

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Dodatek k vyčíslení jistého integrálu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 5, 601--602

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123816>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1909

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

něty, které vedly „věcnou kritiku“ mého odpůrce. Závěr je snadný: zlehčil-li někdo vážnost jednání IV. sjezdu českých přírodopyců a lékařů — byl to Novák sám!

Poznámka redakce: Ježto o předmětě v nadpise článku vytčeném oba páni po dvakráte své názory projevíli, uzavírá se touto duplikou diskusse definitivně.

Dodatek k vyčíslení jistého integrálu.

Dr. Ant. Pleskoť v Plzni.

V čísle předchozím uvedl jsem na str. (427) elementární metodu, kterou lze vyčíslení integrál:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi}{a - b \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

ježž jsme uvedli substitucí $t = \cot \varphi$ na integrál:

$$J = \frac{1}{2a} \int_{\infty}^0 \frac{\log(1+t^2)}{1+t^2-\alpha} dt, \quad (1)$$

v němž $\alpha = \frac{b}{a}$; metoda spočívala na differencování integrálu dle parametru α .

Případl jsem na prajednoduchý elementární způsob vyčíslení integrálu (1) a sice tím, že v úvahu vezmeme zdánlivě složitější integrál

$$J_1 = \int_{\infty}^0 \frac{\log(1+\beta^2 t^2)}{1+t^2-\alpha} dt. \quad (2)$$

Integrál tento lze vyčíslení přímo, jako jsme to v předchozím článku učinili v případě $\alpha = 1$ a sice opět částečnou integrací; tohoto jednoduchého případu si tedy nevšímejme a předpokládejme opět $\alpha < 1$. Parametr β nechť značí libovolné číslo kladné nullu v to počítaje. Za těchto podmínek opět integrál konverguje.

Derivujme integrál (2) dle β , což dle známých pravidel lze provést za integračním znamením. Tu obdržíme:

$$\frac{\partial J_1}{\partial \beta} = \int_{\infty}^0 \frac{2\beta t^2 dt}{(1+t^2-\alpha)(1+\beta^2 t^2)}. \quad (3)$$

Funkci za integračním znaméním převedme v částečné zlomky, čímž obdržíme:

$$\frac{2\beta t^2}{(1+t^2-\alpha)(1+\beta^2 t^2)} = \frac{2\beta}{1-\beta^2(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{1+\beta^2 t^2} - \frac{2(1-\alpha)\beta}{1-\beta^2(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{1+t^2-\alpha}.$$

Poněvadž platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+\beta^2 t^2} = -\frac{\pi}{2\beta}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2-\alpha} = -\frac{\pi}{2\sqrt{1-\alpha}},$$

obdržíme z rovnice (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \beta} &= -\frac{\pi}{1-\beta^2(1-\alpha)} + \frac{\pi\beta\sqrt{1-\alpha}}{1-\beta^2(1-\alpha)} \\ &= -\frac{\pi}{1+\beta\sqrt{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Z této rovnice integrací plyne:

$$J_1 = -\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}} \log(1+\beta\sqrt{1-\alpha}) + k.$$

Konstantu k určíme, položíme-li $\beta=0$; v případě tomto integrál (2) jest roven 0, a proto $k=0$.

Jest tedy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(1+\beta^2 t^2)}{1+t^2-\alpha} dt = -\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}} \log(1+\beta\sqrt{1-\alpha}),$$

a pro $\beta=1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^2-\alpha} dt = -\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}} \log(1+\sqrt{1-\alpha}).$$

Hodnota předloženého integrálu (1) jest tedy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi \, d\varphi}{a-b \sin^2 \varphi} = -\frac{\pi}{2a\sqrt{1-\frac{b}{a}}} \log\left(1+\sqrt{1-\frac{b}{a}}\right).$$