpha}\right)-\left\{a+E\left(\frac{m}{u+a}\right)-u\right\}u,$$

kdežto pravá obdrží tvar

$$aE\left(\frac{m}{u+a}\right)+\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{u+1}\right]-u} E\left(\frac{m}{u+\alpha}\right)-\left\{a+E\left(\frac{m}{u+1}\right)-u\right\}u,$$

takže máme po náležité redukci

$$\sum_{\alpha=1}^{a} E\left(\frac{m}{u+\alpha}\right)+\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{u+a}\right]-u} E\left(\frac{m}{u+\alpha}\right)-\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{u+1}\right]-u} E\left(\frac{m}{u+\alpha}\right)$$

$$=aE\left(\frac{m}{u+a}\right)-u\left\{E\left(\frac{m}{u+1}\right)-E\left(\frac{m}{u+a}\right)\right\};$$

ve druhém a třetím součtu levé strany pišme nyní α místo $u+\alpha$, i obdržíme, připojíme-li u obou navzájem se rušící členy

$$\alpha = 1, 2, \ldots u$$

$$(3^a)\quad \sum_{\alpha=1}^{\alpha} E\left(\frac{m}{u+\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{u+\alpha}\right]} E\left(\frac{m}{\alpha}\right)$$

$$= \alpha E\left(\frac{m}{u+\alpha}\right) - u\left\{E\left(\frac{m}{u+1}\right) - E\left(\frac{m}{u+\alpha}\right)\right\} + \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{u+1}\right]} E\left(\frac{m}{\alpha}\right)$$

Této zajímavé relaci lze uděliti nový tvar, zavedeme-li arithmetické funkce $\psi(p, q)$, $\chi(p, q)$, z nichž prvá $\psi(p, q)$ značí počet dělitelů čísla p převyšujících číslo q, a druhá počet dělitelů čísla p nepřevyšujících q.

Těmito funkcemi zabývali jsme se na různých místech. Ve Věstníku Královské České Společnosti Nauk z r. 1887 dokázali jsme vzorce

$$(4)\quad \sum_{\alpha=0}^{m-1} \psi(m-\alpha, \alpha) = m\,, \quad \sum_{\alpha=0}^{m} \psi(m+\alpha, \alpha) = 2m\,,$$

které jsme pak zobecněli ve sdělení podaném Pařížské Akademii (Comptes Rendus ze 16. ledna 1888) a propracovaném v p. Darbouxově Bulletinu (duben a květen 1888); po té podal p. *Strnad* ryze arithmetické důkazy vzorců (4) a prohloubil jich obsah.*) Když byl konečně p. *John Schröder* v Hamburku podal značné zobecnění**) prvého ze vzorců (4) a nás o svých výsledcích písemně zpravil, odhodlali jsme se Král. České Spol. Nauk v sezení dne 23. března 1894 předložiti starší svoji práci, ve které podány ryze arithmetické důkazy všech dosavadních našich výsledků. Konečně jsme téže společnosti ve schůzi dne 22. června téhož roku předložili řadu dalších analytických úvah, zabývajících se hlavně vlastnostmi těchto funkcí.

Ze vzorce (3^a) dospějeme k vlastnostem funkcí $\psi(p, q)$ a $\chi(p, q)$ následujícím spůsobem.

Značí-li $g(\alpha)$ funkci mající pro celistvé α hodnoty kladné, celistvé a různé, pak lze součet

---

*) Časopis z r. 1888.

**) J. Schröder, Einige Sätze über Theileranzahlen sowie einige Anwendungen der Geometrie auf Zahlentheorie (Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, III. Bd., 1894).

$$\sum_{\alpha=1,2,3,\dots} \mathrm{E}\left(\frac{m}{g(\alpha)}\right)$$

charakterisovati pomocí dělitelů čísel $\leqq m$ tvaru $g(\alpha)$. Rozdíl

$$\mathrm{E}\left(\frac{m}{g(\alpha)}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{g(\alpha)}\right)$$

je totiž jen tehdy od nully různý, je-li $g(\alpha)$ dělitelem čísla m, a v tomto případě rovná se 1; součet

$$\sum_{\alpha=1,2,3,\dots} \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{m}{g(\alpha)}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{g(\alpha)}\right) \right\} = \Theta(m; g)$$

rovná se tedy počtu dělitelů čísla m, které jsou tvaru $g(\alpha)$; a odtud nacházíme

$$\sum_{k=1}^{m} \Theta(k; g) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha} \left[\mathrm{E}\left(\frac{k}{g(\alpha)}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{k-1}{g(\alpha)}\right) \right];$$

provedeme-li v pravo sčítání vůči k, zruší se členové $k = m - 1$, $m - 2$, $m - 3, \dots$ a zbude

$$\sum_{k=1}^{m} \Theta(k; g) = \sum_{\alpha=1,2,3,\dots} \mathrm{E}\left(\frac{m}{g(\alpha)}\right). \tag{5}$$

Volíme-li $g(\alpha) = u + \alpha$, bude $\Theta(k, g)$ znamenati počet dělitelů čísla k, které jsou větší než u, tedy počet naznačený symbolem $\psi(k, u)$, takže máme dle (5)

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{m}{u+\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{m} \psi(k, u),$$

a podobně

$$\sum_{\alpha=a+1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{m}{u+\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{m}{u+a+\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{m} \psi(k, u+a);$$

odečtením plyne odtud

$$\sum_{\alpha=1}^{a} \mathrm{E}\left(\frac{m}{u+\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{m} [\psi(k, u) - \psi(k, u+a)].$$

Podobně obdržíme

$$\sum_{a=1}^{\left[\frac{m}{u+a}\right]} \mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) = \sum_{k=1}^{m} \chi\left(k, \frac{m}{u+a}\right),$$

$$\sum_{a=1}^{\left[\frac{m}{u+1}\right]} \mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) = \sum_{k=1}^{m} \chi\left(k, \frac{m}{u+1}\right),$$

a tak vzorec (3^a) obdrží tvar

$$(3^*)\quad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m}\left\{\psi(k,u) - \psi(k,u+a) - \chi\left(k,\frac{m}{u+1}\right) + \chi\left(k,\frac{m}{u+a}\right)\right\} \\ &= a\mathrm{E}\left(\frac{m}{u+a}\right) - u\left\{\mathrm{E}\left(\frac{m}{u+1}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m}{u+a}\right)\right\}, \end{aligned}$$

při čemž má býti jako ve (3^a) splněna podmínka $\frac{m}{u+a} \geqq u$, čili jinak vyjádřeno

$$m \geqq u(u+a).$$

Pro $u = 0$ přejde rovnice (3^a) v rovnici (2) a její přetvoření bude dle (3^*) zníti, ježto

$$\psi(k, 0) = \chi(k, m) \quad \text{pro} \quad m \geqq k,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left\{\chi\left(k, \frac{m}{a}\right) - \psi(k, a)\right\} = a\mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right)$$

aneb užijeme-li vztahu $\psi(k,\mu) + \chi(k,\mu) = \Theta(k)$, kde $\Theta(k)$ značí počet všech dělitelů čísla k,

$$(2^*)\qquad \sum_{k=1}^{m} \chi(k, a) = a\mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) + \sum_{k=1}^{m} \psi\left(k, \frac{m}{a}\right).$$

Rovnici té lze uděliti další tvar, užije-li se rovnice

$$\chi(k, a) = \psi\left(k, \frac{k}{a}\right) + \begin{cases} 1, & \text{jeli } \frac{k}{a} \text{ celistvé} \\ 0, & \text{není-li } \text{,, \quad ,,} \end{cases},$$

která je samozřejma. Neb není-li k dělitelno na a, odpovídá každému děliteli $\delta < a$ čísla k dělitel $\delta' = \frac{k}{\delta} > \frac{k}{a}$, a dělitel $\delta = a$ neexistuje; tu bude tedy

$$\chi(k, a) = \psi\left(k, \frac{k}{a}\right).$$

Je-li však k dělitelno na a, dlužno ještě do χ přibrati dělitele $\delta = a$, jemuž přísluší $\delta' = \frac{k}{a}$, a tento není zahrnut ve $\psi\left(k, \frac{k}{a}\right)$, takže dlužno ψ zvětšiti o jednotku, aby nastala rovnost.

Klademe-li v rovnici takto dokázané $k = 1, 2, \ldots m$, a sečteme, obdržíme vzorec

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{m} \chi(k, a) = \sum_{k=1}^{m} \psi\left(k, \frac{k}{a}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right),$$

poněvadž se v pravo přidala tolikráte jednotka, kolik čísel z řady $1, 2, \ldots m$ je dělitelno číslem a, t. j. $\mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right)$. Porovnáním vzorců (2*) a (6) plyne pak výsledek

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{m} \left[\psi\left(k, \frac{k}{a}\right) - \psi\left(k, \frac{m}{a}\right)\right] = (a-1)\,\mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right).$$

Pišme nyní ve vzorci (2*) α místo a

$$\sum_{k=1}^{m} \chi(k, \alpha) = \alpha \mathrm{E}\left(\frac{m}{\alpha}\right) + \sum_{k=1}^{m} \psi\left(k, \frac{m}{\alpha}\right),$$

a sečteme pro $\alpha = 1, 2, 3, \ldots a$. Tu bude třeba především určiti součet

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{a} \chi(k, \alpha);$$

v součtu

$$\sum_{\alpha=1}^{a} \chi(k, \alpha)$$

je určitý dělitel δ čísla k čítán tolikráte, kolik čísel obsahuje řada $\alpha = \delta, \delta + 1, \delta + 2, \ldots a$, tedy $(a + 1 - \delta)$kráte. Bude tedy

$$\sum_{\alpha=1}^{a} \chi(k, \alpha) = \sum_{\delta} (a + 1 - \delta) = (a + 1)\chi(k, a) - \sum_{\delta \leqq a} \delta;$$

zde jsme psali $(a + 1)\chi(k, a)$, poněvadž konstanta $a + 1$ se vyskytne tolikráte, kolik existuje čísel δ, to jest $\chi(k, a)$kráte, ježto δ jsou dělitelé čísla k a nejsou větší než a. Součet

$$\sum_{\delta \leqq a} \delta = \chi(k, a)$$

patrně je součtem všech dělitelů čísla k nepřevyšujících a máme tedy

$$\sum_{\alpha=1}^{a} \chi(k, \alpha) = (a + 1)\chi(k, a) - \chi(k, a),$$

a následkem toho

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{a} \chi(k, \alpha) = (a + 1)\sum_{k=1}^{m} \chi(k, a) - \sum_{k=1}^{m} \chi(k, a).$$

Dále zbývá vyšetřiti součet

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{a} \psi\left(k, \frac{m}{\alpha}\right).$$

V součtu

$$\sum_{\alpha=1}^{a} \psi\left(k, \frac{m}{\alpha}\right)$$

libovolný dělitel δ čísla k, který jest větší než $\frac{m}{\alpha}$, je čítán tolikráte, kolik α hoví podmínkám

$$a \geqq \alpha, \quad \delta > \frac{m}{\alpha},$$

čili

$$a \gtreqless \alpha > \frac{m}{\delta};$$

budou tedy dělitelé naši δ vesměs $> \frac{m}{a}$, a vyskytnou se při počítání $a - \left[\frac{m}{\delta}\right]$kráte; takže

$$\sum_{\alpha=1}^{a} \psi\left(k, \frac{m}{\alpha}\right) = \sum_{\delta}\left(a - \left[\frac{m}{\delta}\right]\right),$$

kde δ probíhá dělitele čísla k hovící podmínce

$$\delta > \frac{m}{a}.$$

(Dokončení.)

O hyperboloidické čtveřině přímek.

Napsal

Alois Strnad.

professor v Praze.

V krátké této poznámce chceme ukázati, kterak konstruktivně, methodou deskriptivní geometrie, lze *vyšetřiti, zda-li čtyry mimoběžky dané tvoří čtveřinu hyperboloidickou.* Potřebné konstrukce vykonáme užívajíce obrazů průmětů centrálných; shledáme pak, že jich lze užiti též při obrazech průmětů orthogonálných neb klinogonálných.

Hyperboloidickou čtveřinu tvoří každé čtyry přímky téže soustavy v ploše jednodílného hyperboloidu. Pojmu tomu jmeno dal *Hermes* (Crelle, Journal LXVII. p. 171); při vyšetřování útvarů prostorových mívá taková čtveřina obdobný význam jako při útvarech rovinných trojina paprsků jdoucích týmž bodem. Tak ku př.: Výšky trojúhelníka protínají se v jediném bodě; výšky čtyrstěnu tvoří obecně čtveřinu hyperboloidickou (*Steiner,* Crelle's Journal II. p. 97). Dány-li mimoběžky A, B, C, D, lze sestrojiti vždy dvě příčky M, N, které danou čtveřinu protínají. Kdyby takových příček bylo možných více než dvě, bylo by jich pak nekonečně mnoho, a vyplňovaly by plochu jednodílného hyperboloidu, jemuž by též přímky A, B, C, D, náležely.