Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Dodatek k vyčíslení jistého integrálu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 5, 601--602

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123816

něty, které vedly „*věcnou kritiku*“ mého odpůrce. Závěr je snadný: zlehčil-li někdo vážnost jednání IV. sjezdu českých přírodozpytců a lékařů — byl to Novák sám!

Poznámka redakce: Ježto o předmětě v nadpise článku vytčeném oba páni po dvakráte své názory projevili, uzavírá se touto duplikou diskusse definitivně.

Dodatek k vyčíslení jistého integrálu.

Dr. **Ant. Pleskot** v Plzni.

V čísle předchozím uvedl jsem na str. (427) elementární methodu, kterou lze vyčísliti integrál:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{log\ sin\ \varphi}{a - b\ sin^2\ \varphi}\, d\varphi,$$

jejž jsme uvedli substitucí $t = cot\ \varphi$ na integrál:

$$J = \frac{1}{2a}\int_\infty^0 \frac{log\,(1 + t^2)}{1 + t^2 - \alpha}\, dt, \tag{1}$$

v němž $\alpha = \dfrac{b}{a}$; methoda spočívala na differencování integrálu dle parametru α.

Připadl jsem na prajednoduchý elementární způsob vyčíslení integrálu (1) a sice tím, že v úvahu vezmeme zdánlivě složitější integrál

$$J_1 = \int_\infty^0 \frac{log\,(1 + \beta^2 t^2)}{1 + t^2 - \alpha}\, dt. \tag{2}$$

Integrál tento lze vyčísliti přímo, jako jsme to v předchozím článku učinili v případě $\alpha = 1$ a sice opět částečnou integrací; tohoto jednoduchého případu si tedy nevšímejme a předpokládejme opět $\alpha < 1$. Parametr β nechť značí libovolné číslo kladné nullu v to počítaje. Za těchto podmínek opět integrál konverguje.

Derivujme integrál (2) dle β, což dle známých pravidel lze provésti za integračním znamením. Tu obdržíme:

$$\frac{\partial J_1}{\partial \beta} = \int_\infty^0 \frac{2\beta t^2 dt}{(1 + t^2 - \alpha)(1 + \beta^2 t^2)}. \tag{3}$$

Funkci za integračním znamením převeďme v částečné zlomky, čímž obdržíme:

$$\frac{2\beta t^2}{(1+t^2-\alpha)(1+\beta^2 t^2)}=\frac{2\beta}{1-\beta^2(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{1+\beta^2 t^2}$$
$$-\frac{2(1-\alpha)\beta}{1-\beta^2(1-\alpha)}\,\frac{1}{1+t^2-\alpha}.$$

Poněvadž platí:

$$\int_\infty^0\frac{dt}{1+\beta^2 t^2}=-\frac{\pi}{2\beta},\qquad \int_\infty^0\frac{dt}{1+t^2-\alpha}=-\frac{\pi}{2\sqrt{1-\alpha}},$$

obdržíme z rovnice (3):

$$\frac{\partial J_1}{\partial\beta}=-\frac{\pi}{1-\beta^2(1-\alpha)}+\frac{\pi\beta\sqrt{1-\alpha}}{1-\beta^2(1-\alpha)}$$
$$=-\frac{\pi}{1+\beta\sqrt{1-\alpha}}.$$

Z této rovnice integrací plyne:

$$J_1=-\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}}\log\left(1+\beta\sqrt{1-\alpha}\right)+k.$$

Konstantu k určíme, položíme-li $\beta=0$; v případě tomto integrál (2) jest roven 0, a proto $k=0$.

Jest tedy:

$$\int_\infty^0\frac{\log(1+\beta^2 t^2)}{1+t^2-\alpha}\,dt=-\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}}\log\left(1+\beta\sqrt{1-\alpha}\right),$$

a pro $\beta=1$,

$$\int_\infty^0\frac{\log(1+t^2)}{1+t^2-\alpha}\,dt=-\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}}\log\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right).$$

Hodnota předloženého integrálu (1) jest tedy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin\varphi\,d\varphi}{a-b\sin^2\varphi}=-\frac{\pi}{2a\sqrt{1-\frac{b}{a}}}\log\left(1+\sqrt{1-\frac{b}{a}}\right).$$
