

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bedřich Procházka
O jistém druhu křivek

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 5, 291--295

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123852>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1895

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O jistém druhu křivek.

Napsal

Bedřich Procházka,
professor v Karlíně.

Ve XIV. ročníku: „Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky“, uveřejnil zvěčnělý kollega professor *Frant. Machovec* pod týmž titulem na základě equipolenci odůvodněné konstrukce normal ku jistým křivkám, jichž zvláštním případem jest konchoida de la Hirova a konchoida obecná.

Použiv geometrie kinetické dospěl jsem na základě výtvárného zákona těchto křivek k téže konstrukci normal a nabyl zároveň jednoduchých prostředků ku sestrojení jejich středu křivosti.

1. „V jisté rovině v poloze neproměnné nalézají se dvě křivky A , B , a bod p . Určitý úhel α pohybuje se tak, že vrchol jeho b se šine po křivce B a jedno rameno jeho P prochází stále bodem p a protíná křivku A v bodě a . Hledáme normalu a střed křivosti křivky C , vytvořené bodem c , nalezájícím se na druhém rameni úhlu R , a zároveň se v tomto rameni tak pohybujícím, že délka \overline{bc} zůstává při pohybu stále rovná délce \overline{pa} .“

a) Sestrojení normaly.

Poněvadž pohyb bodu c jest výsledkem otáčení kol okamžitého středu otáčení roviny úhlu α a šinutí jeho v rameni R tohoto úhlu, sestrojíme normalu křivky C na základě kolmých rychlostí bodu c plynoucích z pohybu prvního i druhého.

Sestrojivše normalu $N_c \equiv \overline{bb'}$ v bodu b křivky B a kolmici $P' \equiv \overline{pb'}$ v bodu p ku přímce P , obdržíme v průseku b' těchto přímek okamžitý střed otáčení roviny úhlu α . Předpokládajíce, že otáčení toto se děje s úhlovou rychlostí rovnou jednotce, máme v délce $\overline{cb'}$ kolmou rychlost otáčení bodu c *) co do směru i velikosti.

Poněvadž rychlost šinutí bodu c v rameni R úhlu α rovna rychlosti, kterou se bod a v rameni P pohybuje, bude nám

*) „Lehrbuch der Kinematik“ von Dr. L. Burmester I. Band, 1. Lieferung, Pag. 23.

třeba tuto rychlost sestrojiti. Sestrojíme za tím účelem v bodu a křivky A normalu $N_a \equiv aa'$, která již dříve sestrojenou přímkou P' protíná v bodě a' . V délce $\overline{pa'}$ máme pak kolmou rychlost šinutí bodu a v rameni P a sestrojíme-li úsečku $\overline{ca} \perp R$ a rovnou délce $\overline{pa'}$, obdržíme kolmou rychlost šinutí bodu c v rameni R .

Úhlopříčka cc' rovnoběžníka $cb'c'd$, sestrojeného nad oběma kolnými rychlostmi bodu c , představuje nám pak kolmou rychlost výslednou bodu c , a jest tedy normalou N_c křivky C .

Z konstrukce této jest patrné, že úhel $a'b'c'$ roven úhlu α , délka $\overline{b'c'}$ kolma ku rameni R a rovna délce $\overline{pa'}$. Majíce tedy sestrojiti normalu v libovolném bodě křivky C , sestrojíme normaly křivek A a B v bodech a a b , a učiníme $\overline{pb'} \perp \overline{pb}$, $\sphericalangle a'b'c' = \alpha$ a $\overline{b'c'} = \overline{pa'}$; v úsečce cc' obdržíme normalu hledanou N_c , jejíž délka a směr nám udává kolmou rychlost bodu c co do velikosti i směru.

b) Sestrojení středu křivosti.

Střed křivosti křivky C v bodě c stanovíme jakožto okamžitý střed otáčení příslušné normaly N_c .

Za tím účelem musíme znáti rychlost pohybu dvou bodů jejich. A tu se nám doporučuje bod c , jehož kolmou rychlost cc' již známe, a bod c' , jehož kolmou rychlost stanovíme následním způsobem.

Při otáčení roviny úhlu α kol bodu p (zveme jej polem) vytvoří body a' a b' určité křivky A' a B' a úhel $a'b'c'$ — stále rovný úhlu α , — pohybuje se tak, že vrchol jeho b' se šine po křivce B' a jedno jeho rameno $P' \equiv \overline{pb'}$ prochází stále polem p . Zároveň vytváří bod c' , pohybující se současně po druhém rameni $R' \equiv \overline{b'c'}$ úhlu α tak, že délka $\overline{b'c'}$ délce $\overline{pa'}$ rovna zůstává, jistou křivku C' , jejíž normala $N_{c'}$ nám udávati bude hledanou kolmou rychlost bodu c' .

Jelikož má tato křivka C' týž výtvarný zákon jako křivka C , sestrojíme její normalu $N_{c'}$, užijeme konstrukce v předcházejícím odstavci uvedené.

Sestrojíme normaly $N_{a'}$ a $N_{b'}$ křivek A' a B' v bodech

a' a b' , *) učiníme $\sphericalangle a''b''c'' = \alpha$ a $b''c'' = pa''$; v úsečce $\overline{c''c''} \equiv N_a$ obdržíme kolmou rychlost bodu c' co do směru a velikosti.

Z nalezených kolmých rychlostí bodů c a c' odvodíme pak okamžitý střed otáčení normaly N_c , jakožto střed křivosti c křivky C v bodu c .**)

2) Kdyby úhel $\alpha = \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$, pak jest výtvarný zákon křivky C následující:

Průvodič $\varphi_c \equiv \overline{pc}$ bodu c roven $\left\{ \begin{array}{l} \text{součtu} \\ \text{rozdílu} \end{array} \right\}$ průvodičů $\varphi_a \equiv \overline{pa}$ a $\varphi_b \equiv \overline{pb}$ bodů a a b křivek A a B na témž pársku P .

Z konstrukce normaly v 1_a odvozené patrně.

Polární subnormala $\sigma_c \equiv \overline{pc'}$ křivky C pro bod c rovna jest

*) Normalu $N_{a'}$ v bodě a' křivky A' sestrojíme, když stanovíme kolmou rychlost bodu a' , jakožto průsečku normaly N_a kol středu křivosti k křivky A se otáčející a přímkou P' točící se kolem polu p . Rychlost tu stanovíme na základě rychlosti těchto obou otáčejících se přímek. Při otáčení roviny úhlu α kol polu p (rychlostí úhlovou rovnou jednotce) vyjadřuje nám délka $ae \perp \underline{aa'}$ prostou rychlost otáčení bodu a .

Kolmice \overline{af} ku normalě N_a vztyčená a přímkou ke omezená představuje nám prostou rychlost otáčení bodu a' . Přeneseme-li délku tuto \overline{af} od bodu a' na normalu N_a obdržíme v délce $\overline{a'g} \equiv \overline{af}$ kolmou rychlost bodu k' při otáčení normaly N_a kol bodu k .

Délka $\overline{pa'}$ vyjadřuje nám kolmou rychlost bodu a' při otáčení přímkou P' .

Kolmice ga'' ku normalě N_a v bodě g vztyčená protíná kolmici ku přímce P' v bodě p sestrojenou a tudíž s přímkou P totožnou v bodě a'' , který určuje s bodem a' délku $\overline{a'a''}$, vyjadřující nám kolmou rychlost bodu a' , kteráž tudíž jest zároveň normalou $N_{a'}$ křivky A' v bodě a' .

Právě tak sestrojíme pomocí středu křivosti 1_b křivky B' kolmou rychlost $b'b''$ bodu b' jakožto normalu $N_{b'}$ v bodě b' této křivky.

**) Bodem c vedeme rovnoběžku ch s přímkou $c'c''$ a omezíme ji kolmici $c'h$ v bodě c' ku normalě N_c vztyčenou. Přímka hc'' pak protíná normalu N_c ve středu křivosti 0 .

{součtu }
{rozdílu } polárních subnormal $\sigma_a = \overline{pa'}$ a $\sigma_b = \overline{pb'}$ křivek A a B v bodech a a b .

A z konstrukce středu křivosti v 1_b) uvedené plyne:

Polární subnormala $\sigma_{c'} = \overline{pc''}$ křivky C' (z níž lze určití zároveň rychlost bodu c' co do směru i velikosti) pro bod c' rovná se {součtu }
{rozdílu } polárních subnormal $\sigma_{a'} = \overline{pa''}$ a $\sigma_{b'} = \overline{pb''}$ křivek A' a B' v bodech a' a b' .

3. Jednoduchými stanou se konstrukce normály a středu křivosti v tom případě, když křivka A jest křivkou kruhovou o středu p , t. j. když křivka C jest konchoidou de la Hérovou, kteráž se promění, když zároveň úhel α rovný nulle učiníme v konchoidu obecnou.

4. Když se rameno P úhlu α místo aby procházelo stálým bodem p , dotýká se v měnitelném se bodu p , jisté křivky K, pak se děje otáčení roviny úhlu α kol středu křivosti s této křivky jakožto polu. Otáčení to nemá vlivu na konstrukci normály N_c křivky C. Jinak jest tomu však při sestrojování středu křivosti křivky C, neboť výtvarný zákon příslušné křivky C' bude jiný než v případě 1_b), a bude třeba její normalu $N_{c'}$ sestrojiti jiným způsobem.

V tomto případě úhel $a'b'c'$ (opět stále rovný úhlu α) pohybuje se tak, že vrchol jeho b' se šine po křivce B' a jedno jeho rameno P' dotýká se v měnitelném se bodě křivky S — evoluty křivky K. Při tom vytváří bod c' nalezající se na druhém rameni R' úhlu α ve vzdálenosti $\overline{b'c'} = \overline{pa'}$ křivku C'. Vzdálenost $b'c'$ nerovná se tedy vzdálenosti sa' t. j. vzdálenosti bodu a od polu s , nýbrž vzdálenosti pa' .

Můžeme si však myslet, že křivka C' povstala také takto:

Učiníme-li při každé poloze přímky P' délku $sl' = \overline{pa'}$ budou body l' tvořiti jistou křivku L', jejíž polární subnormala $\sigma_{l'} = \overline{sl''}$ (dle článku 2.), v přímce P'' (stejněměrné s přímkou P a bodem s procházející) stanovená, rovna rozdílu $\sigma_{a'} - \sigma_p$; jelikož však subnormala $s_p = 0$ jest $\sigma_p = \sigma_a$.

Z křivek L' a B' odvodíme pak křivku C' tak jako v případě 1_a) z křivek A a B : Připojíme k polární subnormale $\sigma_{b'} \equiv \overline{sb''}$ křivky B' pod úhlem α délku $\sigma_{a'} \equiv \overline{sa''}$ a obdržíme bod c'' , jímž prochází normala $N_{c'} \equiv \overline{c''c''}$ křivky C' v bodě c' .*)

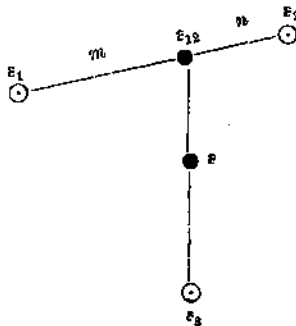
Délka $\overline{c''c''}$ vyjadřuje pak kolmou rychlost bodu c' , kteráž s kolmou rychlostí $\overline{cc'}$ bodu c dle článku 1_b) nám určuje okamžitý střed normaly N_c , jakožto střed křivosti křivky C v bodě c .

O grafickém řešení rovnic.

Podává

dr. V. Láska v Praze.

V prvním čísle tohoto ročníku podal jsem grafické řešení rovnic o více neznámých na základě sčítání přímek. V této úvaze volím k řešení téhož problému sčítání bodů.



*) Ke konstrukci této nám třeba subnormal $\sigma_{a'}$ a $\sigma_{b'}$, které si stanovíme pomocí normal $N_{a'}$ a $N_{b'}$ v bodech a' a b' křivek A' a B' .

Normalu $N_{a'}$ v bodě a' křivky A' sestrojíme, když stanovíme kolmou rychlost $a'a''$ bodu a' , jakožto průsečíku normaly N_a kol středu křivosti k křivky A se stáčející a přímkou P' točící se kol středu křivosti s křivky K . Rychlost tu docílíme touž konstrukcí, kterou jsme uvedli v 1_b) při stanovení rychlosti bodu a' v poznámce na str. předcházející.

Právě tak sestrojíme kolmou rychlost bodu b' , normalu $N_{b'}$ křivky B' v bodě b' nám udávající.