Vavřinec Jelínek

O některých úlohách z arithmografie. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 1, 68--76

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123863`

$$\overline{on} = \overline{oo_1} - \overline{no_1} = \overline{oo_1} - \overline{aa_1} = (a + b) - a,$$

Tedy:
$$\overline{on} = b.$$

b) Geometrické délky poloos ellipsy jsou $\overline{om}$ a $\overline{on}$.

Z výsledků *a)*, *b)* plyne známé sestrojení os ellipsy z daných průměrů sdružených.

Sestrojme bodem b_1 kolmici na ob_2, učiňme $b_1o_1 = b_1o_2 = ob_2$, rozpůlme úhel o_1oo_2 osou X a jeho úhel vedlejší osou Y. Omezíme-li přímkami $\overline{oo_1}$, $\overline{b_1m} \perp$ X a $\overline{bn} \perp$ Y trojúhelník b_1mn, a sestrojíme-li ze středu o kružnice o poloměrech $\overline{om} = a$, $\overline{on} = b$, budou průsečíky jejich s osami X a Y vrcholy ellipsy.

O některých úlohách z arithmografie.

Pojednává

Vavř. Jelínek,

prof. v Novém Městě u Vídně.

I. Majíce danou úsečku násobiti zlomkem, rozdělujeme ji obyčejně na tolik stejných částí, kolik jednotek obsahuje jmenovatel, a sečteme jich tolik, kolik jednotek vykazuje čítatel daného zlomku. Je-li však jmenovatelem číslo poněkud větší, neb je-li znázorniti několik zlomkův o různých jmenovatelích, jest tato práce zdlouhavou, někdy i obtížnou, a jelikož transversální měřítko zařízeno jest pouze pro desetinné zlomky, upozorňuji na následující methody:

A. Dané zlomky mají společného jmenovatele, kterýž lze vyjádřiti součinem dvou čísel m a n.

V tomto případě rozdělíme danou úsečku AB = 1 (obr. 1.) na *m* rovných dílcův a naneseme na přímku AC, vycházející libovolným směrem z počátku A úsečky AB, *n* stejně dlouhých úseček. Konec C spojíme s každým dělícím bodem úsečky AB přímkami a vedeme dělícími body na přímky AC rovnoběžky s AB.

Dělící body na AB číslujeme směrem od počátku, dělící body na přímce AC směrem od konce rozdělené přímky.

Jakýkoli počet mn-tin úsečky $AB = 1$ najdeme pak na rovnoběžkách. Jesti část $x (= DE)$ rovnoběžky r-té od jejího počátku až ku paprsku p-tému dle trojúhelníků CDE $\sim$ ACF z úměry

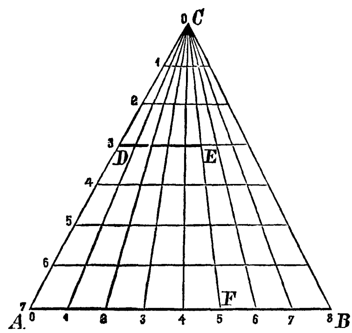
$$DE : AF = CD : CA,$$

čili

$$x : \frac{p}{m} \,.\, AB = \frac{r}{n} \,.\, AC : AC,$$

$$x = \frac{pr}{mn} \,.\, AB = \frac{pr}{mn}.$$

1. Část některé rovnoběžky, měřená od jejího počátku až ku průsečíku s některým paprskem, rovná se tedy zlomku,



Obr. 1.

jehož čítatelem jest součin čísel obou přímek, v tomto průsečíku se setkávajících a jmenovatelem součin z počtu dílců na AB s počtem dílců na AC. Na př.: část rovnoběžky 5té až po paprsek 2. jest $\frac{5.2}{7.8} = \frac{5}{28}$.

2. Pročež hledajíce úsečku o hodnotě $\frac{s}{mn}$, převedeme čítatele na součin dvou činitelův, nikoliv větších než m a n, a najdeme pak hodnotu zlomku na rovnoběžce, označené jedním tímto činitelem, od jejího počátku až ku paprsku, označenému činitelem druhým. Na př.:

$\frac{15}{56} = \frac{3.5}{7.8}$ jest rovnoběžka 3. až ku paprsku 5.,

neb „ 5. „ „ „ 3.

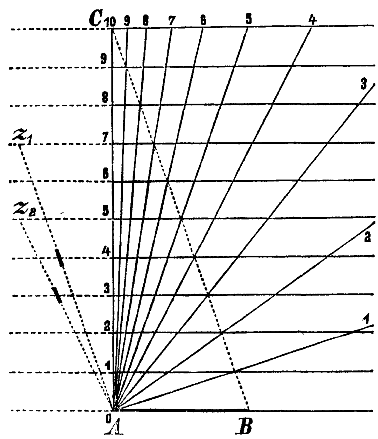
Nelze-li čítatele převésti na takový součin, rozložíme jej na součet přiměřeného součinu a příslušného zbytku. Tak shledáme, že na př.

$$\frac{27}{56} = \frac{5.5+2}{7.8} = \frac{5.5}{7.8} + \frac{1.2}{7.8}$$

jest součet z rovnoběžky 5. až po paprsek 5. s rovnoběžkou 1. až po paprsek 2.

B. Jmenovateli zlomků jsou různé součiny dvou činitelův, z nichžto největším jest číslo n.

Tu vedeme z počátku A dané úsečky AB = 1 přímku AC, svírající s AB jakýkoli (nejpřiměřeněji pravý) úhel (obr. 2.) a naneseme



Obr. 2.

na ni, počínajíce od vrcholu A sevřeného úhlu, *n* stejných úseček, které tímtéž směrem číslujeme. Dělícími body sestrojíme rovnoběžky s AB a protnuvše tyto rovnoběžky příčkou BC, vedeme každým průsečíkem paprsek z A, který i horní rovnoběžky protíná. Každý paprsek poznamenáme číslem rovnoběžky, s kterou se ve příčce BC protíná.

1. Dílce rovnoběžek znázorňují zlomky dané úsečky, jejichž jmenovatelem jest součin jakýchkoli dvou čísel 1 až n.

Jesti část x rovnoběžky r-té (na př. 7.) od jejího počátku až ku paprsku p-tému (na př. 5.) základnou trojúhelníka o vrcholu v A. Tento paprsek setkává se na příčce BC s rovnoběžkou p-tou a utíná od ní část y, kteráž jest základnou podobného trojúhelníka o vrcholu taktéž v A. Z obou těchto trojúhelníků plyne úměra

$$x : y = r : p, \text{ tedy } x = \frac{ry}{p}.$$

Úsečka y jest zároveň základnou trojúhelníka o vrcholu v C, a ježto tento trojúhelník jest podoben trojúhelníku ABC, vychází, že

$$y : 1 = (n - p) : n.$$

Jest tedy

$$y = \frac{n - p}{n}, \quad x = \frac{r(n - p)}{pn}.$$

Podobně bychom obdrželi část x_1 téže rovnoběžky od jejího počátku až ku paprsku p_1-tému

$$x_1 = \frac{r(n - p_1)}{p_1 n}.$$

Část rovnoběžky r-té, omezená paprsky p-tým a p_1-tým, jest tudíž

$$z = x - x_1 = \frac{r}{n}\left[\frac{n - p}{p} - \frac{n - p_1}{p_1}\right] = \frac{r(p_1 - p)}{pp_1},$$

nebo poznamenáme-li rozdíl $(p_1 - p)$ paprskových čísel písmenem d,

$$z = \frac{r(d)}{pp_1}. \tag{1}$$

Rozumí se samo sebou, že žádné z čísel r, p, p_1, d nemůže býti větším než n. Také jest zřejmo, že rozdíl d paprskových čísel zároveň udává počet dílcův, na kteréž část z rozdělena jest paprsky, ležícími mezi paprsky p-tým a p_1-tým. Lze tedy dle vzorce (1) vyčísti zlomek pro hodnotu kterékoli části některé rovnoběžky přímo z obrazce, je-li tato část omezena paprsky. Čítatelem zlomku bude součin z čísla při rovnoběžce, jejíž část vyměřujeme, s počtem dílců této části, jmenovatelem pak součin z čísel tuto část omezujících paprsků.

V následujících příkladech jest počet dílců (rozdíl paprskových čísel) vždy mezi závorkami.

Část rovnoběžky 5. od paprsku 7. až po paprsek 4. jest v obrazci rozdělen na $(7 - 4) = 3$ dílce a obnáší tedy

$$\frac{5 \,.\, (3)}{7 \,.\, 4} = \frac{15}{28}.$$

Na rovnoběžce 8. leží mezi paprsky 9. a 7. část

$$\frac{8 \,.\, (2)}{9 \,.\, 7} = \frac{16}{63}.$$

Pro sousední paprsky $p_1 = p + 1$ přechází horní vzorec (1) v

$$z = \frac{r}{p(p+1)}. \qquad (2)$$

Na př.: Paprsky 8. a 7. omezují na rovnoběžce 9. část $\frac{9}{8 \,.\, 7} = \frac{9}{56}$.

Měříme-li část rovnoběžky r-té, počínajíce od jejího průsečíku s příčkou BC až ku průsečíku s paprskem p-tým, nabudeme ze vzorce (1), uváživše, že druhý omezující paprsek p_1-tý jest rovného čísla s rovnoběžkou, zlomku

$$z = \frac{(d)}{p}, \qquad (3)$$

jehož čítatelem jest počet d dílců v této části a jmenovatelem číslo mezního paprsku, aneb máme-li zřetel pouze k délce a nikoliv k směru,

$$z = \frac{d}{p} = \frac{r - p}{p} = \frac{p - r}{d}.$$

Na př.: 3 dílce některé rovnoběžky, měřené v pravo neb v levo od příčky BC až po paprsek 7., mají hodnotu $\frac{3}{7}$.

2. Hledajíce obraz některého zlomku $\frac{s}{pp_1}$, řídíme se napřed jeho jmenovatelem a pak čitatelem.

a) Jmenovatelem jest číslo některého paprsku.

Obraz takového zlomku najdeme dle vzorce (3), převedeme-li čitatele na rozdíl mezi jmenovatelem a příslušným menšitelem. Menšitel udává pak číslo rovnoběžky, na které mezi příčkou BC a daným paprskem jest nalézti hodnotu zlomku. Na př.:

$\frac{1}{9} = \frac{9 - 8}{9}$ jest na rovnoběžce 8. od příčky až po paprsek 9.

$\frac{5}{8} = \frac{8 - 3}{8}$ „ „ „ 3. „ „ „ „ „ 8.

Chceme-li v případě tomto užíti obecného vzorce (1), násobíme čitatele i jmenovatele daného zlomku rozdílem obou těchto čísel, tedy, je-li čitatelem 1, násobíme čitatele i jmenovatele číslem sousedního paprsku. Původní čitatel jest pak rozdílem (α) obou činitelů v novém jmenovateli. Na př.:

$$\frac{7}{9} = \frac{2\,.\,(7)}{9\,.\,2}$$

jest část rovnoběžky 2. mezi paprsky 9. a 2.

$$\frac{1}{9} = \frac{8\,.\,(1)}{9\,.\,8} = \frac{10\,.\,(1)}{10\,.\,9}$$

jest nalézti na rovnoběžce 8. mezi paprsky 9. a 8. neb na rovnoběžce 10. mezi paprsky 10. a 9.

b) Jmenovatelem zlomku jest součin dvou paprskových čísel. Tu najdeme úsečku znázorňující daný zlomek takto:

α) Je-li čítatel násobkem rozdílu obou činitelů ve jmenovateli, znamená násobitel tohoto rozdílu rovnoběžku, na které nalézti jest hodnotu daného zlomku, a násobitel ten nesmí tedy býti větší než číslo *n*. Na př.:

$$\frac{1}{56} = \frac{1\,.\,(1)}{8\,.\,7}$$

najdeme na rovnoběžce 1. mezi sousedními paprsky 8. a 7.

$$\frac{9}{56} = \frac{9\,.\,(1)}{8\,.\,7}$$

jest část rovnoběžky 9., omezená paprsky 8. a 7.

$$\frac{32}{45} = \frac{8\,.\,(4)}{9\,.\,5}$$

jest na rovnoběžce 8. mezi paprsky 9. a 5.

β) Je-li čítatel menší než rozdíl činitelů ve jmenovateli, násobíme čítatele a menšího činitele ve jmenovateli takovým číslem, aby čítatel rozšířeného zlomku byl násobkem rozdílu obou činitelů v novém jmenovateli. Na př.:

$$\frac{1}{21} = \frac{1}{7\,.\,3} = \frac{2\,.\,(1)}{7\,.\,6}, \quad \frac{3}{14} = \frac{3}{7\,.\,2} = \frac{9\,.\,(1)}{7\,.\,6},$$

$$\frac{1}{40} = \frac{1}{10\,.\,4} = \frac{1\,.\,(2)}{10\,.\,8}, \quad \frac{5}{18} = \frac{5}{9\,.\,2} = \frac{5\,.\,(3)}{9\,.\,6},$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{9\,.\,4} = \frac{2\,.\,(1)}{9\,.\,8}, \quad \frac{2}{45} = \frac{2}{9\,.\,5} = \frac{2\,.\,(2)}{9\,.\,10}.$$

Hodnoty tyto najdeme v obrazci, jako jsme našli hodnoty uvedené v příkladech *α*) a *β*).

γ) Nelze-li v případě β) čísla paprsková takto vhodně pozměniti (poněvadž by násobený činitel jmenovatele byl větší než n), neb je-li čítatel sice větší než rozdíl činitelů ve jmenovateli, avšak buď větším než n-tým, neb není-li vůbec násobkem tohoto rozdílu, rozložíme čítatele na součet neb rozdíl dvou součinů, z nichžto alespoň jeden by byl násobkem rozdílu obou činitelů ve jmenovateli, neb násobkem jednoho tohoto činitele. Tak obdržíme místo daného zlomku součet neb rozdíl dvou zlomkův a znázorníme hodnotu daného zlomku součtem neb rozdílem hodnot obou těchto zlomkův. Na př.:

$$\frac{1}{70} = \frac{10-9}{10.7} = \frac{1}{7} - \frac{9}{10.7} = \frac{6.(1)}{7.6} - \frac{3.(3)}{10.7}$$

jest část rovnoběžky 6. mezi sousedními paprsky 7. a 6., zkrácená o část rovnoběžky 3. mezi paprsky 10. a 7.

Čítatel zlomku $\frac{57}{70} = \frac{19.(3)}{10.7}$ jest větším než n-tým násobkem rozdílu $(10 - 7) = 3$; rozložíme jej tedy na součet

$$\frac{57}{70} = \frac{10.(3) + 9.(3)}{10.7} = \frac{10.(3)}{10.7} + \frac{9.(3)}{10.7}$$

a najdeme hodnotu daného zlomku součtem částí 10. a 9. rovnoběžky mezi paprsky 10. a 7.

Čítatel zlomku $\frac{47}{70}$ není násobkem rozdílu $(10 - 7) = 3$; rozložíme jej tedy na součet neb na rozdíl asi takto;

$$\frac{47}{70} = \frac{40+7}{10.7} = \frac{4}{7} + \frac{1}{10} = \frac{3.(4)}{7.3} + \frac{9.(1)}{10.9},$$

$$\frac{47}{70} = \frac{50-3}{10.7} = \frac{5}{7} - \frac{3}{10.7} = \frac{2.(5)}{7.2} - \frac{1.(3)}{10.7},$$

kteréžto části snadno jest nalézti v obrazci 2.

δ) Takovým způsobem nelze převésti čítatele a znázorniti hodnotu zlomku, jehož jmenovatelem jest dvojmoc, přesahující číslo n, neb součin dvou činitelův o společném děliteli, který ovšem v čítateli obsažen není. V těchto případech rozvedeme zlomek na součin dvou zlomkův a, prodloužíce v obr. 2. rovnoběžky na levo od AC, počínáme si takto: Je-li dán zlomek $\frac{20}{49}=\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}$, najdeme napřed $\frac{5}{7}=\frac{2\,.\,(5)}{7\,.\,2}$, naneseme tuto hodnotu na prodlouženou rovnoběžku 7. a spojíme mezní její bod Z_1 s bodem A. Spojnice Z_1A utne od prodloužené rovnoběžky 4. část $\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}$.

$\frac{21}{50}=\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{5}$. Tu naneseme úsečku $\frac{7}{10}=\frac{3\,.\,(7)}{10\,.\,3}$ na prodlouženou rovnoběžku 5. a utneme přímkou Z_2A, vedenou z jejího mezního bodu Z_2 k A, na prodloužené rovnoběžce 3. hodnotu $\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{5}$.

3. Podobně si vypomůžeme vedlejším výkresem, hledajíce hodnotu zlomku, jehož jmenovatelem jest součin více než dvou čísel, nelze-li zlomek rozložiti na součet neb rozdíl dvou zlomků, jichž jmenovateli by byly součiny jen dvou čísel paprskových.

(Dokončení.)

Úlohy.

Úloha 1.

Řešiti rovnici

$$\log 5^{2\sqrt[3]{x}} - \log 5^{3\sqrt[6]{x}} = 2 - \log 4\,.$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 2.

Řešiti soustavu rovnic

$$4\,.\,3^{x+1} - 5\,.\,2^{y+3} = 164$$
$$5\,.\,3^{2x-3} + 4\,.\,2^{2y-1} = 187\,.$$

Týž.