O evolutách křivek rovinných.

(Sděluje dr. *Emil Weyr.*)

1. Evolutou dané rovinné křivky C_n n-tého stupně nazýváme křivku E zahalující veškeré normály dané křivky C_n; křivka E jest též místo středů křivosti dané křivky C_n. Neb dvě nekonečně blízké normály křivky C_n co nekonečně blízké tečny evoluty E protínají se v příslušném bodu styku, kterýžto průsek však, jak známo, jest též středem křivosti pro C_n.

Stupeň evoluty E bude tudíž počet středů křivosti křivky C_n na libovolné přímce se nalezajících; třída evoluty E pak jest počet libovolným bodem procházejících normál křivky C_n.

2. Pootočíme-li křivku C_n kolem libovolného bodu c o nekonečně malý úhel, tu každý bod B křivky C_n popíše nekonečně malý oblouk kruhový poloměru cB a středu c. Jest-li však B pata s bodu c na křivku C_n spuštěné normály, pak onen nekonečně malý oblouk jest část tečny křivky C_n v bodu B a nová poloha bodu B náleží tudíž původní poloze křivky C_n. Jelikož po onom nekonečně malém pootočení obdržíme s křivkou C_n shodnou této křivce nekonečně blízkou křivku, která tudíž jest též n-tého stupně; a poněvadž všeobecně dvě křivky stupňů p, q se v pq bodech protínají, tu obdržíme pro náš případ $n.\,n = n^2$ průseků obou nekonečně blízkých poloh křivky C_n. Průseky ty jsou pak paty s bodu c na křivku C_n spuštěných normál.

„*Každým bodem prochází n^2 normál křivky n-tého stupně.*"

„*Evoluta křivky n-tého stupně jest n^2-té třídy.*"

„*Každý bod v rovině křivky n-tého stupně jest středem n^2 kruhů křivky se dotýkajících.*"

Všecky tyto tři věty praví patrně v různých formách totéž.

3. „*Počet n^2 bodem procházejících normál zmenší se pro každý dvojný bod křivky C_n o dvě jednice.*"

Všeobecná křivka n-tého stupně nemá bodů dvojných.

Předpokládejmež nyní, že C_n v δ má bod dvojný, kterýmž nechť procházejí dvě větve A, B, a buďtež A' B' těmto větvím odpovídající (nekonečně blízké) větve křivky, kterouž z C_n obdržíme nekonečně malým pootočením kolem libovolného bodu c. Tu pak protíná na př. větev A větev B' v bodě bodu δ nekonečně blízkém aniž by $\overline{c\delta}$ byla normála křivky C_n; totéž platí o větvích A' a B. Takovým spůsobem shrnuty jsou v δ dva průseky dvou nekonečně blízkých poloh křivky C_n, aniž by (všeobecně) $\overline{c\delta}$ byla normála křivky C_n. Počet zbývajících průseků, které zavdávají podnět k normálám bodem c procházejícím, jest tudíž pouze $n^2 - 2$. Tím věta dokázána.

Má-li C_n δ bodů dvojných, bude počet normál libovolným bodem c procházejících $(n^2 - 2\delta)$.

„*Každým bodem prochází* $(n^2 - 2\delta)$ *normál křivky n-tého stupně opatřené* δ *body dvojnými. Evoluta takové křivky jest pouze* $(n^2 - 2\delta)$*-té třídy.*"

4. Největší počet dvojných bodů, který se může vyskytnouti při křivce n-tého stupně, aniž by se tato rozpadla na křivky stupňů nižších, jest

$$\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

V tomto případě jest křivka racionální.

Třída evoluty takové křivky jest tudíž

$$n^2 - (n-1)(n-2) = 3n - 2.$$

„*Každým bodem prochází* $(3n - 2)$ *normál racionální křivky n-tého stupně.*"

„*Evoluta racionální křivky n-tého stupně jest třídy* $(3n-2)$".

5. Pro racionální křivky n-tého stupně můžeme se i jinou cestou týchž a ještě dalších výsledků dodělati.

Mohouce na takových křivkách, (jejichž body se nechají určiti hodnotami jediné proměnné co funkce racionální) v úvahu bráti soustavy bodů buď průmětné aneb souvislosti složitější (víceznačné), mysleme si soustavu kruhů společného středu c.

Každý kruh středu c dotýkající se křivky K určuje bodem c procházející normálu křivky C_n. Každý kruh naší soustavy co křivka 2. stupně protíná křivku C_n v $2n$ bodech. Veškeré skupeniny takových průseků tvoří involuci $2n$-tého stupně; neb jedním bodem jest celá taková skupenina určena, poněvadž jediný bod určuje úplně jím procházející kruh středu c. Involuce na křivce C_n takto povstavší má

$$2(2n-1) = 4n - 2$$

bodů dvojných. Poněvadž však nekonečně vzdálená přímka, co přímka dvojitá představuje též kruh naší koncentrické soustavy, tu musíme n nekonečně vzdálených bodů křivky C_n považovati za právě tolik dvojných bodů naší involuce, tak že tedy zbývá $3n - 2$ dvojných bodů v konečnu, z nichž každý jest bodem styku křivky s kruhem středu $\underline{c}$ a tudíž patou kolmice s bodu $\underline{c}$ na křivku C_n spuštěné. Bodem $\underline{c}$ tedy v skutku prochází $(3n - 2)$ normál racionální křivky C_n n-tého stupně.

6. Jest-li s bodem návratu racionální křivky C_n, tu pak bodem tím procházející kruh středu $\underline{c}$ protíná v s křivku C_n v dvou nekonečně blízkých bodech, aniž by $\overline{cs}$ byla normála křivky C_n. Každý bod návratu jest tedy dvojným bodem takovým naší involuce, který neurčuje bodem c procházející normálu.

Každý bod návratu zmenšuje tudíž počet normál o jedničku. Totéž platí o křivce neracionální, neb takovou si vždy v nejbližším sousedství bodu s můžeme mysleti co křivku racionální (jiného stupně). Jelikož bod návratu z bodu dvojného povstane tím, že tečny tohoto splynou v jedinou přímku a jelikož bod dvojný již co takový zmenšuje počet normál o dvě tu vidíme, že:

„*Každý bod návratu zmenšuje počet normál daným bodem procházejících a tedy i třídu evoluty o tři jednice.*“

Má-li tudíž libovolná křivka C_n n-tého stupně δ bodů dvojných a s bodů návratu pak počet normál libovolným bodem procházejících aneb třída evoluty, jest $(n^2 - 2\delta - 3s)$.

7. Počet normál neb třída evoluty se i tím zmenší, prochází-li křivka C_n imaginárními body kruhovými v nekonečnu.

Má-li na př. racionální křivka C_n v každém z obou kruhových bodů r-násobný bod, pak každý kruh koncentrické soustavy protíná pouze v $(2n - 2r)$ bodech, tak že involuce má pouze $2(2n - 2r - 1)$ bodů dvojných, ku kterým též náleží $n - 2r$ bodů, v nichž mimo body kruhové nekonečně vzdálená přímka křivku C_n protíná. V konečnu se pak nalezá pouze:

$$4n - 4r - 2 - n + 2r = 3n - 2r - 2$$

aneb

$$(3n - 2) - 2r.$$

Kruhové body, náleží-li křivce co body r-násobné zmenší tudíž počet normál bodem procházejících aneb třídu evoluty o $2r$ jedniček. Je-li n číslo sudé pak největší možná hodnota pro r jest $\frac{n}{2}$ a nejnižší třída evoluty racionálních křivek sudého stupně n jest tudíž $3n - 2 - n = 2(n - 1)$.

Je-li n číslo liché, pak největší hodnota pro r jest $\frac{n-1}{2}$ a nejnižší třída evoluty racionálních křivek lichého stupně n jest tudíž $3n-2-n+1=2n-1$.

Při tom předpokládáme, že v konečnu nestává bodů návratu. Kdyby takových bodů v konečnu bylo s, pak by nejmenší stupně evolut byly $2(n-1)-s$ a $(2n-1-s)$ dle toho, je-li n číslo sudé neb liché.

8. Dotýká-li se základní křivka v bodu t nekonečně vzdálené přímky, pak lze každou bodem t' bodu t vzhledem ku kruhovým bodům harmonicky sdruženým bodem procházející přímku považovati za normálu křivky C_n.

Bod t tvoří tudíž co křivka první třídy část evoluty. Z toho soudíme:

„Má-li základní křivka t styků s nekonečně vzdálenou přímkou, zmenší se počet normál bodem procházejících aneb třída evoluty o t jednotek.“

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.*)

Příklady spojek plnoměrně stejnoklonných.

50. *Calcit*, obr. 17. (v sešitu předešlém). Co prvotvar vyvoliž se onen stejnoklon, dle jehož ploch ten mineral se štípá, a kterýž má hrany $H=105^0 5'$.

Na vyobrazeném tvaru jest $(h, d)=142^0\,32^1/_2{}'$, pročež $H=180^0-2(180^0-142^0 32\,^1/_2{}')=105^0 5'$ a tudíž náleží plocha h prvotvaru.

Dle polohy jest d plocha stejnoklonu polárních hran. Plochy d_n a $\underline{d}_n'$ náleží skalenoedrům, neb d_n přikrojuje polární a $\underline{d}_n'$ pobočné hrany prvotvaru. Pro $\underline{d}\,'$ jest $H=104^0 38'$, $D=144^0 24'$, z čehož dle vzorce (16)

$$\frac{\cos\frac{1}{2}H}{\cos\frac{1}{2}D}=n'=2$$

pročež $\underline{d}_n'=d_2$.