Václav Jeřábek

Sestrojení os ellipsy, jsou-li dány její průměry sdružené

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 1, 64--68

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123865`

Ježto body A a B libovolnou vzájemnou polohu míti mohou, a předce vždy obě odpovídající přímky $\overline{A'B'}$ a $\overline{A''B''}$ stejnou délku míti budou, tu možno pro soustavu bodu v rovině základní ležící A, B, C atd. a pro soustavu v rovině sečné ležících odpovídajících bodů A', B', C' atd. a konečně pro soustavu po otáčení bodu P do roviny základní v rovině základní ležících bodů A'', B'', C'' atd. vysloviti větu:

Je-li dána v rovině základní soustava bodu A, B, C atd., a dáme-li rovině směrné i se středem P se otáčeti okolo přímky směrné, a současně se stejnou úhlovou rychlostí rovině sečné okolo trati: tu jsou pro každou polohu bodu P a přiměřenou polohu roviny sečné bodům A, B, C atd. odpovídající soustavy bodů A', B', C' atd., A'', B'', C'' atd. všecky mezi sebou shodny.

Zvláštní případ jest, kdy bod P padne do roviny základní, což nám podává možnost zobraziti přímo v rovině základní (nákresně) soustavu prostorovou dle skutečné velikosti (kongruentně).

(Pokračování.)

Sestrojení os ellipsy, jsou-li dány její průměry sdružené.

Pro žáky středních škol napsal

V. Jeřábek,
professor při c. k. vyšší škole realné v Brně.

Šinou-li se koncové body a, b úsečky ab stálé délky c po kolmých osách X, Y v počátku o se protínajících, jest známo, že kterýkoliv bod b_1 úsečky ab vytvoří ellipsu středu o, jejíž poloosy jsou

$$\text{na X, } oa' = oa'' = a = bb_1;\ \text{ na Y, } ob' = ob'' = b = ab_1.$$

Tvoří-li a_1 s b_1 dvojinu bodů isotomických*) v přeponě ab

---

*) Dva body téže strany trojúhelníka, které jsou souměrně sdruženy dle středu této strany, slují body *isotomické*.

pravoúhlého trojúhelníka aob, a znamenáme-li $oa_1 = a_1$, $ob_1 = b_1$, jest dle vzorců (3) a (4) úlohy 30. v Časopisu roč. 23., v nichž při a' a b' jest nyní ukazatele vynechati,

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2 \tag{1}$$
$$a_1 b_1 \cos \gamma_1 = ab, \tag{2}$$

kdež $\sphericalangle b_1 o a_1 = \gamma_1$.

Sestrojme v ellipse poloměr $ob_2 = b_2$, jenž jest sdružen s poloměrem $ob_1 = b_1$, a budiž $\sphericalangle b_1 o b_2 = \omega$. Jest známo, že o poloměrech těchto platí vzorce:

$$b_1^2 + b_2^2 = a^2 + b^2 \text{ *)} \tag{3}$$
$$b_1 b_2 \sin \omega = ab. \tag{4}$$

Ze vzorců (1) a (3) vyplývá

$$a_1 = b_2,$$

tedy:

*a) Příčka $\overline{oa_1}$, která v trojúhelníku aob jest isotomicky**) sdružena s přímkou $\overline{ob_1}$, rovná se poloměru ob_2, jenž jest v ellipse sdružen s poloměrem ob_1.*

Vložíme-li do rovnice (4) za b_2 hodnotu a_1, bude

$$a_1 b_1 \sin \omega = ab. \tag{5}$$

Srovnáním vzorců (2) a (5) obdržíme

$$\sin \omega = \cos \gamma_1,$$

odkudž

$$\omega = R \pm \gamma_1,$$

pročež:

b) Příčka $\overline{oa_1}$ stojí kolmo na poloměru ob_2.

Ježto trojúhelníky $a_1 o b_1$ a aob mají společnou těžnici oo', jest

$$ao' = bo' = oo',$$

tedy:

---

*) Viz *Jandečka*: „Analytická geometrie v rovině" str. 73. a 74.

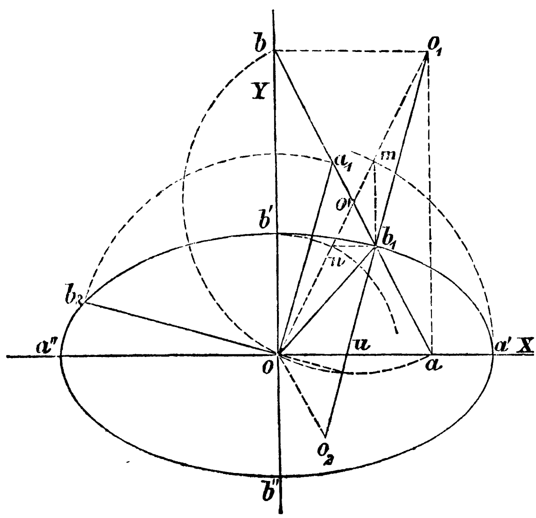
**) Příčky jdoucí vrcholem trojúhelníka slují isotomicky sdružené, procházejí-li body isotomickými strany protilehlé.

c) Kružnice ze středu o' *poloměrem* $\overline{oo'}$ *sestrojená protíná* $\overline{a_1b_1}$ *v bodech* a, b *ležících na osách* X a Y.

d) Dle vytvoření ellipsy jsou délky poloos:

$$\text{na X, } \overline{oa'} = \overline{oa''} = a = \overline{bb_1}; \quad \text{na Y, } \overline{ob'} = \overline{ob''} = b = \overline{ab_1}.$$

Z *a), b), c), d)* plyne známá *konstrukce os ellipsy, jsou-li dány její poloměry sdružené* $\overline{ob_1} = b_1$, $\overline{ob_2} = b_2$.



Sestrojme $\overline{oa_1} \perp \overline{ob_2}$, $\overline{oa_1} = \overline{ob_2}$ tak, aby úhel $(b_1oa_1) = \gamma_1$ byl ostrý. Ze středu o' úsečky $\overline{a_1b_1}$ poloměrem $\overline{oo'}$ narýsujme kruh, jenž přímku $\overline{a_1b_1}$ protíná v bodech a, b. Spojnice $oa \equiv$ X, $ob \equiv$ Y určují polohu os ellipsy. Učiníme-li dle *d)*

$$\overline{oa'} = \overline{oa''} = a = \overline{bb_1}, \qquad \overline{ob'} = \overline{ob''} = b = \overline{ab_1},$$

obdržíme osy ellipsy $\overline{a'a''}$, $\overline{b'b''}$.

Jiné sestrojení os ellipsy. Sestrojme obdélník $aobo_1$, veďme úsečku o_1b_1 a prodlužme ji ve směru o_1b_1 o svou vlastní délku až k bodu o_2. Potom jest

$$\overline{b_1o_1} \parallel \overline{oa_1} \perp \overline{ob_2}, \qquad \overline{b_1o_1} = \overline{o_2b_1} = \overline{oa_1} = b_2,$$

$$\overline{oo_1} = \overline{ab} = a + b,$$
$$\overline{oo_2} = \overline{a_1 b_1} = a - b.$$

Přímka $o_1 o_2$ nechť protne osu X v bodu u. Ježto $oa_1 \parallel ub_1$, jest

$$\overline{ub_1} : \overline{oa_1} = \overline{ab_1} : \overline{aa_1}$$

čili

$$\overline{ub_1} : b_2 = b : a,$$

tedy

$$\overline{ub_1} = \frac{b}{a} b_3.$$

Dále jest

$$\overline{uo_1} = \overline{ub_1} + \overline{b_1 o_1} = \frac{b}{a} . b_2 + b_2,$$

$$\overline{uo_1} = \frac{b_2}{a} (a + b), \tag{1}$$

$$\overline{o_2 u} = \overline{o_2 b_1} - \overline{ub_1} = b_2 - \frac{b}{a} b_2,$$

$$\overline{o_2 u} = \frac{b_2}{a} (a - b). \tag{2}$$

Z (1) a (2) obdržíme

$$\frac{o_2 u}{uo_1} = \frac{a - b}{a + b} \text{ čili } \frac{o_2 u}{uo_1} = \frac{oo_2}{oo_1},$$

pročež:

a) Osa X ellipsy jest osou souměrnosti úhlu $o_1 o o_2$.

Rovnoběžky vedené bodem b_1 s osami Y a X nechť protnou $\overline{oo_1}$ v bodech m, n.

Jest patrno, že

$$\overline{om} = \overline{oo_1} - \overline{mo_1} = \overline{oo_1} - \overline{ab_1} = (a + b) - b,$$

$$\overline{om} = a,$$

$$\overline{on} = \overline{oo_1} - \overline{no_1} = \overline{oo_1} - \overline{aa_1} = (a + b) - a,$$

Tedy:
$$\overline{on} = b.$$

b) Geometrické délky poloos ellipsy jsou $\overline{om}$ a $\overline{on}$.

Z výsledků *a*), *b*) plyne známé sestrojení os ellipsy z daných průměrů sdružených.

Sestrojme bodem b_1 kolmici na ob_2, učiňme $b_1o_1 = b_1o_2 = ob_2$, rozpůlme úhel o_1oo_2 osou X a jeho úhel vedlejší osou Y. Omezíme-li přímkami $\overline{oo_1}$, $\overline{b_1m} \perp$ X a $\overline{bn} \perp$ Y trojúhelník b_1mn, a sestrojíme-li ze středu o kružnice o poloměrech $\overline{om} = a$, $\overline{on} = b$, budou průsečíky jejich s osami X a Y vrcholy ellipsy.

O některých úlohách z arithmografie.

Pojednává

Vavř. Jelínek,

prof. v Novém Městě u Vídně.

I. Majíce danou úsečku násobiti zlomkem, rozdělujeme ji obyčejně na tolik stejných částí, kolik jednotek obsahuje jmenovatel, a sečteme jich tolik, kolik jednotek vykazuje čítatel daného zlomku. Je-li však jmenovatelem číslo poněkud větší, neb je-li znázorniti několik zlomkův o různých jmenovatelích, jest tato práce zdlouhavou, někdy i obtížnou, a jelikož transversální měřítko zařízeno jest pouze pro desetinné zlomky, upozorňuji na následující methody:

A. Dané zlomky mají společného jmenovatele, kterýž lze vyjádřiti součinem dvou čísel m a n.

V tomto případě rozdělíme danou úsečku AB $=$ 1 (obr. 1.) na *m* rovných dílcův a naneseme na přímku AC, vycházející libovolným směrem z počátku A úsečky AB, *n* stejně dlouhých úseček. Konec C spojíme s každým dělícím bodem úsečky AB přímkami a vedeme dělícími body na přímky AC rovnoběžky s AB.

Dělící body na AB číslujeme směrem od počátku, dělící body na přímce AC směrem od konce rozdělené přímky.