Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Rádl

Poznámka k theorii rovnic differenciálních lineárních. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 2, 154--159

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123845

poněvadž výraz $f'_1(\alpha)$ dle α jest ještě o dvě jednotky nižšího stupně než výraz $f'(\alpha)$, jest dle známé věty hodnota součtu

$$\Sigma \frac{f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0,$$

a tedy:

$$\Sigma x = 0,$$

a z důvodu symmetrie i

$$\Sigma y = 0.$$

Položíme-li $k = 1$, obdržíme křivky stupně třetího:

$$C_3 x^3 + C_2 y^3 + C_1 xy + C_0 = 0.$$

Klademe-li konečně $C_0 = 0$, přecházejí křivky ty v unikursální čáry stupně třetího s dvojným bodem v počátku a s inflekční přímkou v nekonečnu.

Poněvadž v součtu Σx i Σy jest zastoupen i dvojný bod se souřadnicemi (0, 0), plyne z toho věta:

Střed středních vzdáleností dotyčných bodů tečen libovolným bodem roviny procházejících ku křivkám

$$C_3 x^3 + C_2 y^3 + C_1 xy = 0,$$

jest dvojný bod. Zvláštním případem těchto jest list Descartesův:

$$x^3 + y^3 + axy = 0.$$

Poznámka k theorii rovnic differenciálních lineárních.

Napsal Dr. **Fr. Rádl.**

(Pokračování.)

2. Hleďme nyní rozšířiti předcházející úvahy na lineárné rovnice s derivacemi partiálními.

Proveďme s jistou funkcí u o třech neodvisle proměnných x, y, z (modifikace pro n proměnných jest pak samozřejmá) za sebou operace

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial z} + cu, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial u}{\partial y} + \beta\frac{\partial u}{\partial z} + \gamma u,$$

kde koefficienty $a, b, \ldots, \gamma$ jsou funkce x, y, z, a předpokládejme, že výsledek jest roven nulle. Obdržíme lineární rovnici s derivacemi parciálními řádu 2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + E\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$$
$$+ F\frac{\partial u}{\partial x} + G\frac{\partial u}{\partial y} + H\frac{\partial u}{\partial z} + Iu = 0, \tag{5}$$

v níž koefficienty $A, B, \ldots, I$ jsou utvořeny z funkcí $a, b, \ldots, \gamma$ a jejich partiálních derivací.

Dána-li obráceně rovnice (5) a hledáme-li k daným koefficientům $A, B, \ldots, I$ funkce $a, b, \ldots, \gamma$, obdržíme celkem 9 rovnic o 6 neznámých, tedy jen 6 z koefficientů $A, B, \ldots, I$ může býti předem dáno libovolně, rovnice (5) není tedy všeobecná, 3 její koefficienty závisí na 6 ostatních.

Vykonáme-li postupně n operací

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a_k\frac{\partial u}{\partial y} + b_k\frac{\partial u}{\partial z} + c_k u,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$ a položíme-li výsledek rovným jisté funkci $F(x, y, z)$, vznikne rovnice téhož druhu řádu n-ho

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + p_{0,n,0}\frac{\partial^n u}{\partial y^n} + \ldots + p_{0,0,1}\frac{\partial u}{\partial z} + p_{0,0,0}\, u = F; \tag{6}$$

koefficienty $p_{0,n,0}, \ldots, p_{0,0,0}$, jichž jest

$$\frac{(n+1)\,(n+2)}{2} + \frac{n\,(n+1)}{2} + \ldots + 3,$$

jsou utvořeny z funkcí a_k, b_k, c_k a jich part. derivací, avšak pouze $3n$ jest jich libovolných, ostatní jsou na nich závislé.

Integraci rovnice (6) provedeme pak tím způsobem, že na obou jejích stranách vykonáme postupně operace inversní úkonům

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a_k\frac{\partial u}{\partial y} + b_k\frac{\partial u}{\partial z} + c_k u,\ k = n,\ n-1, \ldots, 2,\ 1.$$

Řešme za tím účelem rovnici nejjednodušší

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial z} + cu = F(xyz);] \tag{7}$$

místo abychom hledali integrál pomocí systému rovnic obyčejných

$$dx = \frac{dy}{a} = \frac{dz}{b} = \frac{du}{F - cu},$$

mysleme si rovnici (7) vzniklou z úkonů

$$\varphi u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \psi \frac{\partial u}{\partial y} + \chi \frac{\partial u}{\partial z},$$

které dávají

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \psi \frac{\partial u}{\partial y} + \chi \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\psi}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\chi}{\varphi} \frac{\partial u}{\partial z} \right) u = F(x, y, z),$$

takže $\psi = a$, $\chi = b$; φ určuje rovnice

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \chi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = c\varphi,$$

při čemž stačí za φ vzíti jakýkoli integrál partikulární. Při integraci rovnice (7) nutno tedy stanoviti φ, ψ, χ, pak násobiti obě strany φ, pak provésti inversní úkon k

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \psi \frac{\partial u}{\partial y} + \chi \frac{\partial u}{\partial z},$$

konečně děliti φ.

Abychom provedli operaci inversní k

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \psi \frac{\partial u}{\partial y} + \chi \frac{\partial u}{\partial z},$$

pišme integrál rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \psi \frac{\partial u}{\partial y} + \chi \frac{\partial u}{\partial z} = F(x, y, z)$$

ve tvaru

$$u = \int F[U, y(U, V, W), z(U, V, W)]\, dU + g\,[V(x, y, z), W(x, y, z)],$$

kde g je libovolná funkce a systém tří funkcí $U = x$, $V = V(x, y, z)$, $W = W(x, y, z)$ a tedy i systém inversní $x = U$, $y = y(U, V, W)$, $z = z(U, V, W)$ jest dán rovnicemi

$$\frac{\partial y}{\partial U} = \psi, \quad \frac{\partial z}{\partial U} = \chi.$$

V integrandu $F[\ldots]$ nutno při integraci funkce V, W pokládati za konstanty, teprv po integraci jest dosaditi pro $U = x$, $V = V(x, y, z)$, $W = W(x, y, z)$. K vůli stručnosti označme tento integrál

$$u = \int\limits_{\psi, \chi} F\,dx + g(V, W).$$

Provedeme-li tedy dle udaného postupu integraci rovnice (7), obdržíme

$$u = \frac{1}{\varphi}\int\limits_{\psi, \chi} F'\varphi dx + \frac{g(V, W)}{\varphi}.$$

Přikročme konečně k integraci předložené rovnice (6) dle předcházejícího výkladu. Integrál rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a_k\frac{\partial u}{\partial y} + b_k\frac{\partial u}{\partial z} + c_k u = F$$

budiž

$$u = \frac{1}{\varphi_k}\int\limits_{\psi_k, \chi_k} F\,\varphi_k dx + \frac{g_k(V_k, W_k)}{\varphi_k}.$$

Nutno nejprve provésti operaci inversní k úkonu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a_n\frac{\partial u}{\partial y} + b_n\frac{\partial u}{\partial z} + c_n u,$$

čímž obdržíme rovnici o řád nižší

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}} + q_{0,n-1,0}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{n-1}} + \ldots + q_{0,0,0}u$$
$$= \frac{1}{\varphi_n}\int\limits_{\psi_n, \chi_n} F\varphi_n\,dx + \frac{g_n(V_n, W_n)}{\varphi_n}.$$

Další integrací obou stran dle operace

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a_{n-1}\frac{\partial u}{\partial y} + b_{n-1}\frac{\partial u}{\partial z} + c_{n-1}u$$

vzniká rovnice řádu n-2ho

$$\frac{\partial^{n-2} u}{\partial x^{n-2}} + r_{0,n-2,0} \frac{\partial^{n-2} u}{\partial y^{n-2}} + \ldots + r_{0,0,0}\, u$$

$$= \frac{1}{\varphi_{n-1}} \int\limits_{\psi_{n-1},\, \chi_{n-1}} \left[\frac{1}{\varphi_n} \int F \varphi_n \, dx + \frac{g_n(V_n, W_n)}{\varphi_n} \right] \varphi_{n-1}\, dx$$

$$+ \frac{g_{n-1}(V_{n-1}, W_{n-1})}{\varphi_{n-1}} = \frac{1}{\varphi_{n-1}} \int \left[\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} \int F \varphi_n dx \right] dx$$

$$+ \frac{1}{\varphi_{n-1}} \int \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}\, g_n(V_n, W_n)\, dx + \frac{1}{\varphi_{n-1}}\, g_{n-1}(V_{n-1}, W_{n-1}).$$

Z toho plyne, že má všeobecný integrál rovnice (6) tvar

$$u = \frac{1}{\varphi_1} \int\limits_{\psi_1,\, \chi_1} \left\{ \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \ldots \int\limits_{\psi_{n-1},\, \chi_{n-1}} \left[\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} \int\limits_{\psi_n,\, \chi_n,} F \varphi_n \, dx \right] dx \ldots \right\} dx + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\varphi_1} \int\limits_{\psi_1,\, \chi_1} \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\, g_2(V_2, W_2)\, dx + \frac{1}{\varphi_1}\, g_1(V_1, W_1). \tag{8}$$

3. Porovnáme-li tento výsledek s integrálem rovnice lineární obyčejné (4), shledáme úplnou analogii, která se jeví i v tom, že ze známého všeobecného integrálu rovnice (6) bez druhého členu F možná stanoviti integrál téže rovnice s druhým členem.

Neboť je-li integrál rovnice (6) bez členu F dán ve tvaru $u_1 = Q_n + Q_{n-1} + \ldots + Q_2 + Q_1$, dle vzorce (8) položme

$$\frac{1}{\varphi_1}\, g_1(V_1, W_1) = Q_1,$$

čímž dáno φ_1, pak též $U_1 = x$, V_1, W_1 a funkce inversní $x = U_1$, $y(U_1, V_1, W_1)$, $z(U_1, V_1, W_1)$, tedy i

$$\psi_1 = \frac{\partial y}{\partial U_1}, \quad \chi_1 = \frac{\partial z}{\partial U_1}.$$

Učiníme-li dle (8) za druhé

$$\frac{1}{\varphi_1} \int\limits_{\psi_1,\, \chi_1} \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\, g_2(V_2, W_2)\, dx = Q_2,$$

obdržíme znásobením této rovnice φ_1 a differencováním dle úkonu

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\psi_1\frac{\partial u}{\partial y}+\chi_1\frac{\partial u}{\partial z}$$

relaci

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2}g_2(V_2, W_2)=\frac{\partial(\varphi_1 Q_2)}{\partial x}+\psi_1\frac{\partial(\varphi_1 Q_2)}{\partial y}+\chi_1\frac{\partial(\varphi_1 Q_2)}{\partial z},$$

která určuje φ_2, pak systém U_2, V_2, W_2 s jeho inversí x, y, z, tedy i ψ_2, χ_2 atd.

Dle (8) jest pak patrné, že jest možná n quadraturami doplniti daný integrál u_1 na integrál u rovnice (5) s druhým členem F.

Jako u obyčejných rovnic differenciálních i zde možná snížiti řád rovnice (6) bez druhého členu, známe-li integrál částečný. Předpokládejme na př., že známe u této rovnice částečný integrál o jednom členu. Můžeme tento člen pokládati za poslední ve vzorci (8), má tedy tvar $u_1=\alpha_1 g_1(\beta_1, \gamma_1)$, kde α_1, β_1, γ_1 jsou dané funkce x, y, z, g_1 jest funkce libovolná.

Rovnice (6) vzniká posloupným provedením dvou operací

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}+q_{0,\,n-1,\,0}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{n-1}}+\ldots+q_{0,\,0,\,1}\frac{\partial u}{\partial z}+q_{0,\,0,\,0}u$$

(koefficienty q nejsou ovšem vesměs libovolné),

$$\frac{\partial u}{\partial x}+a_n\frac{\partial u}{\partial y}+b_n\frac{\partial u}{\partial z}+c_n u.$$

Položíme-li druhý úkon rovným nulle, obdržíme rovnici o integrálu $u_1=\alpha_1 g_1(\beta_1, \gamma_1)$, odkudž stanovíme a_n, b_n, c_n. Vyšetříce, jak závisí koefficienty p rovnice (6) na činitelích q a a_n, b_n, c_n, vypočteme snadno koefficienty q. Rovnice (6) se tím převede na tvar

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}+q_{0,\,n-1,\,0}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{n-1}}+\ldots+q_{0,\,0,\,0}u=\alpha_1 g_1(\beta_1, \gamma_1), \quad (9)$$

čímž jest o stupeň snížena

Poněvadž tuto rovnici možná opět o stupeň snížiti, jest patrno, že známe-li částečný integrál o r členech, možná převésti rovnici (6) na jinou o stupni $n-r$.

(Dokončení.)