Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 4-5, 354--[376]

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123800

Řešení úloh.

a) Z mathematiky.

1.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x - 4\frac{y}{x} = y - 4\frac{x}{y} = a.$$

† Prof. *Rudolf Hruša.*

1. Řešení. Zaslal p. *A. Hyška,* stud. VII. r. v Praze VII.

Jest výhodno položiti $t = y/x$, čímž dané rovnice obdrží tvar

$$x - 4t = y - \frac{4}{t} = a.$$

Z rovnic těch plyne $x = a + 4t$, $y = a + \frac{4}{t}$

a tedy
$$\frac{y}{x} = t = \frac{a + \frac{4}{t}}{a + 4t}$$

Po snadné úpravě obdržíme pro t rovnici

$$4t^3 + at^2 - at - 4 = 0,$$

což je rovnice reciproká, s jedním kořenem 1, jejíž levou stranu lze rozložiti

$$(t - 1)\,(4t^2 + (a + 4)\,t + 4) = 0.$$

I dostáváme
$$t_1 = 1,\ t_{2,3} = \frac{-(a + 4) \pm \sqrt{(a - 4)\,(a + 12)}}{32}$$

kdež
$$t_2\,t_3 = 1.$$

I bude
$$x_1 = a + 4,\quad y_1 = a + 4$$
$$x_2 = a + 4t_2,\ y_2 = a + \frac{4}{t_2} = a + 4t_3$$
$$x_3 = a + 4t_3,\ y_3 = a + \frac{4}{t_3} = a + 4t_2$$

t. j.
$$x_{2,3} = \frac{4 - a \pm \sqrt{(a - 4)\,(a + 12)}}{8}$$
$$y_{2,3} = \frac{4 - a \mp \sqrt{(a - 4)\,(a + 12)}}{8}$$

Tyto kořeny budou reálné, při a reálném je-li $a \geqq 4$ neb $a \leqq -12$.

2. Řešení. Zaslala sl. *Miluše Jašková*, stud. VI. dívč. r. g. v Plzni.

Odstraníme-li jmenovatele obdržíme soustavu rovnic

$$1.)\ x^2 - 4y - ax = 0$$
$$2.)\ y^2 - 4x - ay = 0$$

a z nich odečtením

$$x^2 - y^2 + 4(x-y) - a(x-y) = 0$$

t. j. $$(x-y)(x+y+4-a) = 0.$$

Tomu lze vyhověti buď pro 3.) $x - y = 0$ neb pro 4.) $x + y + 4 - a = 0$.

Rovnice 3.) spojena s jednou z rovnic 1.), 2.) dává

$$x_1 = y_1 = a + 4.$$

(Hodnota $x = y = 0$ nemá pro rovnice předložené významu).

Rovnice 4.) pak podobně kořeny $x_{2,3}$, $y_{2,3}$.

Pan *Jan Rov* (VII. r. v Č. Budějovicích) poznamenává, že rovnice 1. 2. představují paraboly, jak vidno z toho, uvedeme-li je

na tvar
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 4\left(y + \frac{a^2}{16}\right)$$
$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 4\left(x + \frac{a^2}{16}\right),$$

tak že se jedná o určení průsečíku těchto dvou parabol.

2.

Jsou dána ohniska F_1, F_2 ellipsy resp. hyperboly a libovolný bod M na křivce, buďtež úhly $\alpha = \sphericalangle F_2F_1M$, $\beta = \sphericalangle F_1F_2M$; jest dokázati relace pro ellipsu a hyperbolu ($\varepsilon =$ num. excentricita.)

$$a)\ \varepsilon_E = \frac{1 - tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}}{1 + tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}}; \qquad b)\ \varepsilon_H = \frac{tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2} - tg\frac{\beta}{2}}.$$

Karel Lerl.

Řešení. Zaslal p. *A. Hyška*, VII. r. v Praze VII.

Pro ellipsu resp. hyperbolu platí $\overline{F_1M} \pm \overline{MF_2} = 2a$, $\overline{F_1F_2} = 2e$ dle rovnic Cagnoliových lze psáti pro ellipsu

$$\frac{\overline{F_1F_2}}{\overline{F_1M}+\overline{MF_2}}=\frac{e}{a}=\varepsilon=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\frac{1-tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}}{1+tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}},$$

pro hyperbolu

$$\frac{\overline{F_1F_2}}{\overline{F_1M}-\overline{MF_2}}=\frac{e}{a}=\varepsilon=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\frac{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}-tg\frac{\beta}{2}},$$

čímž uvedené vztahy jsou dokázány.

3.

V klínu rovinných zrcadel α, β nalézají se body A, B; jest vésti z bodu A na rovinu α paprsek tak, aby po úplném odrazu dopadal na rovinu β a zde odrážel se do bodu B.

Karel Lerl.

Řešení. Zaslal p. *Ant. Dvořák*, stud. VI. r. v Telči.

Paprsek odražený od roviny α musí procházeti bodem A' souměrně sdruženým podle roviny α s bodem A a paprsek dopadající na rovinu β musí podobně procházeti symmetricky položeným bodem B' podle roviny β s bodem B. Tudíž spojnice $A'B'$ určuje dráhu paprsku mezi oběma rovinami a průsečíky její s rovinami α, β body C resp. D jsou body dopadu. Dráha paprsku jest $ABCD$. Prochází-li spojnice $A'B'$ průsečnicí obou rovin zrcadel nebo neprotíná-li je vůbec, není žádaného řešení.

4.

Je-li ve čtyřúhelníku o stranách a, b, c, d a úhlopříčkách e, f, $\alpha+\gamma=R$, $\beta+\delta=3\,R$, pak platí vztah:

$$(a\,.\,c)^2+(b\,.\,d)^2=(e\,.\,f)^2.$$

Prof. *Ant. Lochmann.*

Řešení. Částečně dle p. *Vojtěcha Vikára*, stud. VIII. r. g. v Trenčíně.

Ze vztahů mezi úhly plyne $\cos \gamma = \sin \alpha$, $\cos \delta = - \sin \beta$. Rozložíme-li daný čtyřúhelník vždy ve dva trojúhelníky, obdržíme na základě věty cosinové

$$e^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \sin \alpha$$
$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 + 2cd \sin \beta.$$

Odtud lze určiti

$$1.)\ \sin \alpha = \frac{b^2 + c^2 - e^2}{2bc},\ \cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - e^2}{2ad}$$

$$2.)\ \sin \beta = -\frac{c^2 + d^2 - f^2}{2cd},\ \cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - f^2}{2ab}.$$

Na základě vztahů $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ dostaneme dvě rovnice, které lze snadným počtem uvésti na tvar

$$3.)\ De^4 - 2Ae^2 + BC = 0$$
$$4.)\ Bf^4 - 2Af^2 + CD = 0,$$

kdež kladeno $A = a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2$, $B = a^2b^2 + c^2d$, $C = a^2c^2 + d^2b^2$, $D = a^2d^2 + b^2c^2$.

První z těchto rovnic násobme f^2 a druhou e^2 a odečtěme I dostaneme

$$(e^2f^2 - C)\ (Bf^2 - De^2) = 0$$

odkudž plyne hledaný vztah:

$$e^2f^2 = C = a^2c^2 + b^2d^2$$

za předpokladu, že druhý činitel

$$Bf^2 - De^2 \neq 0.$$

Abychom to dokázali, budeme uvažovati plochu P čtyřúhelníku, která musí býti kladná.

I máme nejprvé

$$P = \triangle ABD + \triangle BCD = \tfrac{1}{2}\ (ad \sin \alpha + bc \cos \alpha)$$

a užijeme-li výrazů 1.), obdržíme

$$P = \frac{A - De^2}{4abcd} \text{ a ježto } P > 0, \text{ musí býti 5) } A > De^2.$$

Jest však též

$$P = \triangle ABC + \triangle CDA = \tfrac{1}{2}\ (ab \sin \beta - cd \cos \beta)$$

a pomocí 2.) podobně

$$P = \frac{Bf^2 - A^2}{4abcd} \text{ a tedy 6.) } Bf^2 > A.$$

Z 5.) a 6.) plyne pak $Bf^2 > De^2$.

Mimochodem uvádíme:

Z obou výrazů pro plochu P plyne vztah $De^2 + Bf^2 = 2A$.

Na základě nerovnic 5., 6. je z rovnic 3., 4. určeno e^2 a f^2 jednoznačně

$$e^2 = \frac{A - \sqrt{A^2 - BCD}}{D}, \quad f^2 = \frac{A + \sqrt{A^2 - BCD}}{B}.$$

$$P = \frac{\sqrt{A^2 - BCD}}{4abcd}.$$

5.

Které úhly vyhovují rovnici $\sqrt{3} = 4 \sin x - tg\, x$?

Prof. *Ant. Lochmann.*

Řešení. Zaslal p. *Bohumil Voženílek*, stud. VII. r. v Praze-II., Ječná ul.

Ježto $\sqrt{3} = tg\, 60^0$, lze psáti rovnici v tvaru

$$tg\, 60^0 + tg\, x = 4 \sin x.$$

Použijme vzorce $tg\,\alpha + tg\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$. Odstraníme-li zlomky, dostanem $\sin(60^0 + x) = 4 \sin x \cos x \cos 60^0$.

Jelikož $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, zjednoduší se rovnice na tvar $\sin(60^0 + x) = \sin 2x$.

Z toho plyne buď

$$2x = 60^0 + 360^0 . n$$

t. j.

$$x = 60^0 + 360^0 . n$$

neb

$$2x = 180^0 - (60^0 + x) + 360^0\, n$$

t. j.

$$3x = 120^0 + 360^0 . n$$

$$x = 40^0 + 120^0 . n$$

(n libovolné číslo celé).

V intervalu od 0^0 do 360^0 máme tedy řešení

$$40^0,\ 60^0,\ 160^0,\ 280^0.$$

Ostatní řešení pak dostaneme, připočteme-li k těmto libovolné násobky 360^0.

6.

Nalézti dvojciferné číslo, aby arithmetický průměr jeho číslic byl o 1 větší geometrického průměru těchto číslic.

Prof. *Ant. Lochmann.*

Řešení. Zaslal p. *Bohumil Voženílek*, stud. VIII. r. v Praze-II.

Číslice hledaného čísla buďtež x (první), y (druhá). Danou podmínku lze pak vyjádřiti rovnicí

$$\tfrac{1}{2}(x+y)-1=\sqrt{xy}$$

tedy $$x+y-2\sqrt{xy}=2,\text{ t. j. } (\sqrt{y}-\sqrt{x})^2=2\,,$$

Odtud $$\sqrt{y}-\sqrt{x}=\pm\sqrt{2},\ \sqrt{y}=\sqrt{x}\pm\sqrt{2}$$

$$y=x+2\pm2\sqrt{2x}.$$

Aby bylo y racionální, musí býti $\sqrt{2x}$ číslo racionální $=u$ t. j. $2x=u^2$. Z toho je viděti, že musí býti u sudé, $u=2v$, tedy $x=v^2$, kdež v je celé číslo ≥ 0.

Bude pak $y=2v^2+2+4v=2\,(v+1)$. Ježto má býti $1\leq x\leq 9$, obdržíme pro v podmínku $1\leq 2v^2\leq 9$, čemuž hoví jen $v=1, 2$.

Při $v=1$ dostáváme $x=2$, $y=0$ neb 8,
při $v=2$ dostáváme jen $x=8$, $y=2$.

Dané úloze vyhovují tedy čísla 20, 28, 82.

7.

Z plechového pásu o šířce a zhotoviti okap, aby jeho průřezem byly 1.) rovnoramenný trojúhelník, 2.) kruhová úseč maximálního obsahu.

Prof. *J. Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Vladimír Macků*, stud. VIIb I. st. r. v Brně.

1. Průřez okapu je rovnoramenný trojúhelník o ramenech $\frac{1}{2}a$. Označme x úhel rameny sevřený. Plocha toho trojúhelníku je tedy $\frac{1}{8}a^2\sin x$. Z průběhu funkce $\sin x$ ihned poznáváme, že maksimum nastane pro $x=\frac{\pi}{2}$, t. j. když je průřez trojúhelník pravoúhlý rovnoramenný.

2. Průřez okapu je úseč kruhová z kruhu o poloměru r a úhlu středovém x (v míře obloukové). Plocha té úseče je pak

$\frac{1}{2}r^2(x - \sin x)$, délka oblouku $a = rx$, tak že pro plochu úseče dostáváme $\frac{1}{2}a^2 \frac{x - \sin x}{x^2}$.

Nutno tedy uvažovati funkci $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^2}$ v intervallu $0 < x < 2\pi$. Zde je

$$f'(x) = \frac{2 \sin x - x(1 + \cos x)}{x^3} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}x (2 \sin \frac{1}{2}x - x \cos \frac{1}{2}x)}{x^3}$$
$$= \frac{2 \cos \frac{1}{2} x \varphi(x)}{x^3}$$

kdež klademe $\varphi(x) = 2 \sin \frac{1}{2} x - x \cos \frac{1}{2} x$.

Pro funkci $\varphi(x)$ máme $\varphi'(x) = \frac{1}{2} x \sin \frac{1}{2} x$, tedy $\varphi'(x) > 0$ pro $0 < x < 2\pi$, tak že $\varphi(x)$ v onom intervallu stále roste. Je pak $\varphi(0) = 0$, tedy v onom intervallu $\varphi(x) > 0$.

Může tedy $f'(x) = 0$ v intervallu $0 < x < 2\pi$ jen když $\cos \frac{1}{2} x = 0$, t. j. při $x = \pi$; při tom $\cos \frac{1}{2} x$ tedy i $f'(x)$ přechází od hodnot kladných k záporným, t. j. pro $0 < x < \pi$ funkce $f(x)$ roste, pro $\pi < x < 2\pi$ $f(x)$ klesá, tak že skutečně nastane maksimum. Okap pak má za průřez půlkružnici.

8.

Jaká musí býti základní hrana a výška čtyřbokého jehlanu přímého s pravidelnou základnou, aby jeho obsah byl maximální, je li dán jeho povrch P?

Prof. *J. Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *R. Řehák*, VIII. r. g. v Kolíně.

Obsah onoho jehlanu bude $V = \frac{1}{3} x^2 v$, kdež v je strana základny, v výška. Označme h výšku pobočné stěny, tak že $h = \sqrt{v^2 + (\frac{1}{2}x)^2}$. Pak je povrch jehlanu $P = x^2 + 2x h = x^2 + x\sqrt{4v^2 + x^2}$; odtud pak $v = \frac{\sqrt{P^2 - 2P x^2}}{2x}$, tak že $V = \frac{1}{6}\sqrt{P(Px^2 - 2x^4)}$. V nabude největší hodnoty, nabude-li výraz pod odmocninou $f(x) = Px^2 - 2x^4$ největší hodnoty. Zde je $f'(x) = 2Px - 8x^3 = 2x(P - 4x^2)$. Z kořenů rovnice $f'(x) = 0$, totiž $x = 0$, $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{P}$ má zde význam jen $x = \frac{1}{2}\sqrt{P}$. Ježto $f''(x) = 2P - 24x^2$ a $f''(\frac{1}{2}\sqrt{P}) < 0$ nastává skutečně maksimum. Pak je $v = \sqrt{\frac{1}{2}P}$, $h = \frac{3}{4}\sqrt{P}$, $V = \frac{\sqrt{2P^3}}{24}$.

9.

Nalezněte geom. místo středů rovnostranných trojúhelníků vepsaných do dané ellipsy nebo hyperboly. Podejte konstrukci takových trojúhelníků!

† Prof. *J. Pilnáček.*

Řešení. Zaslal p. *J. Kubelík,* VIII. r. v Čes. Budějovicích.

Uvažujme případ ellipsy:

Ellipsa (1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ protíná se s libovolnou kružnicí (2) $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ obecně ve 4 bodech, jichž souřadnice $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$, $(x_3\ y_3)$, $(x_4\ y_4)$ vyhovují současně rovnicím 1.) a 2.) Eliminací y dostaneme k určení x rovnici 4. stupně

$$a_0\,x^4+a_1\,x^3+a_2\,x^2+a_3\,x+a_4=0,$$

kdež $a_0=a^2-b^2,\ a_1=-4a^2p.$

Platí tedy pro součet kořenů této rovnice

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{a_1}{a_0}=\frac{4a^2}{a^2-b^2}\,p. \tag{3}$$

Podobně bychom našli

$$y_1+y_2+y_3+y_4=-\frac{4b^2}{a^2-b^2}\,q. \tag{4}$$

(Ostatně rovnici pro y a tento výraz lze nalézti z onoho při x zaměstnáme-li spolu p a q, a a b.)

Střed rovnostranného trojúhelníku je středem kružnice opsané a těžištěm. Označíme-li (p, q) souřadnice středu, r poloměr kružnice opsané trojúhelníku rovnostrannému, budou pro průsečíky kružnice opsané s ellipsou, z nichž tři $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$, $(x_3\ y_3)$ jsou právě vrcholy trojúhelníku, platiti rovnice 3.), 4.) a vedle toho, ježto střed je zároveň těžištěm

$$x_1+x_2+x_3=3p \tag{5}$$
$$y_1+y_2+y_3=3q \tag{6}$$

Z rovnice 3.) a 5.) plyne $3p+x_4=\frac{4a^2}{a^2-b^2}\,p$, tedy 7.) $x_4=\frac{a^2+3b^2}{a^2-a^2}\,p.$

Podobně ze 4.) a 6.) plyne 8.) $y_4=-\frac{3a^2+a^2}{a^2-b^2}\,q$. Ježto bod (x_4, y_4) leží na elipse, splňuje rovnici 1.). Tak dostaneme pro p, q rovnici $\left(\frac{a^2+3b^2}{a^2-a^2}\right)^2\frac{p^2}{a^2}+\left(\frac{3a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2\frac{q^2}{b^2}=1.$

Z toho vidíme, že geometrické místo středů (p, q) rovnostranných trojúhelníků vepsaných do ellipsy 1.) je zase ellipsa $\frac{p^2}{A^2} + \frac{q^2}{B^2} = 1$ o poloosách $A = \frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 + 3b^2}$, $B = \frac{b(a^2 - b^2)}{3a^2 + b^2}$.

Snadno lze dokázati, že při $a > b$ je též $A > B$.

Konstrukci oněch trojúhelníků rovnostranných lze provésti takto: Bod (x_4, y_4) leží na ellipse 1.), tak že lze klásti 9.) $x_4 = a \cos \delta$, $y_4 = b \sin \delta$. Ze 7.), 8.) plyne $x_4 = ap/A$, $y_4 = bq/B$, tak že 10.) $p = A \cos \delta$, $q = -A \sin \delta$.

Vyjdeme-li od δ, lze podle 9.) snadno najíti (x_4, y_4) a z 10.) p, q, odtud pak poloměr kružnice opsané. Její průseky s ellipsou jsou pak vrcholy trojúhelníku rovnostranného.

Případ hyperboly dostaneme, píšeme-li $-b^2$ místo b^2. Geometrickým místem středů (p, q) trojúhelníků rovnostranných vepsaných do hyperboly bude obecně hyperbola $\frac{p^2}{A^2} - \frac{q^2}{B^2} = 1$, kdež $A = \frac{a(a^2 + b^2)}{|a^2 - 3b^2|}$, $B = \frac{b(a^2 + b^2)}{|3a^2 - b^2|}$. Při $a^2 = 3b^2$, $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$ (úhel asymptot, v němž hyperbola leží je 60^0) bude oním geom. místem $q^2 = -B^2$, což je dvojice přímek imagirních $q = \pm i \frac{b}{2} = \pm i \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Při $b^2 = 3a^2$, $a = \sqrt{3}$ (úhel asymptot, v němž hyperbola leží je 120^0) bude oním geom. místem $p^2 = A^2$, $p = \pm \frac{a}{2}$, což je dvojice přímek rovnoběžných s osou y.

10.

V kružnici k, dán pravoúhlý $\triangle ABC$. Osa pravého úhlu při C stanoví na kružnici k, bod D. Spojnice BD sečě odvěsnu $\overline{AC}$ v bodě E. Kružnice k_2 opsaná z bodu D jako středu poloměrem $\overline{DE}$ určuje na odvěsně $\overline{AC}$ ještě bod G a na odvěně $\overline{BC}$ body F, H tak, že platí vztah:

$$\left(\frac{\overline{FE}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{GH}}{2}\right)^2 = \overline{DE}^2$$

Prof. *Eduard Pleva.*

Řešení. Zaslal p. *Jar. Slaný*, stud. VIII., I. č. st. r. v Plzni.

Řešme případ obecnější. Opišme z libovolného bodu D v rovině daného trojúhelníka pravoúhlého kružnici o libovolném poloměru a označme průsečíky její s odvěsnou $\overline{AC}$ E, G, s odvěsnou $\overline{BC}$ F a H a dokažme, že platí obecně $\overline{FC}^2 + \overline{GH}^2 = 4\overline{DE}^2$.

I mohou nastati dva případy:

1. Když E, G a F, H jsou na různých stranách vrcholu C, jest čtyřúhelník $E\,F\,G\,H$ tetivový, s uhlopříčkami k sobě kolmými, o němž předložená relace dokázána byla již ve XXVIII (XLIX) roč. »Přílohy« (úloha 12. od téhož autora).

2. Když E, G a F, H jsou na téže straně vrcholu C, jest čtyřúhelník $A\,G\,F\,H$ tetivový, se stranami $\overline{E\,G}$ a $\overline{F\,H}$ k sobě kolmými.

Veďme bodem D průměr $\overline{E\,M}$. Pak platí: $\overline{E\,H}^2 + \overline{H\,M}^2 = \overline{E\,F}^2 + \overline{F\,M}^2 = 4r^2$.

Poněvadž $F\,H \perp E\,G$ a $M\,G \perp E\,G$ jest $M\,G \parallel F\,H$ a proto $H\,M = F\,G$, $F\,M = G\,H$, načež $\overline{EH}^2 + \overline{FG}^2 = \overline{E\,F}^2 + \overline{GH}^2 = 4\overline{DE}^2$.

Případ třetí, aby $\overline{E, G}$ byly na téže straně a $\overline{F, H}$ na různých stranách vrcholu C a naopak, *není* možný.

Předložená úloha jest zvláštní případ prvního případu.

11.

Různoběžky a, b proťaty jsou třetí c, jež stanoví na a bod A a na b bod B. Libovolná příčka d, rovnoběžná s c protíná a v bodu A_1 b v bodu B_1. Jaké geom. místo určují průsečíky kružnic, opsaných nad průměry $\overline{AB_1}$, $\overline{A_1B}$?

Prof. *Eduard Pleva.*

Řešení. Zaslal p. *Jiří Kůst*, stud. VIII. r. g. v Domažlicích.

Průsečík různoběžek a, b budiž S. Kružnice opsaná nad průměrem AB_1 nechť protne přímku a v bodě Q a v bodě P. Protože $BP \parallel B_1\,Q \perp a$, platí:

$$\frac{SA}{SA_1} = \frac{AB}{A_1\,B_1}, \quad \frac{SP}{SQ} = \frac{PB}{QB_1}.$$

Z podobnosti $\triangle\, APB$ a $\triangle\, A_1QB_1$ plyne:

$$\frac{AB}{A_1\,B_1} = \frac{PB}{QB_1}.$$

Proto
$$\frac{SA}{SA_1} = \frac{SP}{SQ} \text{ čili } SA \,.\, SQ = SP \,.\, SA_1.$$

Tato rovnice značí, že bod S má stejnou mocnost k oběma kružnicím, čili, leží na jejich chordále. A poněvadž středná těch kružnic je rovnoběžná s přímkou C, jest jejich chordála kolmá na přímce C, tedy pevná pro všechny kružnice a jest tedy hledaným místem geometrickým.

Jiné řešení. Zaslal p. *V. Špaček*, stud. VII. r. v Hradci Králové.

Spusťme z bodu A kolmici na přímku b a označme její patu A_0. Kružnice nad průměrem AB_1 prochází pak bodem A_0. Pohybuje-li se tedy bod B_1 po přímce b, tvoří kružnice ty svazek kružnic procházejících body A A_0. Podobně tvoří kružnice nad průměrem A_1 B, pohybuje-li se A_1 po A svazek kružnic jdoucích body B B_0. Chordála libovolné kružnice jednoho svazku a jakékoliv kružnice druhého svazku prochází tedy průsečíkem přímek A A_0 a B B_0. Jde-li o kružnice v úloze uvažované, je jich cetrála $\parallel A\,B$, tedy chordála $\perp A\,B$ a tedy pevná. Tato přímka je pak hledaným místem geometrickým. Vedeme-li c průsečíkem S přímek a, b, (tak že A_1 i B_1 splyne s S), shledáme, že ono místo geometrické je kolmice spuštěná z bodu S na přímku c.

12.

Letos (r. 1920.) byla v únoru pětkrát neděle; v kterých letech tohoto století to bude opět.

R.

Řešení. Zaslal p. *Jan Rov*, stud. VII. r. v Č. Budějovicích.

V únoru 1920 byla pětkrát neděle. Tento případ může zase nastati, když únor má 29 dní, tedy v přestupném roce, a jen tehdy, když neděle připadne na prvního února.

Rok obyčejný má 365 dní, proto na totéž datum v lednu a počátkem února následujícího roku připadne jméno dne následujícího ($365 = 52.7 + 1$). Po roce přestupném nastane posunutí o dva dni, tak že ve čtyřletí obsahujíeím rok přestupný, tedy jistě uvnitř jednoho století, pět dní.

Po 2 čtyřletích nastane posunutí o 10 dní, t. j. ježto $10 = 7 + 3$, o 3 dni, po 3 čtyřletích o 8 dní, t. j. o 1; po 4 o 6; po 5 o 11, t. j. o 4; po 6 o 9, t. j. o 2, po 7 o 7 t. j. datum zůstane nezměněno. I vidím, že vrací se tytéž dni v týdnu na totéž datum v periodě 28 let, tak že bude v únoru pětkrát neděle v tomto století ještě v r. 1948 a 1976.

13.

Které je geom. místo středu podobnosti kruhů příslušných jednomu svazku s pevným kruhem jiným. Provésti diskussi

Prof. *J. Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Vladimír Macků*, stud. VIIb I. st. r. v Brně.

Svazek kružnic budiž definován body $(0, b)$, $(0, -b)$, jimiž všechny kružnice z něho pocházejí. Středy jich leží na ose x. Úsečka středu budiž u, tak že poloměr je $\sqrt{b^2+u^2}$. Pevná kružnice měj střed (p, q), poloměr r.

Jsou-li (x, y) soustřednice středu podobnosti (vnějšího neb vnitřního), platí pro ně

$$1.)\ \frac{y}{q} = \frac{x-u}{p-u} \qquad 2.)\ \frac{b^2+u^2}{r^2} = \frac{(x-u)^2+y^2}{(x-p)^2+(y-q^2)}.$$

Hledané geometrické místo dostaneme vyloučením u.

Z 1.) vypočteme $u = \dfrac{py-qx}{y-q}$ a dosadíme do 2.).

Po snadné úpravě obdržíme

$$3.)\ b^2(y-q)^2 + (py-qx)^2 = r^2y^2,$$

tak že hledané místo geometrické je křivka stupně druhého.

Rovnici její možno psáti ve tvaru

$$q^2x^2 - 2pqxy + (b^2+p^2-r^2)y^2 - 2b^2qy + b^2q^2 = 0.$$

I bude $\begin{vmatrix} q^2, & -pq, & 0 \\ -pq, & b^2+p^2-r^2, & -b^2q \\ 0, & -b^2q, & b^2q^2 \end{vmatrix} = -b^2q^4r^2,$

což bude $\neq 0$ pro $b \neq 0$, $q \neq 0$, $r \neq 0$. Jen v těchto případech obdržíme kuželosečky (nedegenerované).

Dále je $\begin{vmatrix} q^2, & -pq \\ -pq, & b^2+p^2-r^2 \end{vmatrix} = q^2(b^2-r^2),$

z čehož vidíme, že dostaneme pro $r > b$ hyperbolu, pro $r = b$ parabolu, pro $r < b$ ellipsu (a to vždy reálnou).

Možno však provésti diskussi na základě 3.). Odtud plyne

$$4.)\ qx = py \pm\sqrt{(r^2-b^2)\,y^2+2b^2qy-b^2q^2}.$$

Pro $q=0$ je ze 3. ihned plyne, že nedostaneme kuželosečku vlastní.

Uvažujme tedy dále případ, kdy $q = 0$.

Ve 4.) lze odmocnění provést, bude-li výraz pod odmocninou čtvercem lineární funkce, což nastane, bude-li diskriminant té kvadratické funkce $b^4 + b^2(r^2-b^2) = b^2r^2$ roven nulle. Pak se zase kuželosečka rozpadá.

Kuželosečku nedegenerovanou dostáváme tedy při $q \neq 0$, $r \neq 0$.

Také je snadno viděti, že při $r > b$ dostáváme hyperbolu (výraz pod odmocninou je pro dosti velké y kladný) při $r = b$ parabolu, při $r = b$ ellipsu.

14.

Do pevného kruhu vepsán lichoběžník s úhlopříčkami kolmými navzájem a s jedním pevným vrcholem. Které geom. místo opíše průsečík ramen a úhlopříček?

Prof. *J. Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Jar. Slaný*, stud. VII. tř. I. č. st. r. v Plzni.

Onen lichoběžník bude rovnoramenný.

V každém rovnoramenném lichoběžníku jest $\overline{AU} = \overline{BU}$, kde A, B, C, D jsou vrcholy a U průsečík úhlopříček onoho lichoběžníka. A poněvadž v našem případě jest ještě $\overline{AU} \perp \overline{BU}$, jest v trojúhelníku ABD stále obvodový úhel $ABU = 45^0$. Rameno $\overline{AD}$ jest tedy pro všechny možné lichoběžníky pevné (a rovné straně čtverce vepsaného do kružnice — neboť čtverec jest také zvláštní případ těchto lichoběžníků) a proto geometrickým místem průsečíků ramen jest *přímka* $\overline{AB}$.

Protože $\triangle AUD$ jest pravoúhlý, s pevnou přeponou, jest geom. místem průsečíků úhlopříček *kružnice* opsaná nad ramenem $\overline{AD}$ jakožto průměrem.

15.

Sečísti řady:

$$x \sin x + 2x^2 \sin 2x + 3x^3 \sin 3x + \ldots$$
$$x \cos x + 2x^2 \cos 2x + 3x^3 \cos 3x + \ldots$$

Dr *Josef Štěpánek.*

Řešení. Zaslal p. *Zdeněk Chládek*, kand. fil.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ konverguje patrně pro $|x| < 1$, tím spíš budou konvergovati řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n \sin nx$ a $\sum\limits_{1}^{\infty} nx^n \cos nx$ — označme je stručně Σ_1, Σ_2 — pro $-1 < x < 1$. Užijeme-li vzorců $\sin nx = \sin (n-1)x \cos x + \cos (n-1)x \sin x$, $\cos nx = \cos (n-1)x \cos x - \sin (n-1)x \sin x$ na jednotlivé členy našich řad. snadno odvodíme vztahy

$$1.)\ \Sigma_1 . (1 - x \cos x) - \Sigma_2 . x \sin x = S_1,$$
$$2.)\ \Sigma_1 . x \sin x + \Sigma_2 . (1 - x \cos x) = S_2,$$

kde $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin nx$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos nx$. Použijeme-li uvedených vzorců opětně na tyto řady získáme pro jich součty vztahy

$$S_1 (1 - x \cos x) - S_2 \,.\, x \sin x = x \sin x,$$
$$S_1\, x \sin x + S_2 (1 - x \cos x) = x \cos x.$$

Z nich obdržíme $S_1 = \dfrac{x \sin x}{1 - 2x \cos x + x^2}$, $S_2 = \dfrac{x \cos x - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2}$,

Z 1.) a 2.) plyne

$$\Sigma_1 = S_1 + 2S_1S_2 = \frac{x(1 - x^2) \sin x}{1 - 2x \cos x + x^2)^2},$$

$$\Sigma_2 = 1 - S_1^2 + S_2^2 = \frac{x[(1 + x^2) \cos x - 2x]}{(1 - 2x \cos x + x^2)^2}.$$

Známe-li součty řad S_1 a S_2 můžeme ku výpočtu součtů Σ_1 a Σ_2 použíti též vztahů

$$\frac{dS_1}{dx} = \frac{1}{x} \Sigma_2 - \Sigma_1, \quad \frac{dS_2}{dx} = \frac{1}{x} \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

jež snadno odvodíme.

Jiné řešení. Zaslal p. *Oldřich Burian*, stud. VII. tř. I. č. r. v Plzni.

Užijeme-li jako dříve označení Σ_1, Σ_2, bude

1.) $\Sigma = \Sigma_2 + i\, \Sigma_1 = xq + 2x^2q^2 + 3x^3q^3, \ldots\ldots$, kdež kladem $q = \cos x + i \sin x$. Jest totiž

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n = q^n.$$

Z 1.) plyne násobením xq.

2.) $\Sigma xq = x^2q^2 + 2x^3q^3 \,.\, 3x^4q^4 + \ldots$, odečtením pak 1.) a 2.)

$$\Sigma (1 - xq) = xq + x^2q^2 + x^3q^3 + \ldots = \frac{xq}{1 - xq}.$$

Je tedy $$\Sigma = \frac{xq}{(1 - xq)^2} = \frac{xq(1 - xq^{-1})^2}{[(1 - xq)(1 - xq^{-1})]^2}.$$

Jest však

$$(1 - xq)(1 - xq^{-1}) = 1 - x(q + q^{-1}) + x^2 = 1 - 2x \cos x + x^2$$
$$q(1 - xq^{-1})^2 = q - 2x + x^2q^{-1} =$$
$$= (1 + x^2) \cos x - 2x + i(1 - x^2) \sin x.$$

Jmenovatel v Σ je reálný, tak že lze ihned odděliti část reálnou od ryze imaginární a tak nalezti Σ_1 a Σ_2.

b) Z deskriptivní geometrie.

1.

Sestrojiti rotační paraboloid, daný dvěma body povrchu a osou a proložiti těmi body rovinu tak, aby paraboloid protínala v nejhezčí ellipse (aneb v ellipse o daném poměru os.)

Prof. *Ant. Božek.*

Řešení. Zaslal p. *Erlebach Jan,* stud. r. g. v Jilemnici.

Osa paraboloidu buď o a dané body A, B. Bod B otočme kol o do roviny určené osou o a bodem A a dostaneme bod B'. Osou o a body A, B' určena nyní parabola, jejíž rotací vznikne hledaný paraboloid.

Parabolu z osy o a bodů A, B' možno sestrojiti různě. Sestrojme body A_1, B'_1 souměrné k A a B' dle osy o. Dle věty Pascalovy možno sestrojiti v bodě A tečnu, ježto známe pět bodů paraboly A, B', B'_1, A_1 a úběžný bod osy o.

Jednodušeji lze postupovati následovně: Spojnice $\overline{AB'}$ seče o v bodě P a spojnice $\overline{AB'_1}$ seče ji v bodě P_1 i jsou ty body harmonické vzhledem k parabole a proto vrchol V půlí vzdálenost $\overline{PP_1}$. Z tohoto snadno určíme tečnu a ohnisko.

Jiné řešení této úlohy analyt. geometrií podal p. *Jan Nechutný,* z I. reálky v Plzni.

Má-li rovina ϱ procházející body A, B protínati paraboloid v ellipse o daném poměru os $\frac{a}{b}$ musí rovina ta svírati s rovinou kolmou k o úhel α, pro nějž $\cos\alpha = \frac{b}{a}$, ježto průmětem ellipsy na rovinu kolmou k o je kružnice o poloměru b. Takové roviny jdou spojnicí $\overline{AB}$ obecně dvě. Kdyby ellipsa průsečná měla býti nejhezčí, musilo by $a^2 = 2b^2$ a tedy $\alpha = 45^0$.

2.

Sestrojiti rotační paraboloid, dány-li tři body povrchu a vrcholová rovina tečná (na př. půdorysna π.)

Dr *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal p. *J. Kubelík,* stud. VII. tř. reál. v Čes. Budějovicích.

Buďtež A, B, C body dané na povrchu paraboloidu a π vrcholová rovina tečná. Průsek roviny $\varrho \equiv (ABC)$ s paraboloidem je ellipsa e, jež se do π promítá kolmo jako kružnice e_1. Rovina $\sigma \perp \varrho$

procházející středem ellipsy e protíná tuto v bodech D a E a plochu v meridiánu parabolickém určeném body D, E a vrcholovou tečnu p^σ. Analyticky dá se snadno dokázati, že geom. místem ohnisek parabol procházejících daným bodem na př. D a mající společnou tečnu p^σ je opět parabola, jejímž ohniskem je bod D a vrcholová tečna p^σ. Ježto stejně pro E dostaneme parabolu je v jich průsečíku ohnisko meridiánu, patrně úloha dvojznačná.

Jinak možno určiti vrcholy V a ${}^1V$ dvou parabol jdoucích body D a E a mající v p^σ vrcholovou tečnu tím, že určíme průsečík P spojnice $\overline{DE}$ s p^σ a tu je $\overline{PV}^2 = \overline{P^1V}^2 = \overline{PD}\ \overline{PE}$. Viz ku př. v XLVIII. roč. t. čas. od Dr. V. Jarolímka: »Čtyři úlohy o parabole«. Tento vztah prostorovou úvahou dokazuje p. A. Hyška, stud. VII. tř. reál. v Praze-VII. následovně: Z průsečíku P spojnice $\overline{DE}$ s vrcholovou tečnou p^σ opišme hledanému paraboloidu kužel, tu bude se tohoto dotýkati podél ellipsy k, jež patrně jde vrcholem paraboloidu V a jež se bude do π promítati jako kružnice k_1 o středu P a poloměru, jenž se rovná délce tečny z P ku kružnici e_1, jež je půdorysem dříve určené ellipsy e. Úloha patrně dvojznačná.

3.

Sestrojte klenec, který jest dán nejdelší úhlopříčkou $\overline{AG}$, aby jeho hrana $\overline{AB}$ svírala s půdorysnou úhel α a s nárysnou úhel β.

Prof. *J. Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Vojtech Vikár*, st. r. g. v Trenčíně.

Polohu strany $\overline{AB}$ dostaneme jako průsek kuželových ploch o společném vrcholu A takých, že jedna má odchylku α od rov. π, druhá β od rov. γ. Úloha je možná, jen když $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

Klenec určený nejdelší úhlopříčkou $\overline{AC}$ a polohou strany $\overline{AB}$ sestrojíme takto: Středem S úsečky $\overline{AC}$ vedeme rov. ϱ kolmou na AC. Vyhledáme průsečný bod $R_1 \equiv [\overline{AB}\, x\, \varrho]$ a sestrojíme pravidelný šestiúhelník v rov. ϱ daný vrcholem R_1 a středem S $[R_1 R_2 \ldots R_6]$. Průsečný bod $B \equiv [\overline{AR_1}\, x$ rov. $R_6 R_2 G]$ je vrcholem klence; též $C \equiv [\overline{GR_2}\, x$ rov. $R_1 R_3 A]$ i ostatní vrcholy dostaneme podobným způsobem.

Jiné řešení klence podal p. *Slaný Jar*, stud. I. r. v Plzni.

V jedné třetině úhlopříčky AC sestrojme rovinu ϱ kolmou k $\overline{AC}$, v níž jsou vrcholy B, D, E klence, tvoříce rovnostranný trojúhelník se středem v úhlopříčce $\overline{AC}$. Na základě rovnoběžnosti hran doplníme snadno klenec.

c) Z fysiky.

1.

Soustava tří spojných čoček, jež lze považovati za nekonečně tenké, má krajní čočky s ohniskovými vzdálenostmi f_1 a f_3 ve stálé vzájemné vzdálenoti D. Kam mezi ně se musí vložiti čočka f_2, aby soustava nabyla optické mohutnosti nejmenší a které?

Prof. *J. Schuster.*

Řešení z části dle *Miloslava Nekoly*, stud. VII. tř. I. čes. st. r. v Plzni.

Mezeru mezi obrazovým ohniskem F'_1 a předmětovým F_2 označme x, podobně buď $\overline{F'_2 F_3} = y$, tak že

$$x + y = D - f_1 - 2f_2 - f_3. \qquad (1)$$

Ohnisko F_1 má obraz druhou čočkou vytvořený F''_2, tudíž je-li obraz tohoto U ve třetí čočce od F'_3 vzdálen o u, platí

$$u y = f_3^2 \qquad (2)$$

a body F_1 a U jsou sdružené.

Dopadá-li na první čočku paprsek rovnoběžný s osou, vytvoří se druhou čočkou obraz Z, vzdálený o z od F'_2, tak, že

$$x z = f_2^2, \qquad (3)$$

a tento vytvoří v třetí čočce obraz V, od F'_3 vzdálený o v dle vztahu

$$(y - z) v = f_3^2,$$

z něhož dle (3)

$$v = \frac{f_3^2 x}{x y - f_2^2}.$$

Paprsek, který dopadne rovnoběžně s osou na třetí čočku, vytvoří obraz W, vzdálený od F_1 o

$$w = \frac{f_1^2 y}{x y - f_2^2}.$$

Ohnisková dálka celé soustavy se obdrží ze součinu úseček $\overline{F_1 W} \cdot \overline{U . V}$ neboli

$$F^2 = \frac{f_1^2 y}{x y - f_2^2}\left(\frac{f_3^2 x}{x y - f_2^2} - \frac{f_3^2}{y}\right)^2,$$

z čehož po jednoduché úpravě

$$\frac{1}{F^2} = \frac{(x y - f_2^2)^2}{f_1^2 f_2^2 f_3^2};$$

a ježto je system obecně kollektivní,

$$\frac{1}{F}=\frac{xy-f_2^2}{f_1 f_2 f_3}. \tag{4}$$

Extremum tohoto výrazu závisí na hodnotě xy, jejíž činitelé mají dle (1) stálý součet. Jde tedy o extremní obsah obdélníka při daném obvodu, jenž je maximem pro

$$x=y=\frac{D-f_2-f_3}{2}-f_2.$$

Střed vzdálenosti obou vnitřních ohnisek F'_1 a F_2 odpovídá tedy maximu, jež tím přirozeně hodnotou f_2 co do polohy není určeno a má hodnotu:

$$\frac{1}{F}=\frac{(D-f_1-f_3)(D-f_1-f_3-4f_2)}{4f_1 f_2 f_3}.$$

Z toho plyne dále, že minima mohutnosti vzniknou, když se druhá čočka přiloží buďto k první nebo třetí, při čemž jest

$$x=-(f_1+f_2), \text{ resp. } y=-(f_3+f_2)$$

a pak

$$\frac{1}{F'}=-\frac{D(f_1+f_2)-f_2 f_3-f_3 f_1-f_1 f_2}{f_1 f_2 f_3},$$

resp.

$$\frac{1}{F''}=-\frac{D(f_3+f_2)-f_2 f_3-f_3 f_1-f_1 f_2}{f_1 f_2 f_3}.$$

Ovšem nejsou to minima odpovídající nullovým prvním derivacím, nýbrž nejmenší hodnoty daného intervallu.

Ostatně ve specielním případě, kdy $xy=f_2^2$, má system týž účinek co deska planparallelní. Je to zároveň bod, kde přechází system z kollektivnosti v dispersivnost.

2.

Na přístroji Feilitzschově mějte trubice nade rtutí objemy a a b, jsouce otevřeny. Pak obě vzduchotěsně uzavřeme a zdvihejme rameno B. Jak souvisí stoupání rtuti v rameni A na tomto zdvihání ramene B, předpokládáme-li, že celý děj jest dostatečně pomalý, aby byl isothermický?

Prof. *J. Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Jar. Slaný*, stud. VII. tř. I. čes. st. r. v Plzni.

Zdvižení ramene B o x zvýší hladinu v A o y, tak že objem trubice A je pak $a-y$ a následkem stálého úhrnného objemu rozepne se vzduch v B na objem $b + y$, při čemž rozdíl hladin činí $x - 2y$, neboť stoupnutí rtuti v B je jen $x - y$.

Byl-li p původní tlak vzduchu v cm Hg, je nyní tlak v A $p\dfrac{a}{a-y}$, v B pak $p\dfrac{b}{b+y}$, a jejich rozdíl dán rozdílem sloupců, tedy

$$p\left(\frac{a}{a-y} - \frac{b}{b+y}\right) = x - 2y,$$

nebo

$$x = y\left\{\frac{p\,(a+b)}{(a-y)\,(b+y)} + 2\right\},$$

což je hledaný vztah.

3.

Co nastane spojíme-li velmi úzkou trubičkou kulovou bublinu z mydlinek poloměru R s druhou poloměru $r < R$? Jak bychom mohli z měření přetlaku uvnitř bubliny určiti povrchové napětí mydlinkové vody?

Prof. *J. Schuster.*

Řešení.

a) Přetlak uvnitř bubliny je roven $\dfrac{4F}{R}$, je-li F povrchové napětí, je tedy v menší bublině větší a nastane proud vzduchu do větší bubliny, jejíž konečný poloměr x se pak určí z rovnosti množství vzduchu.

Je-li σ hustota vzduchu za tlaku barometrického p, je hustota jeho uvnitř bubliny $\sigma\left\{1 + \dfrac{4F}{pR}\right\}$ a celé množství se určí znásobením objemem $\dfrac{4\pi}{3}R^3$. To vede k rovnici

$$R^3 + r^3 + \frac{4F}{p}(R^2 + r^2) = x^3 + \frac{4F}{p}x^2.$$

Ta dovoluje z daného F počítati x, nebo měřením x (na př. promítne-li se pokus na stínítko z obloukové lampy a spočítají-li se z měřených rozměrů stínů poloměry bublin) naopak určiti F. Ježto však je poměr $\dfrac{4F}{p}$ řádu $3{\cdot}2.10^{-4}$, smíme řešiti horní rovnici přibližně tak, že za x^2 na pravo dosadíme $(R^3 + r^3)^{\frac{2}{3}}$, což dá:

$$x^3 = R^3 + r^3 + \frac{4F}{p}\left\{R^2 + r^2 - (R^3 + r^3)^{\frac{2}{3}}\right\}$$

Naopak F dáno linearně.

b) Kdybychom dvě bubliny spojili s rameny spojitých nádob, dal by přetlak $\triangle p$ k určení napětí F rovnici:

$$\triangle p = 4F\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

4.

Různost specifických tepel pro dvě látky se ukazuje differenciálním thermoskopem tak, že dva stejně těžké kusy různých kovů zahřáté ve vodní lázni na 100° C ponoříme do dvou nádobek, které obsahují stejná množství 15° C vody. Kolik vody třeba vzíti, aby rozdíl mezi olovem a mědí se jevil nejnápadněji?

(Spec. teplo mědi $C_1 = 0{\cdot}093$, olova $C_2 = 0{\cdot}031$).

Dr. *Marian Haas.*

Řešil *Jos. Slaný,* stud. VII. tř. I. čes. st. r. v Plzni.

Buď M hmota každého kovu, x množství vody. Dle směšovacího zákona je výsledná teplota

$$t_1 = \frac{100\,MC_1 + 15x}{x + MC_1} = 15 + 85\,\frac{MC_1}{x + MC_1},$$

resp.

$$t_2 = 15 + 85\,\frac{MC_2}{x + MC_2}.$$

Vyšetřuje se rozdíl obou veličin, jehož derivace dá po annulování:

$$C_2\,(x + MC_1)^2 = C_1\,(x + MC_2)^2,$$

z čehož po vyloučení záporného kořenu

$$x = M\sqrt{C_1 . C_2}.$$

Pro měď a olovo obdržíme:

$$x = M\sqrt{0{\cdot}093 . 0{\cdot}031} = M . 0{\cdot}0537.$$

Rozdíl teplot je pak:

$$y = 85 . \frac{\sqrt{C_1} - \sqrt{C_2}}{\sqrt{C_1} + \sqrt{C_2}} = 85 . \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 85\,(2 - \sqrt{3}) \doteq 22^{\circ}{\cdot}8\ C.$$

5.

Po střeše délky s a sklonu α k horizontále valí se bez smykání plná koule poloměru R. Jaká jest její další dráha při pádu se střechy (volném) s výšky h? V jaké vzdálenosti od domu dopadne na horizontální půdu?

Jak by tomu bylo, kdybychom kouli nahradili plným válcem téže hmoty M?

Moment setrvačnosti koule o poloměru R jest $^2/_5\, MR^2$, válce o poloměru r pak $^1/_2 Mr^2$.

R.

Řešení. Zaslal p. *Jar. Slaný*, stud. VII. tř. I. čes. st. r. v Plzni.

Nehledí-li se ke tření a odporu vzduchu, je práce, vykonaná při pádu podél střechy, rovna součtu energie postupního a rotačního pohybu, tak že následkem vztahu $v = R w$, je-li $k\,R$ poloměr setrvačnosti, platí

$$2g\, s \sin\alpha = v^2 (1 + k^2),$$

z čehož

$$v = \sqrt{\frac{2g\, s \sin\alpha}{1 + k^2}}.$$

Pro kouli je $\dfrac{2}{1 + k^2} = \dfrac{10}{7}$, pro válec $\dfrac{4}{3}$.

Čítáme-li pak y dolů kladně, platí pro další dráhu

$$y = v\, t \sin\alpha + \tfrac{1}{2} g\, t^2 \qquad x = v\, t \cos\alpha,$$

a rovnice její zní:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha + \frac{g x^2}{2v^2 \cos^2\alpha},$$

což je parabola o parametru $p = \dfrac{v^2 \cos^2\alpha}{g}$, s vrcholem v bodě

$$\left(-\frac{v^2}{2g}\sin^2\alpha,\ -\frac{v^2}{2g}\sin^2\alpha\right).$$

Ve hloubce h dopadne těleso ve vzdálenosti horizontální

$$d = v\cos\alpha\, \frac{-v\sin\alpha + \sqrt{g\, v^2 \sin^2\alpha + 2g\, h}}{g}.$$

Seznam řešitelů úloh.

Pánové: *Václav Bok*, stud. z Chotěboře, m.: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14; *A. Borecký* z Červ. Újezdu, m.: 1, 2, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 14; *Oldřich Burian*, stud. VII. r. v Plzni, m.: 1—15, d.: 1—3; *Josef Cenek*, stud. VII. *a* r. v Brně, m.: 1, 6, 7, 8, 11, 12; *Jan Čáp*, stud. VII. r. g. v Pelhřimově, m.: 12; *Bohumil Danzer*, stud. VIII. r. g. v Kolíně, m.: 2, 3, 6, 8, 10, 12, 13, 14; *Josef Doubek*, stud. VIII. r. g. v Litovli, m.: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12; *Arnošt Dvořák*, stud. VI. r. v Telči, m.: 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 14; *Vladimír Emmer*, stud. VI. r. v Hradci Králové, m.: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 14; *Jan Erlebach*, stud. r. g. v Jilemnici, d: 1—3; *Emil Fišer*, stud. VII. r. v Plzni, m.: 2, 3, 5—8, 10, 12, 14; *B. Helán*, stud. VII. II. r. v Brně, m.: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12; *A. Hyška*, stud. VII. r. v Praze VII., m.: 1—8, 10—15, d.: 1—3, f.; 1, 2, 4; *Zdeněk Chládek*, kand. inž. a fil., m.: 5, 6, 15; *Leopold Janoušek*, stud. VI. *a* r. v Lounech, d.: 1, 2, 3; slečna *Miluše Jašková*, stud. VI. r. g. v Plzni, m.: 1—8, 10, 12; pánové: *Pavel Jelen*, stud. VII. r. v Novém Bydžově, m.: 2, 5, 6, 12; *Adolf Jukal*, stud. IV. roč. učit. ústavu v Brně, m.: 1, 6, 7, 8; *Arnošt Jurečka*, stud. VI. r. v Lipníku, m.: 1, 5, 7, 8, 10, 12; *Josef Kotyk*, stud. VI. r. v Nové Pace, m.: 1, 6; *František Křeček*, stud. r. v Plzni, m.: 1, 3, 6; *Jaroslav Lev Kubelík*, stud. VII. r. v Č. Budějovicích, m.: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, d.: 1, 2, 3, f.: 1, 2, 3, 4, 5; *Jiří Kůst*, stud. VIII. r. g. v Domažlicích, m.: 1—8, 10—15, d.: 1—3, f.: 4, 5; *E. Lášek*, stud. VII. r. v Praze III., m.: 1, 2, 3, 5—8, 10—15, d.: 1—3; *Vladimír Macků*, stud. VII. r. I. stát. r. v Brně, m.: 1—15; *Vojtěch Magnusek*, stud. VIII. r. g. v Nitře na Slovensku, m.: 1, 2; slečna *Eugenie Maternová*, stud. VII. r. g. na Král. Vinohradech, m.: 1—8, 10, 12; f.: 1—5; pánové: *Jaroslav Miksch*, stud. VI. *b* r. v Brně, d.: 1, 3; *Jan Mikulíček*, stud. VIII. g. v Přerově, m.: 1, 2, 3, 6; *Vladimír Najman*, stud. VII. r. v Plzni, m.: 1, 2, 3, 5—8, 10, 11, 13, 14, d.: 1—3, f.: 2, 3, 4, 5; *Jan Nechutný*, stud. VII. r. v Plzni, m.: 1—8, 10—15, d.: 1—3; *Miloslav Nekola*, stud. VII. r. v Plzni, m.: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10—15, d.: 1—3, f.: 1—5; *František Novotný*, stud. VI. g. ve Vysokém Mýtě, m.: 7, 8, 12; *Josef Pavel*, stud. VII. r. v Plzni, m.: 1—3, 5—8, 10—14, d.: 1—3; *Ol. Pechman*, stud. VII. r. v Plzni, m.: 1—10, 12, 15; *Jan Proněk*, stud. VIII. g. v Hradci Králové, m.: 1, 2, 5, 6, 7, 8, 12; *František Rieger*, stud. VII. *b* r. v Praze III, m.: 6; *Jan Rov*, stud. VII. r. v Č. Budějovicích, m.: 1, 2, 4—9, 12—15, d.: 1—3, f.: 1—5; *Rudolf Rychlý*, stud. v Čachotíně, m.: 1—3, 5—7*a*, 8, 10, 11, 12, 14; *Rudolf Řehák*, stud. VIII. r. g. v Kolíně, m.: 2, 4, 7*a*, 8, 10, 12, 14; *V. Santholzer*, stud. VII. r.

v Pardubicích, m.: 1—3, 5, 7, 8, 11, 13, 14, d.: 1, 2, f.: 1, 5; *Jaroslav Slaný*, stud. VII. r. v Plzni, m.: 1—8, 10—15, d.: 1—3, f.: 1—5; *V. Smolař*, stud. VIII. r. g. v Brandýse n./L., m.: 1—14; *Ladislav Suchánek*, stud. VII. r. v Ml. Boleslavi, m.: 1, 5, 6, 8, 10, d.: 2;

Ol. Špaček, stud. ze Smiřic, m.: 1—15, d.: 1—3; *Josef Tikal*, stud. VI. r. v Novém Městě na Moravě, m.: 1, 6, 12; *František Vávra*, stud. VII. r. ve Vel. Meziříčí, m.: 1, 3, 5, 6, 7, 10, 14; *Vojtěch Vikár*, stud. VII. r. g. v Trenčíně na Slovensku, m.: 1—8, 10—14, d.: 1—3, f.: 1—5; *Jan Vokas*, stud. VI. g. Vysoké Mýto, m.: 6, 12; *Bohumil Voženílek*, stud. VII. r. v Praze v Ječné ul., m.: 1, 5, 6, 7, 8, 12; *Bohuslav Weidner*, stud. IV. g. v Hradci Králové, m.: 1—3, 5, 7, 8, 14; *František Zivný*, stud. VIII. r. g. v Náchodě, m.: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12.

Udělení cen.

Redakce úloh, přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, přisoudila těmto řešitelům ceny, vypsané výborem »Jednoty českých mathematiků a fysiků.«

Z mathematiky:

Ceny první. Pánové: *Oldřich Burian*, stud. VII. I. r. v Plzni. *A. Hyška*, stud. VII. r. v Praze VII. — *Vladimír Macků*, stud. VIIb I. r. v Brně. — *Jar. Slaný*, stud. VII. I. r. v Plzni. — *Ol. Špaček*, stud. Smiřice 203.

Ceny druhé. Pánové: *Jaroslav Lev Kubelík*, stud. VII. r. v Čes. Budějovicích. — *Jiří Kůst*, stud. VIII. r. g. v Domažlicích. *E. Lášek*, stud. VII. r. v Praze III. — *Jan Nechutný*, stud. VII. I. r. v Plzni. — *Miloslav Nekola*, stud. VII. I. r. v Plzni. — *Jan Rov*, stud. VII. r. v Čes. Budějovicích. — *V. Smolař*, stud. VIII. r. g. v Brandýse n. L. — *Vojtech Vikár*, stud. VIII. r. g. v Trenčíně.

Z deskriptivní geometrie.

Ceny první. Pánové: *Jan Erlebach*, stud. r. g. v Jilemnici. *A. Hyška*, stud. VII. r. v Praze VII. — *Oldřich Burian*, stud. I. r. v Plzni.

Ceny druhé. Pánové: *Jar. Slaný*, I. r. v Plzni. — *Jan Rov*, VII. r. v Čes. Budějovicích. — *Jan Nechutný*, I. r. v Plzni.

Z fysiky:

Ceny obdrží: Pánové: *Jar. Slaný*, *Mil. Nekola*, *J. Kubelík*, *Jan Rov.*

Z fondu Jaromíra Mareše:

Ceny obdrží: Pánové: *Jar. Lev Kubelík*, z VII. r. v Čes. Budějovicích. — *Vladimír Macků*, z I. r. v Brně.