O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru.[1]

Dr. Eduard Čech.

I. O charakteristické trilinearitě elementu prostorové křivky.

1. Uvažujme nejprve *rovinnou* čáru c, danou v okolí bodu O $(0, 0, 1)$ rovnicí:

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{p_2}{2}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + \frac{p_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^3 + \dots \qquad (1)$$

Předpokládejme, že tečna t $(x_2 = o)$ v bodě O má s c pouze styk prvého řádu, tedy $p_2 \neq o$. Kuželosečky

$$3p_2^2 x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2p_3 x_1 x_2 - 6p_2 x_2 x_3 = 0 \qquad (2)$$

mají v O, jak snadno shledáme, styk třetího řádu s c. Polára bodu (x_1, x_2, x_3) vzhl. ke (2) má souřadnice

$$u_1 : u_2 : u_3 = (3p_2^2 x_1 + p_3 x_2) : (p_3 x_1 + \lambda x_2 - 3p_2 x_3) : -3p_2 x_2.$$

Body na t, a jen ony, mají vzhledem ke všem křivkám (2) tutéž poláru

$$x_2 = u_3 = 0, \; u_1 : u_2 = 3p_2^2 x_1 : (p_3 x_1 - 3p_2 x_3). \qquad (3)$$

Projektivita (3) mezi řadou bodovou na t a svazkem přímek o středu O stanoví úplně element třetího řádu čáry c. Nazveme ji *polaritou vzhledem k elementu c.*[2]) Každá nedegenerovaná

---

[1]) Toto pojednání obsahuje nejdůležitější výsledky stejnojmenné práce, poctěné jubilejní cenou Král. Společnosti Nauk, které za dnešních poměrů tiskových není možno vydati. Prameny několika známých již věcí, kterých pro souvislost nebylo možno vypustiti, udány jsou v textu. Konstruktivní aplikace, které namnoze samy se nabízejí, nejsou zde zásadně provedeny, ježto obyčejně jest mnoho možností, jednak o tom, co považovati za dané a hledané, jednak v modalitách provedení. Naproti tomu bral jsem všude zřetel k tomu, abych teorii podal tak daleko, aby možnost provedení konstrukcí byla patrna. P. red. Čas. projevuji vřelý dík za laskavou ochotu, jež umožnila uveřejnění aspoň v této formě.

[2]) Jest to tedy na snadě jsoucí zobecnění Transonovy deviační osy (A. Transon, Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces. I. d. Liouville, VI., 1841).

projektivita mezi řadou bodů na t a svazkem přímek o středu O, v níž bodu O přísluší přímka t, jest polarita vzhledem k elementu křivky, dotýkající se t v O a nemající zde inflexi. Korelativně můžeme definovati polaritu vzhledem k elementu kužele.

Následujícím způsobem dojdeme k téže příbuznosti: Buď O libovolný bod na c blízký k O, t' tečna k c v O'; přiřaďme bodu (tt') na t přímku OO' svazku O. Dospějeme takto k jisté korespondenci mezi řadou bodů na t a svazkem přímek bodem O, v níž bodu O odpovídá přímka t. Ona projektivita mezi řadou t a svazkem O, v níž bodu O a dvěma soumezným odpovídají tytéž přímky jako v této korespondenci, jest polarita vzhledem k elementu c. Důkaz přenechávám čtenáři.

Jest patrno, že i když uvažovaná větev křivky není prvého řádu i třídy, možno jí stejně přiřaditi algebraickou korespondenci mezi řadou t a svazkem O, ovšem ne jednoznačnou.

2. Uvažujme nyní *prostorovou* křivku C, jdoucí bodem O $(0, 0, 0, 1)$, mající zde za tečnu přímku t a za oskulační rovinu ω $(x_3 = 0)$. Rovnice C jsou tvaru

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{x_4} &= \frac{p_2}{2}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2 + \frac{p_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + \dots, \\ \frac{x_3}{x_4} &= \frac{q_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + \frac{q_4}{24}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^4 + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

Budeme předpokládati, že ani t ani ω nejsou stacionární, tedy $p_2 q_3 \neq 0$.

Promítněme C s libovolného bodu (y_1, y_2, y_3, y_4) do ω. Rovnice průmětu jest

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{p_2}{2}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2 + \frac{p_3 y_3 - q_3 y_2}{6 y_3}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + \dots \tag{5}$$

Odtud vidíme především, že průměty se všech bodů tečné roviny $x_2 y_3 - x_3 y_2 = 0$ mají mezi sebou styk třetího řádu. Pro polaritu vzhledem k jich elementu obdržíme, bereme-li ξ za parametr bodu $(\xi, 0, 0, 1)$ na t a η za parametr přímky $x_3 = \eta x_1 + x_2 = 0$, rovnici

$$\frac{3p_2}{\xi} + \frac{3p_2^2}{\eta} + \frac{q_3 y_2}{y_3} - p_3 = 0.$$

Povšimneme-li se, že v této rovnici také $\frac{y_2}{y_3}$ vyskytuje se lineárně, máme tuto *větu*: Buďte O, t, ω resp. bod, tečna, oskulační rovina prostorové křivky C. Je-li ϱ kterákoli rovina svasku t, R kterýkoli bod na t, a r polára R vzhledem k elementu projekce C do ω s libovolného bodu na ϱ, jest ϱ, r, R trojina parabolické [1]) trilinearity o singulární trojici O, t, ω; tuto trilinearitu budeme nazývati *charakteristickou trilinearitou elementu* C. Jsou-li (4) rovnice C, a bereme-li (zde i v delším) ξ za parametr bodu $(\xi, 0, 0, 1)$, η za parametr přímky $x_3 = \eta x_1 + x_2 = 0$, a ζ za parametr roviny $\zeta x_2 - x_3 = 0$, jest rovnice char. trilinearity

$$\frac{3p_2}{\xi} + \frac{3p_2^2}{\eta} + \frac{q_3}{\zeta} - p_3 = 0. \tag{6}$$

Každá nedegenerovaná parabolická trilinearita meze řadou t, svazkem (O, ω) a svazkem t o singulární trojici O, t, ω jest char. trilinearitou elementu křivky regulární v souřadnicích bodových, přímkových i rovinových. Korelatívně definujeme jako *char. trilinearitu elementu rozvinutelné* plochy

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_3} &= \frac{\pi_2}{2}\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^2 + \frac{\pi_3}{6}\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^3 + \dots, \\ \frac{u_4}{u_3} &= \frac{\varkappa_3}{6}\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^3 + \frac{\varkappa_4}{24}\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^4 + \dots \end{aligned} \tag{7}$$

trilinearitu

$$\frac{\varkappa_3}{\xi} + \frac{3\pi_2^2}{\eta} + \frac{3\pi_2}{\zeta} + \pi_3 = 0. \tag{8}$$

[1]) Tento zvláštní případ příbuznosti trilineární, že v každém ze tří útvarů oba prvky, jimž přísluše jí degenerované projektivity mezi druhými dvěma útvary, splynou v jediný (tyto tři prvky tvoří pak t. zv. singulární trojici) uvažoval asi poprvé Schubert v poj. „Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Gebilden“ (Math. Ann., sv. 17, 1880). Schubert nazývá jej „singuläre Trilinearität“; týž název podržuje na př. London „Zur Theorie der trilinearen Verwandschaft dreier einstufigen Gebilde,“ (Math. Ann., sv. 44, 1894) i Sturm ve své „Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften.“ Jest však patrno, že se jedná o specialisaci jiného druhu než ostatní, které rovněž Schubert t. c. jmenuje singulární a jež jsou dány reducibilní rovnicí. Proto dal jsem přednost název porabolická; také název specielní byl by zcela vhodný.

3. Buď dána parabolická trilinearita mezi řadou t, svazkem t o singulární trojice O, t, ω rovnicí

$$\frac{A}{\xi}+\frac{B}{\eta}+\frac{C}{\zeta}+D=0. \tag{9}$$

Proveďme nejobecnější transformaci parametrů ξ, η, ζ té vlastnosti, aby bodu O, přímce t a rovině ω i po transformaci příslušely hodnoty nulové parametrů, tedy transformaci

$$\xi=\frac{\alpha\xi_0}{1+a\xi_0},\quad \eta=\frac{\beta\eta_0}{1+b\eta_0},\quad \zeta=\frac{\gamma\zeta_0}{1+c\zeta_0},\quad \alpha\beta\gamma\neq 0. \tag{10}$$

Tím přejde (9) v rovnici

$$\frac{A}{\alpha}\frac{1}{\xi_0}+\frac{B}{\beta}\frac{1}{\eta_0}+\frac{C}{\gamma}\frac{1}{\zeta_0}+\frac{Aa}{\alpha}+\frac{Bb}{\beta}+\frac{Cc}{\gamma}+D=0.$$

Je-li nyní mimo (9) ještě dána druhá trilinearita téhož typu

$$\frac{A'}{\xi}+\frac{B'}{\eta}+\frac{C'}{\zeta}+D'=0. \tag{9'}$$

shledáváme, že výrazy

$$\frac{A}{A'},\quad \frac{B}{B'},\quad \frac{C}{C'}$$

nemění se transformací (10)[1]; a tedy výrazy

$$i_{12}=\frac{AB'}{A'B},\quad i_{23}=\frac{BC'}{B'C},\quad i_{31}=\frac{CA'}{C'A}, \tag{11}$$

vázané identitou

$$i_{12}i_{23}i_{31}=1, \tag{11'}$$

jsou (absolutní) *simultánní invarianty trilinearit* (9), (9'). Lze ostatně snadno udati jejich geometrický význam. Pro i_{12} na př. obdržíme jej takto: Zvolme ve svazku t libovolně, ale pevně dvě roviny ϱ, ϱ'. Nechť obecně R, r, ϱ je trojina trilinearity (9) a R', r, ϱ' trojina trilinearity (9'). Opisuje-li r svazek (O, ω), jest řada R projektivní s řadou R' a invariant této projektivity [2]) jest právě i_{12}.

[1]) A, B, C, D možno současně násobiti týmž faktorem, beze změny významu rovn. (9).

[2]) t. j. dvojpoměr, který tvoří kterýkoli pár prvků korespondujících s párem prvků samodružných.

4. Buď nyní (i v dalším) Γ rozvinutelná plocha tečen čáry C. Pro souřadnice tečné roviny Γ máme

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \left\| \begin{matrix} t, & \frac{p_2}{2} t^2 + \frac{p_3}{6} t^3 + \ldots, & \frac{q_3}{6} t^3 + \frac{q_4}{24} t^4 + \ldots, \\ 1, & p_2 t + \frac{p_3}{2} t^2 + \ldots, & \frac{q_3}{2} t^2 + \frac{q_4}{8} x^3 + \ldots, \\ 0, & p_2 + p_3 t + \ldots, & q_3 t + \frac{q_4}{2} t^2 + \ldots \end{matrix} \right\|,$$

kde jsme kladli $\frac{x_1}{x_4} = t$, čili

$$\frac{u_1}{u_3} = \frac{q_3}{2} t^2 + \frac{2p_2q_4 - 3p_3q_3}{6p_2} t^3 + \ldots,$$

$$\frac{u_2}{u_3} = -\frac{q_3}{p_2} t + \frac{2p_3q_3 - p_2q_4}{2p_2^2} t^2 + \ldots,$$

$$\frac{u_4}{u_3} = -\frac{q_3}{6} t^3 + \frac{4p_3q_3 - 3p_2q_4}{24p_2} t^4 + \ldots,$$

a vyloučíme-li t,

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_3} &= \frac{p_2^2}{2q_3}\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^2 + \frac{p_2^2(p_2q_4 - 3p_3q_3)}{6q_3^3}\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^3 + \ldots, \\ \frac{u_4}{u_3} &= \frac{p_2^3}{6q_3^2}\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^3 + \frac{p_2^3(3p_2q_4 - 8p_3q_3)}{24q_3^4}\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^4 + \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

Dle (8) jest charakteristická trilinearita elementu Γ:

$$\frac{p_2}{\xi} + \frac{3p_2^2}{\eta} + \frac{3q_3}{\zeta} + \frac{p_2q_4 - 3p_3q_3}{q_3} = 0. \tag{13}$$

Můžeme tudíž výsloviti výsledek: *Simultaní invarianty charakteristické trilinearity elementu prostorové křivky C a char. tril. elementu její rozv. pl. tečen jsou*

$$i_{13} = 3, \quad i_{23} = 3, \quad i_{31} = \tfrac{1}{9}. \tag{14}$$

Naopak: každé dvě parabolické trilinearity mezi řadou bodů na t, svazkem přímek (O, ω) a svazkem rovin t, o singulární trojici O, t, ω, jichž simultaní invarianty jsou (14), lze považovati resp. za char. tril. elementu prostorové křivky C a její rozv. plochy tečen Γ.

5. Jest však zajímavo stopovati dále vzájemné vztahy obou trilinearit. Eliminujme z rovnic (6), (13) nejprve η; obdržíme rovnici

$$\frac{p_2}{\xi} - \frac{q_3}{\zeta} + \frac{2p_3q_3 - p_2q_4}{2q_3} = 0, \qquad (15)$$

definující projektivitu mezi řadou bodů t a svazkem rovin t. ∞^1 svazků přímek, jichž středy a roviny si odpovídají v této projektivitě, tvoří specielní lineární kongruenci K o řídící přímce t. Ukážeme, ze K není nic jiného než *oskulační lineární kongruence křivky* C, t. j. kongruence, obsahující čtyři soumezné tečny C. Pro souřadnice $p_{ik} = x_i\, y_k - x_k\, y_i$ tečen C obdržíme

$$p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} t, & \frac{p_2}{2}t^2 + \frac{p_3}{6}t^3 + \ldots, & \frac{q_3}{6}t^3 + \frac{q_4}{24}t^4 + \ldots, & 1 \\ 1, & p_2 t + \frac{p_3}{2}t^2 + \ldots, & \frac{q_3}{2}t^2 + \frac{q_4}{6}t^3 + \ldots, & 0 \end{matrix} \right\|,$$

čili

$$\frac{p_{12}}{p_{14}} = -\frac{p_2}{2}t^2 - \frac{p_3}{3}t^3 + \ldots, \quad \frac{p_{23}}{p_{14}} = -\frac{p_2q_3}{12}t^4 - \frac{p_2q_4}{24}t^5 + \ldots,$$

$$\frac{p_{31}}{p_{14}} = \frac{q_3}{3}t^3 + \frac{q_4}{8}t^4 + \ldots, \quad \frac{p_{24}}{p_{14}} = p_2 t + \frac{p_3}{2}t^2 + \ldots, \qquad (16)$$

$$\frac{p_{34}}{p_{14}} = \frac{q_3}{2}t^2 + \frac{q_4}{6}t^3 + \ldots$$

Odtud vidíme, že vedle $\frac{p_{23}}{p_{14}}$ i

$$(p_2q_4 - 2p_3q_3)\frac{p_{31}}{p_{14}} - 2q_3^2\frac{p_{12}}{p_{14}} - 2p_2q_3\frac{p_{34}}{p_{14}}$$

jest potenční řadou v t, počínající teprve čtvrtou mocností. Jsou tedy

$$p_{23} = 0, \; (p_2q_4 - 2p_3q_3)\,p_{31} - 2q_3\,(q_3p_{12} + p_2p_{34}) = 0 \qquad (17)$$

rovnice oskul. lin. kongruence.

Z toho je patrno především, že tato jest specielní a má t za přímku řídicí. Abychom obdrželi přímky kongruence (17), které obsahují bod (ξ, 0, 0, 1) na t, jest klásti v (17)

$$p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = -\xi x_2 : 0 : \xi x_3 : (x_1 - \xi x_4) : x_2 : x_3,$$

čímž dostáváme, že hledané přímky leží v rovině

$$[(p_2q_4 - 2p_3q_3)\,\xi - 2p_2q_3]\,x_3 + 2q_3^2\xi x_2 = 0.$$

Je-li ζ takové, že táž rovina má rovnici $\xi\, x_2 - x_3 = 0$, jest tedy splněna rovnice (15), jak jsme chtěli dokázati.

6. Eliminujme nyní ζ z rovnic (6) a (13); výsledek jest

$$\frac{4}{\xi} + \frac{3p_2}{\eta} - \frac{q_4}{2q_3} = 0. \tag{17}$$

Nazveme s Wilczynskim[1]) *oskulačním kuželem* prostorové křivky C v jejím bodě O oskulační kužel druhého stupně kužele promítajícího C s O, a *oskulační kuželosečkou* křivky C oskulační kuželosečku průseku Γ s ω. Rovnice průseku Γ s ω obdržíme, klademe-li v (16)

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = p_{31} : -p_{23} : 0 : p_{34},$$

a jsou tedy

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \frac{q_3}{3}\,t + \frac{q_4}{8}\,t^2 + \ldots, \\ \varrho x_2 &= \frac{p_2q_3}{12}\,t^2 + \frac{p_2q_4}{24}\,t^3 + \ldots, \\ \varrho x_3 &= \frac{q_3}{2} + \frac{q_4}{6}\,t + \ldots \end{aligned} \tag{18}$$

Dosadíme-li z těchto rovnic do výrazu

$$\varrho^2\,(3p_2q_3x_1^2 + q_4x_1x_2 - 8q_3x_2x_4),$$

obdržíme potenční řadu v t, počínající až čtvrtou mocností; má tudíž křivka (18) a tedy také oskulační kuželosečka křiky C v O styk třetího řádu s kuželosečkou

$$3p_2q_3x_1^2 + q_4x_1x_2 - 8q_3x_2x_4 = 0. \tag{19}$$

Polára bodu (ξ, 0, 0, 1) na t vzhledem ke (19) má rovnici

$$6p_2q_3\xi x_1 + (q_4\xi - 8q_3)\,x_2 = 0.$$

Je-li táž přímka dána také rovincí $\eta x_1 + x_2 = 0$, jest tedy splněna rovnice (17) a tato vyjadřuje tudíž *polaritu vzhledem k elementu oskulační kuželosečky křivky C.* Korelativně

1) Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, 1906, st. 250.

vyjadřuje rovnice

$$\frac{3p_2^2}{\eta}+\frac{4q_3}{\xi}+\frac{3p_2q_4-8p_3q_3}{2q_3}=0, \tag{20}$$

vzniklá eliminací ξ z rovnic (6), (13), *polaritu vzhledem k elementu oskulačního kužele křivky C*. Výsledky posledních tří odstavců podávají postačující basi pro řešení úlohy z pěti prvků: 1.) element třetího řádu prostorové křivky C, 2.) el. 3. ř. její plochy tečen, 3.) el. 3. ř. její oskulační kuželosečky, 4.) el. 3. ř. jejího oskul. kužele, 5.) oskulační lin. kongruence, známe dva a hledáme zbývající tři; a to jeden pro řešení početní, nýbrž i konstruktivní, Do provedení, které je snadné a dá se ovšem rozmanitě graficky realisovati (s výhodou lze použíti i některých relací metrických). pouštěti se nehodláme. Za to upozorněme ještě, že jsme mimochodem rozřešili i tuto úlohu: Jest dán kužel V a polarita vzhl. k elem. V v okolí vytvořující přímky t; sestrojiti jest elementy třetího řádu těch čar na V, jež procházejíce jeho středem dotýkají se zde t, jakož i el. 3 ř. rozv. ploch tečen těchto čar..

7. Odvodíme nyní souvislost char. trilinearit elementu prostorové křivky C a elementu její plochy tečen Γ s *metrickými invarianty*, předpokládajíce, že bod O je v konečnu, t není přímkou minimální a ω není rovinou minimální. Uvažujme nejprve *euklidovskou* metriku. Buďte x, y, z souřadnice pravoúhlé, s oblouk, $\frac{1}{\varrho}$ křivost a $\frac{1}{T}$ torse čáry C. Dle formulí Frenetových je[1])

$$x=s-\frac{s^3}{6\varrho}+\ldots,$$

$$y=\frac{s^2}{2\varrho}+\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{s^3}{6}+\ldots,$$

$$z=-\frac{s^2}{6\varrho T}-\varrho\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho^2 T}\right)\frac{s^4}{24}+\ldots,$$

a tedy

$$\begin{aligned} y&=\frac{x^2}{2\varrho}+\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{x^3}{6}+\ldots,\\ z&=\frac{x^3}{6\varrho T}-\varrho\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho^2 T}\right)\frac{x^4}{24}+\ldots \end{aligned} \tag{21}$$

[1]) V. n. př. Hostinský, Diferenciální geometrie, str. 35.

Je-li δ vzdálenost bod $(\xi, 0, 0)$ od O, je-li φ úhel přímky $z = \eta\, x + y = 0$ s přímkou t a ψ, úhel roviny $\zeta\, y - z = 0$ s rovinou ω, jest

$$\xi = \delta, \quad \eta = -\operatorname{tg}\varphi, \quad \zeta = \operatorname{tg}\psi, \tag{22}$$

a *rovnice char. trilinearity elem. C jest* tudíž dle (6) a (21)

$$\frac{3\varrho}{\delta} - \frac{3}{\operatorname{tg}\varphi} - \frac{\varrho}{T\operatorname{tg}\psi} + \frac{d\varrho}{ds} = 0. \tag{23}$$

Dále jest dle (13) a (21) *rovnice char. trilinearity elem. Γ*

$$\frac{\varrho}{\delta} - \frac{3}{\operatorname{tg}\varphi} - \frac{3\varrho}{T\operatorname{tg}\psi} + T\frac{d}{ds}\left(\frac{\varrho}{T}\right) = 0. \tag{24}$$

Pozorujme, že (23) přeje ve (24), klademe-li místo

$$\delta,\ \operatorname{tg}\varphi,\ \operatorname{tg}\psi,\ \varrho,\ T,\ ds$$

resp.

$$\operatorname{tg}\psi,\ -\operatorname{tg}\varphi,\ \delta,\ \frac{\varrho}{T},\ \frac{1}{T},\ -\frac{ds}{T}.$$

Předcházejíce k *neeuklidovské* metrice, předpokládejme soustavu soustavu souřadnou tak volenu, že rovnice absolutní kvadriky jest

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

a volme faktor úměrnosti našich homogeních souřadnic tak, aby bylo identicky

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2,$$

kde $\frac{1}{R^2}$ jest křivost prostoru.[1]) Dle formulí Frenetových[2]) jest, mají-li s, $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{T}$ týž význam jako dříve,

$$x_1 = s - \frac{R^2 + \varrho^2}{R^2\varrho^2}\frac{s^3}{6} + \ldots,$$

$$x_2 = \frac{s^2}{2\varrho} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{s^3}{6} + \ldots,$$

$$x_3 = -\frac{s^3}{6\varrho T} - \varrho\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho^2 T}\right)\frac{s^4}{24} + \ldots,$$

$$x_4 = R - \frac{s^2}{2R} + \ldots,$$

---

[1]) V. na př. Coolidge, The elements of non-euclidean geometry, kap. 15.
[2]) Tamtéž, rovn. (5), (9), (10), (11).

a tedy

$$
\begin{aligned}
R\frac{x_2}{x_4} &= \frac{1}{2\varrho}\left(R\frac{x_1}{x_4}\right)^2 + \frac{1}{6}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\left(R\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + \ldots, \\
R\frac{x_3}{x_4} &= -\frac{1}{6\varrho T}\left(R\frac{x_1}{x_4}\right)^3 - \frac{\varrho}{24}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho^2 T}\right)\left(R\frac{x_1}{x_4}\right)^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{25}
$$

Mají-li ξ, η, ζ, δ, φ, ψ týž význam jako nahoře, jest nyní

$$\xi = \operatorname{tg}\frac{\delta}{R}, \quad \eta = -\operatorname{tg}\varphi, \quad \zeta = \operatorname{tg}\psi. \tag{26}$$

Jest tudíž *rovnice char. trilinearity elementu* C

$$\frac{3\varrho}{R\operatorname{tg}\frac{\delta}{R}} - \frac{3}{\operatorname{tg}\varphi} - \frac{\varrho}{T\operatorname{tg}\psi} + \frac{d\varrho}{ds} = 0. \tag{27}$$

a *rovnice char. trilinearity elementu* Γ

$$\frac{\varrho}{R\operatorname{tg}\frac{\delta}{R}} - \frac{3}{\operatorname{tg}\varphi} - \frac{3\varrho}{T\operatorname{tg}\psi} + T\frac{d}{ds}\left(\frac{\varrho}{T}\right) = 0. \tag{28}$$

Pro $\lim R = \infty$ přejdou ovšem rovn. (27), (28) resp. v (23). (24). Abychom obdrželi metrické vyjádření polarity vzhl. k elementu rovinné křivky, potřebujeme pouze v rovnicích (23), (27) klásti $\frac{1}{T} = 0$.

Připomenouti jest, že δ, φ, ψ jsou *orientované* vzdálenosti resp. úhly, přesně definované rovn. (22), (26). Jde-li o *reálný* obor, jest δ bráti positivně na posit. části tečny, smysl úhlu φ jest vzíti v souhlase s tím, aby positivní část tečny přešla rotací o $+\frac{\pi}{2}$ v positivní část hlavní normály, a smysl úhlu ψ s tím, aby ta část roviny oskulační, jež obsahuje kladnou část hlavní normály, přešla rotací o $+\frac{\pi}{2}$ v tu část roviny rektifikační, jež obsahuje kladnou část binormály.

Na konec ještě stůjte tyto výsledky, jichž důkaz jest okamžitý. Buď P, p, π, resp. P', p', π', obecná trojina char. trilinearity elementu C, resp. elem. Γ.

Pak jest

1.) při pevném π, resp. π':

$$\lim_{\overline{OP}=0} \frac{\overline{OP}}{\sphericalangle(t,p)} = \varrho, \qquad \lim_{\overline{OP'}=0} \frac{\overline{OP'}}{\sphericalangle(t,p')} = \frac{\varrho}{3};$$

2.) při pevném p, resp. p':

$$\lim_{\overline{OP}=0} \frac{\overline{OP}}{\sphericalangle(\omega,\pi)} = 3T, \qquad \lim_{\overline{OP'}=0} \frac{\overline{OP'}}{\sphericalangle(\omega,\pi')} = \frac{T}{3};$$

3.) při pevném P, resp. P':

$$\lim_{\sphericalangle(t,p)=0} \frac{\sphericalangle(\omega,\pi)}{\sphericalangle(t,p)} = -\frac{1}{3}\frac{\varrho}{T}; \qquad \lim_{\sphericalangle(t,p')=0} \frac{\sphericalangle(\omega,\pi')}{\sphericalangle(t,p')} = -\frac{\varrho}{T}.$$

Bod úběžný na tečně (v případě eukl. metriky) resp. bod na t konjugovaný s O vzhledem k absolutní kvadrice (v příp. neeukl. metriky) a hlavní normála tvoří spolu s tečnou rovinou oskulační koule jednu trojinu charakteristické trilinearity elementu C. Podobně tvoří bod, o nemž se ω dotýká se čtyř soumezných oskulačních rovin křivky C, a hlavní normála spolu s rektifikační rovinou jednu trojinu char. trilinearity elementu Γ.

Uvedené úplně stačí, abychom mohli snadno přejíti od char. trilinearit (počtem nebo konstrukcí) k metrickým invariantům nebo naopak.

II. Projektivní geometrie plošného elementu třetího řádu.

1. Nechť prostorová křivka C dotýká se v bodě O plochy Π, nechť se však nedotýká tečny asymptotické; buď ω tečná rovina Π, t tečna a ϱ oskulační rovina C v O; pak platí:[1] nutná a postačující podmínka, aby styk C s Π byl aspoň třetího řádu, jest, aby byl takovým styk projekce c křivky C do ϱ s jednoho a tedy[1] kteréhokoli bodu P roviny ω s průsečnou křivkou ϱ a Π. Na důkaz volme soustavu souřadnou tak, aby bylo $O \equiv (0, 0, 0, 1)$, $t \equiv x_2 = x_3 = 0$, $\omega \equiv x_2 = 0$, $P \equiv (0, 1, 0, 0)$, tak že jest rovnice Π

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{1}{x_4^2}(lx_1^2 + mx_1x_2 + nx_2^2) + \varphi_3\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}\right) + \ldots,$$

[1]) V. část I, odst. 2.

kde φ_k jest forma stupně k, a rovnice C

$$\frac{x_3}{x_4}=a_2\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2+a_3\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3+\ldots,\quad \frac{x_2}{x_4}=b_3\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3+\ldots$$

Nutné a postačující podmínky pro žádaný styk jsou

$$a_2=l,\quad a_3=\varphi_3\,(1,0).$$

Rovnice c jest patrně

$$\frac{x_3}{x_4}=l\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2+\varphi_3\,(1,0)\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3+\ldots$$

Naše tvrzení jeví se nyní evidentním. Důsledek toho jest, že při studiu elementů třetího řádu všech křivek plošných v daném bodě jejím lze se beze všeho *omeziti na čáry rovinné*, nehledíme-li na čáry dotýkající se jedné z asymtotických tečen.

2. Uvažujme nyni annalytickou plochu Π v okolí bodu O, v němž nechť *asymptotické tečny jsou různé.* Označme (v dalším stále) ω tečnou rovinu Π v O, a α a β obě tečny asymptotické. Soustavu souřadnou volme tak, aby bylo: $\alpha\equiv x_1=x_3=0$, $\beta\equiv x_2=x_3=0$. Rovnice Π jest pak

$$\frac{x_3}{x_4}=\frac{x_1x_2}{x_4^2}+f\left(\frac{x_1}{x_4},\ \frac{x_2}{x_4}\right)+\ldots,\tag{1}$$

kde $f\,(x_1,\ x_2)=a_0x_1^3+a_1x_1^2x_2+a_2x_1x_2^2+a_3x_2^3$. Existuje lineární systém ∞^3 kvadrik Q, majících v O styk druhého řádu s Π:

$$x_1x_2-x_3x_4+(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)\,x_3=0.\tag{2}$$

Pronik Q s Π má v O trojný bod; tečny jsou

$$f\,(x_1,x_2)-(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\,x_1x_2=0.\tag{3}$$

Mění-li se λ_1, λ_2, tvoří (4) dvojmocnou kubickou involuci I_2^3. Jest rozeznávati tři případy *a*) $a_0a_3\neq 0$, *b*) $a_0\neq 0$, $a_3=0$ nebo $a_0=0$, $a_3\neq 0$, *c*) $a_0=a_3=0$; a sice vymizí a_0 (a_3) tehdy a jen tehdy má-li β (α) styk vyššího než druhého řádu s Π. V obecném případě a) nemá I_2^3 pevných prvků; neutrální pár tvoří α, β. Všecky trojiny I_2^3 jsou apolární s trojinou

$$a_0x_1^3+a_3x_2^3=0,\tag{4}$$

která sama náleží do I_2^3; jednotlivé její prvky jsou trojné prvky I_2^3.

Trojina tato byla poprvé uvažována (a to právě tímto způsobem) Darbouxem r. 1880.[1]) Její základní význam pro projektivní diferenciální geometrii ploch ukázal Fubini ve svých pracích z nejnovější doby.[2]) Budeme prvky této trojiny s Fubinim nazývati *tečny Darboux-Segreovy* (Darboux jmenoval je tangentes à osculation quadrique). V dalším naskytne se nám příležitost, podati důležité vlastnosti těchto tečen, které také mohou sloužiti za jich definici. V případě *b*) (pro určitost předpokládejme $a_3 = 0$, tak že α má styk vyššího řádu s Π) má I_2^3 pevný prvek α. Všecky tři trojné prvky I_2^3 splnou v α. Konečně v případě *c*) má I_2^3 dva pevné prvky α, β a redukuje se na systém ∞^1. Π má pak v O styk aspoň třetího řádu s kvadrikou a rovnice (4) jest identitou. Každé trojině I_2^3 přísluší jednomocný (v případě *c*) dvojmocný) svazek kvadrik Q; tyto mají podíl α i podíl β styk. Specielně trojině (4) přísluší kvadriky

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\, x_3 = 0. \tag{5}$$

Tyto mají v O s Π styk druhého (v případě *c*) třetího řádu) a tečny k proniku Π s kteroukoli z nich jsou tečny Darboux-Segreovy (trojnásob počítaná α v případě *b*); mezi sebou mají pak styk podél α i podél β, tedy v O styk třetího řádu. Kterýkoli bod $(x_1, x_2, 0, x_4)$ v ω má tedy vzhledem k nim všem tutéž polární rovinu o souřadnicích

$$\varrho u_1 = x_2,\ \varrho u_2 = x_1,\ \varrho u_3 = -x_4 + a_1 x_1 + a_2 x_2,\ u_4 = 0. \tag{6}$$

Tato korelativní transformace mezi polem ω a trsem O jest pro další velmi důležitá: budeme ji nazývati *transformací* Σ_0 (*příslušnou elementu* Π).

Jest patrno, že soustavu souřadnou lze vždy tak voliti, aby jednou z kvadrik svazku, o němž právě byla řeč, byla kvadrika $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$; *tento předpoklad učiníme*, tak že bude $f(x_1, x_2) = \frac{1}{6}(\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3)$; rovnice Π bude

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{x_1}{x_4}\frac{x_2}{x_4} + \frac{1}{6x_4^3}(\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3) + \ldots \tag{7}$$

[1]) V. Darboux, Sur le contact des courbes et des surfaces (Bull. d. Sc. math. 2 sér., t. 4).

[2]) V práci G. Fubini, Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale (Palermo Rend., t. 43, 1918—19, fasc. 1, pp. 1—46) nalezne čtenář seznam dosavadních jeho prací.

a rovnice transformace Σ_0 budou

$$u_1 : u_2 : u_3 = x_2 : x_1 : -x_4, \quad x_3 = u_4 = 0. \tag{8}$$

Možno předpokládati *a*) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, *b*) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, *c*) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Ponecháme raději tvar (7), abychom mohli všecky tři případy současně vyšetřovati.

3. Moutard vyslovil větu [1]), že oskulační kuželosečky v O průseků Π s rovinami, které obsahují pevnou tečnu t plochy Π v O, tvoří kvadriku, kterou nazveme s Wilczynskim *Montardovou kvadrikou* příslušnou tečně t. Darboux ukázal, že ze tří tečen v O ku průseku Π s tonto kvadrikou dvě splynou v t; odtud nalezneme snadno, přihlížejíce k tomu, co bylo řečeno o involuci I_2^3, že Moutardova kvadrika příslušná tečně $x_2 - nx_1 = 0$ nálezí svazku

$$6n^2 (x_1 x_2 - x_3 x_4) + [(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 n^3) nx_1 - (\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 n^3) x_2 + \lambda_3 x_3] x_3 = 0. \tag{9}$$

Je-li P kterýkoli bod na tečně $x_2 - nx_1 = 0$, tvoří tedy poláry P vzhledem k oskulačním kuželosečkám průseků Π s rovinami svazku OP, čili, dle dříve námi zavedené terminologie, poláry bodu P vzhledem k elementům těchto průseků, svazek (o středu O), jehož rovinu π můžeme tedy nazvati *polární rovinou* P (a P pólem π) *vzhledem k elementu* Π. Z rovnice (9) nalezneme, že, jsou-li $(x_1, x_2, 0, x_4)$ souřadnice P a $(u_1, u_2, u_3, 0)$ souřadnice π, jest souvislost mezi P a π, čili polarita vzhledem k elementu Π, dána rovnicemi

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= 6x_1 x_2^2, & \sigma x_1 &= 6u_1 u_2^2, \\ \varrho u_2 &= 6x_1^2 x_2, & \sigma x_2 &= 6u_1^2 u_2, \\ \varrho u_3 &= \varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3 - 6x_1 x_2 x_4, & \sigma u_3 &= \varepsilon_2 u_1^3 + \varepsilon_1 u_2^3 - 6 u_1 u_2 u_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Z toho, co bylo řečeno v odstavci 1., vysvítá, že analysa elementů třetího řádu všech křivek na Π v okolí O redukuje se úplně na studium Cremonovy transformace (10). Totéž však platí i pro korelativní analysu; ta se především pomocí věty korelativní s větou odst. 1. redukuje na studium elementů třetího řádu *kuželů* opsaných Π; užijeme-li však na takový kužel a na křivku, podíl níž se dotýká Π, téže věty, vidíme,

---

[1]) V. cit. práci Darbouxovu.

že korelativní transformací přejde (10) v polaritu vzhledem k elementu transformované plochy.[1])

4. Buď opět P libovolný bod roviny ω, a buď ϱ polární rovina P vzhledem k Moutardově kvadrice příslušné tečně *konjugované s OP*. Nazveme ϱ *reciprokou rovinu bodu P* (a P reciprokým bodem roviny ϱ) *vzhledem k elementu Π*. Z rovnice (9) nalezneme, jsou-li nyní $(x_1, x_2, 0, x_4)$ souřadnice P a $(u_1, u_2, u_3, 0)$ souřadnice ϱ, jako rovnice reciprocity vzhledem k elementu Π

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= 2x_1x_2^2, & \sigma x_1 &= 2u_1u_2^2, \\ \varrho u_2 &= 2x_1^2x_2, & \sigma x_2 &= 2u_1^2u_2, \\ \varrho u_3 &= -(\varepsilon_1x_1^3+\varepsilon_2x_2^3)-2x_1x_2x_4, & \sigma x_3 &= -(\varepsilon_2u_1^3+\varepsilon_1u_2^3)-2u_1u_2u_3. \end{aligned} \tag{11}$$

V pojednání „Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie“ (Lincei Rend., sv. 17, 1908) zavádí C. Segre biracionální transformaci mezi body P pole ω a rovinami ϱ trsu O takto: je-li ϱ oskulační rovina v O jakékoli křivky plošné c, jest P bod vratu na rozvinutelné ploše Π opsané podel c. Snadno shledáme, přepíšeme-li rovnici (9) pojednání Segreova do soustavy souřadnic zde užité, že tato transformace jest identická s reciprocitou vzhledem k elementu Π. Specielně jest ϱ oskulační rovina křivky, podíl níž se dotýká Π kužel opsaný s P, a korelativně.[2])

Poznamenejme výslovně větu, která vzhledem k tomu, jak jsme polaritu a reciprocitu definovali, jest samozřejmá: Je-li Q Moutardova kvadrika příslušná tečně t, a t' tečna konjugovaná s t, jest polární rovinou kteréhoholi bodu na t vzhledem ke Q

[1]) Trauson dokázal již r. 1841 (Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces (J. de Lionville, sv. 6), že místem deviačních os průseků Π s rovinami svazku, jehož osou je tečna, jest rovina, a dále, že existují tři normální řezy o deviaci rovné nnle Že v textu provedené projektivní zobecnění této věty jest velmi na místě, ukazuje souvislost obou Cremonových transformací (10) a (11), o níž v dalším bude řeč.

[2]) Na stručné a velmi elegantní pojednání Segreovo právě citované, nebylo pokud mi známo, dosud nikým navázáno. Segre sám zabýval se touto věcí pouze příležitostně, jak lze souditi z toho, že nepoukazuje na souvislost své transformace s tečnami Darboux-Segreovými, ač o těchto tečnách v témž pojednání později podrobně mluví a ač k této souvislosti nutně přijdeme jakmile se, poněkud blíže s touto Cremonovou transformací zabýváme.

jeho polární rovina vzhledem k elementu Π, a polární rovinou kteréhokoli bodu na t' vzhledem ke Q jeho reciproká rovina vzhledem k elementu Π.

5. Srovnání rovnic (8), (10), (11) vede nás vzhledem k tomu, jak jsme soustavu souřadnou volili, téměř bez počtu k větě: Je-li P libovolný bod v ω, λ rovina příslušná P v korelaci Σ_0, π polární rovina bodu P a ϱ reciproká rovina téhož bodu vzhledem k elementu Π, jest

$$(\omega\lambda\pi\varrho) = -3. \tag{12}$$

Korelativně. Zároveň vidíme, že, je-li τ rovina taková, že

$$(\omega\lambda\pi\tau) = k, \tag{13}$$

kde k jest libovolná konstanta, jest souvislost mezi P a τ, jsou-li $(x_1, x_2, 0, x_4)$ souřadnice P a $(u_1, u_2, u_3, 0)$ souřadnice τ, vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= 6x_1x_2^2, & \sigma x_1 &= 6u_1u_2^2, \\ \varrho u_2 &= 6x_1^2x_2, & \sigma x_2 &= 6u_1^2u_2, \\ \varrho u_3 &= k(\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3) - 6x_1x_2x_4, & \sigma x_4 &= k(\varepsilon_2 u_1^3 + \varepsilon_1 u_2^3) - 6u_1u_2u_3. \end{aligned} \tag{14}$$

Nazveme tuto Cremonovu transformací *transformací Σ_k příslušnou elementu Π.* Specielně jest tedy Σ_1 polarita a transformace Σ_{-3} reciprocita vzhledem k elementu Π. V případě c) ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) splynou všecky Σ_k v korelaci Σ_0. V případě *a*) *bodům tečen Darboux-Segreových* (*a jen těmto*) *přísluše jí ve všech Σ_k tytéž roviny.* V případě b) ($\varepsilon_1 \neq o_1\varepsilon_2 = 0$) jsou Σ_k *kvadratické*[1]), v případě a) ($\varepsilon_1\varepsilon_2 \neq o$). *kubické* (mimo Σ_0 ovšem).

V dalším budeme studovati Σ_k pro obecné k ($\neq 0$). Při jiné příležitosti uvidíme, že jest výhodno neomezovati se na Σ_0, Σ_1, Σ_{-3}; zde poukazuji prostě na to, že tak vyhneme se

---

[1]) Budiž dovoleno na tomto místě uvésti následující: V poj. p. prof. Sobotky „Zur Construction von Osculationshyperboloiden an windschiefe Flächen", (Sitzb. d. kön böhm. Ges. d. Wiss. 1903) vedla nepřesná syntetická infinitesimální úvaha k vyslovení chybného tvrzení, že by (v mojí terminologii) při ploše zborcené reciproká rovina vzhledem k elementu plochy byla totožná s polární rovinou vzhledem k oskulačnímu hyperboloidu. Toto nesprávné tvrzení bylo bohužel vzato p. prof. Kloboučkem za základ dalších konstrukcí ve článku „O zborcených plochách, které mají danou asymptotickou plochu" (tento Časopis, roč. 49) a, jak lze souditi z franc. résumé tamtéž, asi i jinde.

zbytečnému opakování. Σ_k spolu se součiny jich se Σ_0 tvoří grupu, což jen mimochodem budiž uvedeno.

6. Předpokládejme nejprve obecný případ *a*), kdy transformace Σ_k jest kubická. Otáčí-li se rovina $(u_1, u_2, u_3, 0)$ kolem přímky p trsu 0, dané rovnicemi

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = u_4 = 0, \qquad (15)$$

opisuje bod, jemuž odpovídá v Σ_k, kubickou křivkou c_p^k o rovnici

$$\lambda_3 k(\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3) + 6(\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2 - \lambda_3 x_4) x_1 x_2 = 0. \qquad (16)$$

Bod O jest dvojný na c_p^k a tečnami jsou α, β. Pro tu větev na př., která se dotýká β, platí rozvoj

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{\varepsilon_1 k}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2 + \ldots \qquad (17)$$

Pro určité k mají tedy všecky c_p^k v každé z obou větví styk druhého řádu. Při různých k, k' naproti tomu jest poměr křivostí čar c_p^k, $c_p^{k'}$ roven $\frac{k}{k'}$. Křivka c_p^k má, jak známo, tři body inflexní, ležící na přímce. Pro souřadnice těchto bodů obdržíme ze (16):

$$\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3 = 0, \quad \lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2 - \lambda_3 x_4 = 0.$$

Prvá z těchto rovnic praví: *Body inflexní všech křivek c_p^k leží na tečnách Darboux-Segreových. Druhá znamená: Body inflexní křivky c_p^k leží na přímce, příslušné přímce p v korelaci* Σ_0. Netřeba výslovně uváděti vět korelativních.[1])

Obraťme se ku případu *b*) ($\varepsilon_2 = 0$), kdy α má styk aspoň třetího řádu s Π a Σ_k jest kvadratická. Otáčí-li se opět rovina $(u_1, u_2, u_3, 0)$ kolem přímky p, dané rovnicemi (15), opisuje bod, jemuž odpovídá v Σ_k, kuželosečku c_p^k o rovnici

$$\lambda_3 k \varepsilon_1 x_1^2 + 6(\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2 - \lambda_3 x_4) x_2 = 0. \qquad (18)$$

---

[1]) Výsledky tohoto odstavce lze, omezíme-li se na transformaci Σ_1 snadno odvoditi synteticky z věty odst. 1. Z té totiž vysvítá ihned, že body tečen (3) mají za polární rovinu vzhledem k elementu Π svou polární rovinu vzhledem ke kvadrice (2). Odtud pak plyne, že dvojmocná kubická involuce, vyťatá na kterékoli a křivek c_p^1 přímkami roviny ω, jest perspektivní s involucí I_2^3, ve kterežto okolnosti jsou již (pro Σ_1) výsledky přítomného odstavce obsaženy.

Odtud vychází okamžitě: Všecky c_p^k, dotýkají se v O tečny α. Ony, které (při různých k) přísluší pevné přímce p, dotýkají se podruhé v bodě na β; *společnou tečnou zde jest přímka příslušná přímce p v korelaci* Σ_0. Rozvoj (17) platí i zde, tedy: Při pevném k mají všecky c_p^k styk druhého řádu v O; při různých k, k' jest poměr křivostí čar c_p^k, $c_p^{k'}$ v O roven $\frac{k}{k'}$. Korelativně.

7. Polaritou vzhledem k elementu plochy Π stanovený jsou elementy 3. ř. těch křivek plošných, jichž tečnou v O není asymptotická tečna, a el. 3. ř. těch rozv. ploch opsaných Π, jichž vytvořující přímkou v O není asymptotická tečna. Reciprocita vzhl. k elementu Π stanoví souvislost mezi elem. 2. ř. plošné křivky, dotýkající se v O tečny různé od tečen asymptotických, a elem. 2. ř. rozv. plochy opsané Π podíl této křivky. Rozřešíme nyní obdobné otázky pro křivky, dotýkající se v O na př. asymptotické tečny β. Je-li plocha Π dána stále rovnicí (7), jsou rovnice takové křivky C

$$\frac{x_2}{x_4}=\frac{p_2}{2}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2+\frac{p_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3+\ldots,\quad \frac{x_3}{x_4}+\frac{3p_2+\varepsilon_1}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3+\ldots,\tag{19}$$

kdežto jako rovnice rozv. pl Γ, dotýkající se Π podíl C, nalezneme snadným počtem

$$\begin{aligned}\frac{u_1}{u_3}&=-\frac{p_2+\varepsilon_1}{2}\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^2+\frac{c}{6}\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^3+\ldots,\\ \frac{u_4}{u_3}&=-\frac{3p_2+2\varepsilon_1}{6}\left(\frac{u_2}{u^3}\right)^3+\ldots.\end{aligned}\tag{20}$$

kde c nezávisí na p_2, p_3. Podržíme-li vaše dřívější označení,[1]) jest charakteristická trilinearita elementu C

$$\frac{3p_2}{\xi}+\frac{3p_2^2}{\eta}+\frac{3p_2-\varepsilon_1}{\zeta}-p_3=0\tag{21}$$

a charakteristická trilinearita elementu Γ

$$\frac{3p_2+2\varepsilon_1}{\xi}-\frac{3(p_2+\varepsilon_1)^2}{\eta}+\frac{3(p_2+\varepsilon_1)}{\zeta}-C=0.\tag{22}$$

---

[1]) část I, odst. 2.

V následujícím pro jednodušší vyjadřovaní předpokládejme, že Π, O, α, β, C, Γ jsou reální. Dále předpokládejme v uvažovaném prostoru definovánu euklidovskou nebo neeuklidovskou metriku, takovou, že O jest v konečnu. Přistoupíme nyní k interpretaci rovnic (21), (22). Buď P bod (ξ, 0, 0, 1), p přímka $\eta x_1 + x_2 = x_3 = 0$ a π rovina $\zeta x_2 - x_3 = 0$; pak jest patrně, blíží-li se P k O, p k β a π k ω,

$$\lim \frac{\xi}{\overline{OP}} = k_1, \quad \lim \frac{\eta}{\sphericalangle(\beta p)} = k_2, \quad \lim \frac{\zeta}{\sphericalangle(\omega \pi)} = k_3,$$

kde k_1, k_2, k_3 jsou tři konstanty pouze na soustavě souřadné závislé, různé od nuly.

8. Jest lehko udati význam konstanty $\frac{k_3}{k_1}$. Rovnice nejobecnější kvadriky, mající s Π v O styk druhého řádu, jest totiž

$$x_3 x_4 = x_1 x_2 + (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\, x_3. \tag{2}$$

Polární rovina μ kodu M (y_1, 0, 0, y_4) vzhledem k této kvadrice jest

$$y_1 x_2 + (\lambda_1 y_1 - y_4)\, x_3 = 0.$$

Jest tedy, blíží-li se M k O,

$$\lim \frac{\overline{OM}}{\sphericalangle(\omega\mu)} = \frac{k_3}{k_1}. \tag{23}$$

Tuto limitu lze však lehko počítati. Především jest patrno, že má tudíž hodnotu pro všecky kvadriky (2). Předpokládajíce nejprve euklidovskou metriku volme tečny křivoznačných čar v O za osy x, y a normálu plochy za osu z pravoúhlé soustavy souřadné a za pomocnou plochu volme paraboloid

$$\frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2} = 2z,$$

kde $\frac{1}{\varrho_1}$, $\frac{1}{\varrho_2}$ jsou křivosti hl. normálních řezů Π v O. Jsou-li pravoúhlé souřadnice M

$$x = t\sqrt{\varrho_1}, \quad y = \pm t\sqrt{-\varrho_2}, \quad z = 0,$$

jest rovnice μ

$$\frac{x}{\sqrt{\varrho_1}} \pm \frac{y}{\sqrt{-\varrho_2}} = \frac{z}{t}.$$

Odtud $\overline{OM}^2 = t^2(\varrho_1 - \varrho_2)$, $\operatorname{tg}^2 \sphericalangle (\omega, \mu) = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$,

a tedy

$$\lim \frac{\overline{OM}}{\operatorname{tg}(\omega, \mu)} = \pm\sqrt{-\varrho_1\varrho_2} = \pm\frac{1}{\sqrt{-K}}, \tag{24}$$

je-li K totální křivost Π v O. Srovnáním (23) s (24) obdržíme

$$\frac{k_3}{k_1} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-K}}, \quad \varepsilon^2 = 1. \tag{25}$$

Co se týče znamení, učiňme konvence: Zvolíce na β pos. smysl, berme úhel (ω, μ) za pos. či neg. dle toho, zda pozorovateli na β, je-li smysl od paty k hlavě positivním smyslem β, jeví se rotace od ω k μ do leva nebo do prava; podobně na α. Dále považujme za pos. stranu ω tu, na níž $+\alpha$ leží na levo od $+\beta$; je-li Π v okolí O mezi $+\alpha$ a $+\beta$ na pos. straně ω, jest ve (25) pro β $\varepsilon = +1$, pro α $\varepsilon = -1$; v opačném případě naopak, vždy však je ε na jedné z α, β rovné $+1$, na druhé $= -1$. Rovnice (25) platí však (i co do znamení ε) i v neeuklidovském prostoru, což lze bez dalšího počtu takto nahlédnouti: Považujme euklidovský prostor S_3, v němž jest Π, za část euklidovského čtyřrozměrného S_4. V O veďme kolmici na S_3, a na této vytkněme bod A tak, aby $\overline{AO}$ bylo rovno jednotce délky. Trs, promítající S_3 s A, jest pak neeuklidovský S_3^*, geodeticky zobrazený na S_3. Ploše Π a bodu O v S_3 odpovídá v S_3^* plocha Π^* a bod O^*, hl. norm. řezům Π v O hl. norm. řezy Π^* v O^*, a křivosti oněch jsou rovny křivostem těchto. Stejně limita na levé straně rovnic (25) se nemění atd. Platí tedy v eukl. i neeukl. metrice rovn. (25), jakož i věta: *Buď β vytvořující přímka zborcené kvadriky, O, M dva body na β, ω, μ jich tečné roviny, K rel. totální křivost*[1]) *kvadriky v O; pak jest, blíží-li se M k O,* $\lim \frac{\sphericalangle(\omega\mu)}{\overline{OM}} = \pm\sqrt{-K}$, při čemž za hořejších konvencí o znameních platí na vytvořujících přímkách týchž (různých) soustav totéž (různé) znamení.[2])

[1]) t. j. součin křivostí obou hl. norm. řezů.

[2]) V „Poznámce o zborcených plochách druhého stupně" (Rozpravy čes. Ak., r. 8, č. 6) zabývá se Ed. Weyr podmínkou, kdy existují kvadrtky, obsahující dvě přímky, jež se protínají v bodě O, jsou-li podél obou

9. Dle rovnic (21), (22), (25) a našich dřívějších výsledků[1]) jest, je-li $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{T}\left(\frac{1}{\varrho'}, \frac{1}{T'}\right)$ křivost a torse čáry C (čáry vratu rozv. pl. Γ):

$$\frac{1}{\varrho}=-\frac{k_1}{k_2}p_2, \quad \frac{1}{\varrho'}=\frac{k_1}{k_2}\frac{(p_2+\varepsilon_1)^2}{3p_2+2\varepsilon_1}, \tag{26}$$
$$\frac{1}{T}=-\varepsilon\sqrt{-K}\,\frac{3p_2+\varepsilon_1}{p_2}, \quad \frac{1}{T'}=-\varepsilon\sqrt{-K}\,\frac{p_2+\varepsilon_1}{3p_2+2\varepsilon_1}.$$

Předpokládejme nejprve $\varepsilon_1 \neq 0$. Z (26) nalezneme, kladouce $\varrho=\varrho'$ [2]), že asymptotické čáře přísluší hodnota

$$p_2=-\frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Je-li tedy $\frac{1}{\varrho_0}$ křivost, a $\frac{1}{T_0}$ torse asymptotické čáry, jest

$$\frac{1}{T_0}=-\varepsilon\sqrt{-K}, \qquad \varrho=\frac{\varrho_0}{2}\left(3-\frac{T_0}{T}\right),$$
$$\frac{1}{T'}=\frac{1}{T_0}\frac{2\varrho-\varrho_0}{4\varrho-3\varrho_0}, \qquad \frac{T'}{\varrho'}=T_0\left(\frac{2}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho}\right).$$

Tyto rovnice obsahují ovšem pouze dávno známé výsledky pocházející od Ennepera, Beltramiho a Bonneta. — Pravili jsme, že asymptotické čáře přísluší hodnota $p_2=-\frac{\varepsilon_1}{2}$; srovnáme-li s rovn. (17), obdržíme větu: *Křivost v O kubických křivek, odpovídajících v transf. Σ_k příslušné elementu Π svazků rovin, rovná se křivosti asymptotické čáry, násobené $-\frac{2k}{3}$.* Korelativně. Jest důležito, poznamenati tento důsledek věty

---

přímek předepsány roviny tečné, a dospívá k relaci

$$y_0^2k-x_0^2k'=kk'(k-k'),$$

kde x_0, y_0 jsou vzdálenosti centr. bodu od O, a k, k' distribuční parametry Z věty v textu plyne okamžité relace Weyrova, ovšem naše věta praví více. Její souvislost s větou Enneperovou o torsi asymptotických čar dodává jí jisté zajímavosti.

[1]) část I., odst. 7.

[2]) nebo též z rovnic (21), (22), užijeme-li věty odvozené v části I. odst. 4.

právě vyslovené: Sestrojíme-li v ω jakoukoli křivku kubickou, mající v O bod dvojný a v každé z obou větví styk druhého řádu s jednou z čar asymptotických, leží její tři inflexní body na třech tečnách Darboux-Segreových. Odtud pak následuje: *Známe-li diferenciální rovnici projekce asymptotických čar plochy s pevného bodu na pevnou rovinu, můžeme z ní odvoditi dif. rov. projekce Darboux-Segreových čar téže plochy z téhož bodu na touž rovinu* [1]).

Dosadíme-li do rovnic (21), (22) $p_2 = -\frac{\varepsilon_1}{2}$, eliminujeme η a užijeme souvislosti oskulační lin. kongruence křivky s char. trilinearitami elem. křivky a elem. její plochy tečen [2]) obdržíme výsledek: *Svazky přímek, jichž středy jsou na β (na α) a jichž roviny příslušejí středům v korelaci Σ_0, tvoří oskulační lin. kongruenci asymptotické křivky dotýkající se β (α).* Syntesí této věty s předešlou plyne pak: *Abychom znali element třetího řádu plochy, je nutné a stačí, znáti křivosti a oskulační lineární kongruence obou asymptotických čar.* Tato věta je zajímavý pendant ku známé větě, že elem. třetího řádu plochy je určen elementy třetího řádu obou křivoznačných čar.

Je-li $\varepsilon_1 = 0$, obdržíme jednodušší rovnice

$$\frac{1}{\varrho_0} = 0, \quad \frac{1}{T} = -3\varepsilon\sqrt{-K}, \quad \frac{1}{T'} = -\frac{\varepsilon}{3}\sqrt{-K}.$$

Je pozorubodno, že pro $\varepsilon_1 \neq 0$ pro žádnou křivku, dotýkající se β, a analytickou v O, *není*

$$\frac{1}{T} = -3\varepsilon\sqrt{-K}.$$

[1]) Viz G. Fubini „Applicabilità proittiva di due superficie (Rend. Palermo, t. 41, 1916, str. 153), kde se praví: „Prima di proseguire voglio mettere in luce un notevole risultato da noi conseguito, e di cui, per quanto esso fosse previsto da me per via intuitiva, *mi sfugge l'intima ragione analitica.* Date su tutta la superficie le assintotiche, per determinare in un punto le direzioni di Darboux-Segre basta conoscere le (C_1) e (C_2) che non contengono le derivate di D, D', D'', ma soltanto elementi di secondo ordine per le due superficie. Questo teorema merita probabilmente di essere studiato piu profondamente.

[2]) část I., odst. 5.

III. Užití na plochy zborcené.

1. Za souřadnice přímky budeme bráti výrazy $p_{ik} = \pm x_i y_k - x_k y_i$, jsou-li x_i a y_i souřadnice dvou jejích bodů. Buď dána zborcená plocha Π v okolí přímky $t \equiv x_2 = x_3 = 0$ tím, že souřádnice přímek vytvořujících[1]) jsou dané funkce parametru z, při čemž přímka t přísluší hodnotě $z = 0$; jsou tedy rovnice Π

$$\begin{aligned}
P_{12} &= a_{12}z + b_{12}z^2 + c_{12}z^3 + \ldots, \\
P_{23} &= a_{23}z + b_{22}z^2 + c_{22}z^3 + \ldots, \\
P_{31} &= a_{31}z + b_{31}z^2 + c_{31}z^3 + \ldots, \quad \left(P_{ik} = \frac{p_{ik}}{p_{14}}\right) \qquad (1) \\
P_{24} &= a_{24}z + b_{24}z^2 + c_{24}z^3 + \ldots, \\
P_{34} &= a_{34}z + b_{34}z^2 + c_{34}z^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Vzhledem k identitě $p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0$ jest

$$\begin{aligned}
a_{23} = 0, \quad b_{23} &= -(a_{12}a_{34} + a_{31}a_{24}), \\
c_{23} &= -(a_{12}b_{34} + a_{34}b_{12} + a_{31}b_{24} + b_{31}a_{24}).
\end{aligned} \qquad (1^*)$$

Rovnice Π v bodových souřadnicích obdržíme, dosadíme-li do rovnic

$$p_{24}x_1 - p_{14}x_2 + p_{12}x_4 = p_{34}x_1 - p_{14}x_3 - p_{31}x_4 = 0 \qquad (2)$$

z (1) a vyloučíme z. Je-li obecně dána plocha dvěma rovnicemi

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, z) = g(x_1, x_2, x_3, x_4, z) = 0$$

homogenními v x_i, jest rovnice tečné roviny v bodě x_i'

$$\sum_{i=1}^{4} \left[\frac{\partial(f, g)}{\partial(x_i, z)}\right]_{x_i = x_i'} . x_i = 0.$$

Rovnice tečné roviny plochy Π v bodě $(x'_1, 0, 0, x'_4)$ je dle toho

$$(a_{34}x'_1 - a_{31}x_4)\, x_2 - (a_{24}x'_1 + a_{12}x'_4)\, x_3 = 0. \qquad (3)$$

V dálším stále předpokládáme, že t *není torsální přímkou na* Π; pak možno soustavu souř. zvoliti tak, aby rovnice (3) byla jednoduše

$$x'_1 x_2 - x'_4 x_3 = 0. \qquad (3')$$

---

[1]) obvyklý název „přímka povrchová“ nebo „površka“ nepokládám za vhodný.

Volíme-li mimo to ještě parametr z vhodně, bude pak

$$a_{31} = a_{21} = b_{34} = c_{34} = 0, \quad a_{12} = a_{34} = 1, \qquad (4)$$

a vzhledem k rovnicím (1*) dále

$$a_{23} = 0, \quad b_{23} = -1, \quad c_{23} = -b_{12}. \qquad (4^*)$$

Zaveďme přechodně novou soustavu souřadnou substitucí

$$\begin{array}{ll} x_1 = y_1 & y_1 = x_1, \\ x_2 = y_2 - \mu y_3, & y_2 = x_2 - \mu x_3, \\ x_3 = -y_3, & y_3 = -x_3, \\ x_4 = \mu x_1 - y_4, & y_4 = \mu x_1 - x_4, \end{array} \qquad (5)$$

Dosadíme-li nyní do (2) z (1) a (5), obdržíme, přihlížejíce k rovn. (4):

$$(b_{23}z^2 + c_{24}z^3 + \ldots)\, y_1 - y_2 + \mu y_3 + (z + b_{12}\, z^2 + c_{12}z^3 + \ldots)(\mu y_1 - y_4) = 0, \qquad (6)$$
$$(z + \ldots)\, y_1 + y_3 - (b_{31}z^2 + c_{31}z^3 + \ldots)(\mu y_1 - y_4) = 0.$$

Z druhé z rovnic (6) vypočteme z:

$$z = -\frac{y_3}{y_1} + b_{31}\mu\left(\frac{y_3}{y_1}\right)^2 - (2b_{31}^2\mu + c_{31})\mu\left(\frac{y_3}{y_1}\right)^3 - -b_{31}\left(\frac{y_3}{y_1}\right)^2 \frac{y_4}{x_1} + \ldots$$

a dosadíme do prvé rovnice (6); výsledek

$$\frac{y_2}{y_1} = (b_{31}\mu^2 + b_{12}\mu + b_{24})\left(\frac{y_3}{y_1}\right)^2 + \frac{y_3}{y_1}\frac{y_4}{y_1}$$
$$-[2b_{31}^2\mu^3 + 2b_{31}\mu(b_{12}\mu + b_{24}) + c_{31}\mu^2 + c_{12}\mu + c_{24}]\left(\frac{y_3}{y_1}\right)^2$$
$$-(2b_{31}\mu + b_{12})\left(\frac{y_3}{y_1}\right)^2 \frac{y_4}{y_1} + \ldots$$

vyjadřuje rovnici plochy Π v okolí bodu $(1, 0, 0, \mu)$ v souřadnicích y.

2. Učiňme nyní o soustavě souřadné další — dřívějšímu neodporující — zjednodušující *předpoklad*, že rovnice hyperboloidu H, který Π podél t oskuluje, jest

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0.$$

Nahlédneme snadno z rovnice (7), že bude pak mímo (4), (4*) ještě

$$b_{31} = b_{12} = b_{24} = 0. \tag{4**}$$

Rovnice Π v přímkových souřadnicích jsou nyní

$$\begin{aligned} P_{12} &= P_{34} + c_{12}P_{34}^3 + \ldots, \\ P_{23} &= -P_{34}^2 + 0 \,.\, P_{34}^3 + \ldots, \\ P_{31} &= c_{31}P_{34}^3 + \ldots, \\ P_{24} &= c_{24}P_{34}^3 + \ldots \end{aligned} \quad \left(P_{ik} = \frac{p_{ik}}{p_{14}}\right) \tag{8}$$

a rovnice Π v okolí bodu $(1, 0, 0, \mu)$ v souřadnicích y jest

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_3}{y_1}\frac{y_4}{y_1} - (c_{31}\mu^2 + c_{12}\mu + c_{24})\left(\frac{y_3}{y_1}\right)^3 + \ldots \tag{9}$$

Rovnice transformace Σ_k příslušné elementu Π v okolí bodu $(1, 0, 0, \mu)$ jest v souřadnicích y, znamenáme-li v příslušné souř. rovinové,[1])

$$\begin{aligned} \varrho v_2 &= -Ly_3^2 - y_1y_4, & \sigma y_1 &= -Lv_4^2 - v_2v_3, \\ \varrho v_3 &= y_4^2, & \sigma y_3 &= v_3v_4, & y_2 = v_1 = 0, \\ \varrho v_4 &= y_3y_4, & \sigma y_4 &= v_3^2, \end{aligned} \tag{10}$$

klademe-li pro zkrácení

$$L = k\,(c_{31}\mu^2 + c_{12}\mu + c_{24}). \tag{10*}$$

Buď nyní P libovolný bod v prostoru; rovina (Pt) dotýká se Π v určitém bodě M přímky t; i můžeme bodu P přiřaditi rovinu π, příslušnou P v transf. Σ_k příslušné elementu Π v okolí bodu M: takto definovanou příbuznost mezí prostorem bodovým a rovinovým nazveme *transformací Σ_k příslušnou vytvořující přímce t zborcené plochy Π* a v dalším prostě Σ_k. Rovnice Σ_k, k nimž dospějeme, zavedeme-li do (10) souřadnice x substitucí (5) a souřadnice u substitucí kontragredientní a vyloučíme μ pomocí rovnic $u_1 + \mu u_4 = x_2 - \mu x_3 = 0$, jsou

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= x_2\,(x_1x_2 - x_3x_4), \\ \varrho u_2 &= k\,(c_{31}x_2^2 + c_{12}x_2x_3 + c_{24}x_3^2)\,x_3 + x_1\,(x_1x_2 - x_3x_4), \\ \varrho u_3 &= -\,k\,(c_{31}x_2^2 + c_{12}x_2x_3 + c_{24}x_3^2)\,x_2 - x_4\,(x_1x_2 - x_3x_4), \\ \varrho u_4 &= -\,x_3\,(x_1x_2 - x_3x_4), \end{aligned} \tag{11}$$

---

[1]) V. část II., rovn. (14).

$$
\begin{aligned}
\sigma x_1 &= k\,(c_{31}u_1^2 - c_{12}u_1u_4 + c_{24}u_4^2)\,u_4 + u_2\,(u_1u_2 - u_3u_4),\\
\sigma x_2 &= u_1\,(u_1u_2 - u_3u_4),\\
\sigma x_3 &= -\,u_4\,(u_1u_2 - u_3u_4),\\
\sigma x_4 &= -\,h\,(c_{31}u_1^2 - c_{12}u_1u_4 + c_{24}u_4^2)\,u_1 - u_3\,(u_1u_2 - u_3u_4).
\end{aligned}
\tag{11'}
$$

Z těchto rovnic nejprve vidíme, že Σ_0 jest prostě polarita vzhledem ku H.[1]) Je-li současně $c_{31} = c_{12} = c_{24} = 0$, splynou Σ_k v Σ_0; Π má pak podíl t styk třetího řádu s H. Tento případ v dálším vylučujeme.

3. Pro $k \neq 0$ jsou Σ_k v obou smyslech kubické Cremonovy transformace. Rovinám obou trsů, vyjádřených rovnicí

$$c_{31}u_1^2 - c_{12}u_1u_4 + c_{24}u_4^2 = 0, \tag{12}$$

jichž středy označíme F_1, F_2, přísluśejí ve všech Σ_k tytéž body Vzhl. k významu Σ_1 nebo také dle (9) má Π v každém z obou bodů F_1, F_2 styk třetího řádu s H. Asymptotické tečny f_1, f_2 v F_1, F_2 mají tedy čtyrbodový styk s H; jinak řečeno, f_1 a f_2 jsou řídící přímky *oskulační lineární kongruence* K plochy Π podél t. Abychom nalezli rovnice K, můžeme tudíž takto postupovati. Buďte μ_1, μ_2 kořeny kvadratické rovnice

$$c_{31}\mu^2 + c_{12}\mu + c_{24} = 0, \tag{13}$$

tedy $(1, 0, 0, \mu_1)$ souřadnice F_1. Tečná rovina $x_2 - \mu_1 x_3 = 0$ plochy Π v F_1 protne přímku $x_1 = x_4 = 0$, náležející H, v bodě G_1 $(0, \mu_1, 1, 0)$. Patrně jest $f_1 \equiv F_1G_1$ a tedy jsou souřadnice f_1:

$$p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = -\,\mu_1 : 0 : 1 : 0 : \mu_1^2 : \mu_1.$$

Rovnice komplexu přímek protínajících f_1 jest tedy

$$\mu_1^2 p_{31} + \mu_1\,(p_{12} - p_{34}) + p_{24} = 0. \tag{14}$$

Podobně jest rovnice komplexu přímek protínajících f_2

$$\mu_2^2 p_{31} + \mu_2\,(p_{12} - p_{34}) + p_{24} = 0. \tag{14*}$$

---

[1]) Je-li Π jakákoli plocha, jest Σ_0 příslušná elementu Π částí polarity vzhl. t. zv. Lieově kvadrice plošného bodu (Lie; Christiania Videnskabs-Selskabet Forhandlinger 1882), t. j. oskulačnímu hyperboloidu zborcené plochy, kterou tvoří asymptotické tečny prvé (n. druhé) soustavy podél asymptotické křivky druhé (n. prvé) soustavy. (Wilczinski nazývá Lieovu kvadriku prostě osculating hyperboloid).

Soustava obou rovnic (14), (14*) vyjádřuje K. Jest však dle (13)

$$\mu_1+\mu_2=-\frac{c_{12}}{c_{31}},\quad \frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}=-\frac{c_{12}}{c_{24}},$$

a K je tudíž vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned} &c_{12}p_{31}-c_{31}(p_{12}-p_{34})=0,\\ &c_{12}p_{24}-c_{24}(p_{12}-p_{34})=0,\\ &c_{24}p_{31}-c_{31}p_{24}=0. \end{aligned} \tag{15}$$

Toto odvození není ovšem přesné, neboť body F_1, F_2 mohou splynout. Dá se však lehko verifikovati, že (15) vyjadřují K ve všech případech. Nazveme s Wilczynskim[1]) F_1, F_2 *fleknody* a f_1, f_2 *fleknodální tečny* plochy Π.

4. Je-li $4c_{31}c_{24}-c_{12}^2 \neq 0$, jsou oba fleknody F_1, F_2 různé. Možno pak soustavu souřadnou ve shodě s dřívějšími předpoklady tak specialisovati, že jest F_1 (1, 0, 0, 0) a F_2 (0, 0, 0, 1), načež bude $f_1 \equiv x_2 = x_4 = 0$ a $f_3 \equiv x_1 = x_3 = 0$. Volíme-li souřadnice takto, bude $c_{31}=c_{24}=0$ a po vhodné volbě jednotkového bodu dále $c_{12}=1$. Rovnice Π nabudou jednoduchého tvaru

$$P_{12}=P_{34}+P_{34}^3+\ldots,\quad P_{23}=-P_{34}^2+\ldots,\quad P_{31}=\ldots,\quad P_{24}=\ldots,$$
$$\left(P_{ik}=\frac{p_{ik}}{p_{14}}\right), \tag{16}$$

kdy vynechané členy jsou vyššího než třetího řádu. Rovnice Σ_k znějí potom

$$\begin{aligned} &\varrho u_1 = x_2(x_1x_2-x_3x_4), && \sigma x_1 = -ku_1u_4^2+u_2(u_1u_2-u_3u_4),\\ &\varrho u_2 = kx_2x_3^2+x_1(x_1x_2-x_3x_4), && \sigma x_2 = u_1(u_1u_2-u_3u_4),\\ &\varrho u_3 = -kx_2^2x_3-x_4(x_1x_2-x_3x_4), && \sigma x_3 = -u_4(u_1u_2-u_3u_4),\\ &\varrho u_4 = -x_3(x_1x_2-x_3x_4), && \sigma x_4 = ku_1^2u_4-u_3(u_1u_2-u_3u_4). \end{aligned} \tag{17}$$

Je-li však $4c_{31}c_{24}-c_{12}^2=0$, jest $F_1 \equiv F_2$ a tedy $f_1 \equiv f_2$. Nyní možno specialisovati souřadnice tak, aby bylo $F_1 \equiv (1,0,0,0)$ a tedy $f_1 \equiv x_2 = x_4 = 0$, načež budu $c_{12}=c_{24}=0$ a po vhodné volbě jednotkového bodu $c_{31}=1$.

[1]) Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, str. 147.

Rovnice Π jsou nyní

$$P_{12}=P_{34}+\ldots,\ P_{23}=-P_{34}^2+\ldots,\ P_{31}=P_{34}^3+\ldots,\ P_{24}=\ldots,$$

$$\left(P_{ik}=\frac{p_{ik}}{p_{14}}\right), \tag{18}$$

kde opět vynechané členy jsou vyššího než třetího řádu. Rovnice Σ_k jsou

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= x_2(x_1x_2-x_3x_4), & \sigma x_1 &= ku_1^2u_4+u_2(u_1u_2-u_3u_4),\\ \varrho u_2 &= kx_2^2x_3+x_1(x_1x_2-x_3x_4), & \sigma x_2 &= u_1(u_1u_2-u_3u_4),\\ \varrho u_3 &= -kx_2^3-x_4(x_1x_2-x_3x_4), & \sigma x_3 &= -u_4(u_1u_2-u_3u_4),\\ \varrho u_4 &= -x_3(x_1x_2-x_3x_4), & \sigma x_4 &= ku_1^3-u_3(u_1u_2-u_3u_4). \end{aligned} \tag{19}$$

5. Tečné rovině H přísluší v Σ_k ($k \neq 0$) její průsečík s t. V důsledku toho jest t *bisekantou* kubické křivky c_p^k, příslušné v Σ_k svazku rovin, jehož osou jest obecná přímka p; a sice protíná t c_p^k v průsečících t s oběma tečnými rovinami přímkou p ku H. Dotýká-li se p hyperboloidu H, jest ovšem t *tečnou* c_p^k. Rovině (pF_1) přísluší v Σ_k táž rovina jako v Σ_0; jest tudíž také reciproká polára q přímky p vzhledem ku H *bisekantou* c_p^k a protne c_p^k v průsečících q s tečnými rovinami Π ve fleknodech F_1, F_2. Splynou-li F_1, F_2, jest q *tečnou* c_p^k. Z rovnice (13) v části II., odst. 5., plyne dále: křivky c_p^k, $c_p^{k'}$ příslušné svazku p, resp. v Σ_k, Σ_k', jsou *v biaxiální kolineaci* o osách t, q a invariantu k'/k. Bylo by lehké, verifikovati tyto výsledky z rovnic (11). Dále jest patrno: Protíná-li p přímku t, redukuje se c_p^k na *kuželosečku* a protíná-li p *mimo to* jednu z fleknodálních tečen na *přímku*. K tomu však přistupují další redukce: Protíná-li p ednu z fleknodálních tečen, na př. f_1, redukují se c_p^k opět na *kuželosečku*. Buď Π dána rovnicemi (16). Souř. obecné roviny svazku p jsou za naší suposice

$$u_1 : (u_2+\lambda) : u_3 : (u_4+m\lambda), \tag{20}$$

kde λ jest proměnné. Dosadíme li do (17), obdržíme parametrické vyjádření kuželosečky c_p^k:

$$
\begin{aligned}
\sigma x_1 &= -ku_1(u_4^2 + 2m\lambda u_4 + m^2\lambda^2) + (u_2 + \lambda)[u_1u_2 - u_3u_4 + \\
&\qquad (u_1u_3 - m)\lambda], \\
\sigma x_2 &= u_1[u_1u_2 - u_3u_4 + (u_1 - u_3m)\lambda], \\
\sigma x_3 &= -(u_4 + m\lambda)[u_1u_2 - u_3u_4 + (u_1 - u_3m)\lambda], \\
\sigma x_4 &= ku_1^2(u_4 + m\lambda) - u_3[u_1u_2 - u_3u_4 + (u_1 - u_3m)\lambda].
\end{aligned} \tag{21}
$$

Z těchto rovnic vidíme, že kuželosečka c_p^k protíná t v jediném bodě, totiž v průsečíku t s tou tečnou rovinou vedenou přímkou p ku H, která neobsahuje f_1. Také reciprokou poláru q přímky p vzhledem k H protíná kuželosečka v jediném bodě, totiž v průsečíku s tečnou rovinou Π v F_2. Konečně protíná c_p^k f_1 v jednom bodě, jehož poloha závisí od k. Je-li Π dána rovnicemi (18) a svazek p opět rovnicemi (20), jest kuželosečka c_p^k vyjádřena rovnicemi

$$
\begin{aligned}
\sigma x_1 &= ku_1^2(u_4 + m\lambda) + (u_2 + \lambda)[u_1u_2 - u_3u_4 + (u_1 - u_3m)\lambda], \\
\sigma x_2 &= u_1[u_1u_2 - u_3u_4 + (u_1 - u_3m)\lambda], \\
\sigma x_3 &= -(u_4 + m\lambda)[u_1u_2 - u_3u_4 + (u_1 - u_3m)\lambda], \\
\sigma x_4 &= -ku_1^3 - u_3[u_1u_2 - u_3u_4 + (u_1 - u_3m)\lambda].
\end{aligned} \tag{22}
$$

V tomto případě protíná kuželosečka c_p^k přímku t opět v jejím průsečíku s tou tečnou rovinou ku H přímkou p, jež neobsahuje f_1; dále obsahuje nyní c_p^k průsečík (qf_1), čili pól roviny pf_1 vzhledem ku H.

6. *Jestliže však přímka p náleží lin. kongruenci K, přísluší jí v Σ_k přímka.* Je-li Π dána opět rovnicemi (16), jsou souřadnice obecné roviny svazku p

$$1 : \lambda : n : m\lambda;$$

jsou-li

$$(n,\ 0,\ -1,\ 0) \quad (0,\ m,\ 0,\ -1) \tag{23}$$

průsečíky p resp. s f_1, f_2. Parametrické vyjádření přímky c_p^k obdržíme z (21), kladouce zde $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = n$, $u_4 = 0$, a krátíce λ:

$$
\begin{aligned}
\sigma x_1 &= \lambda(1 - mn - k^2m^2), \\
\sigma x_2 &= 1 - mn, \\
\sigma x_3 &= -m\lambda(1 - mn), \\
\sigma x_4 &= -n(1 - mn) + km.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Splynou-li však f_1, f_2 a tedy Π jest dána rovnicemi (18), bude osa p svazku (20) tehdy a jen tehdy náležeti K, splynou-li obě roviny svazku (20) dotýkající se H čili bude-li $u_1 - u_3 m = 0$, tak že můžeme předpokládati $u_1 = m$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$, $u_4 = n$, načež souřadnice obecné roviny svazku p jsou

$$m : \lambda : 1 : (n + m\lambda). \tag{25}$$

Jako parametrické vyjádření přímky c_p^k obdržíme pak

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= km^2 n - (n - km^3)\lambda, \\ \sigma x_2 &= -mn, \\ \sigma x_3 &= n(n + m\lambda), \\ \sigma x_4 &= n - km^3. \end{aligned} \tag{26}$$

Přímka c_p^k náleží opět, stejně jako p lin. kongruenci K. Jsou-li, fleknody různé, jest to z rovnic (24) ihned patrno; obdržíme

$$\begin{aligned} &(1 - mn - k^2m^2,\ 0,\ -m(1 - mn),\ 0), \\ &(0,\ 1 - mn,\ 0,\ -n)(1 - mn) + km) \end{aligned} \tag{27}$$

jako souřadnice průsečíků c_p^k s f_1, f_2. Je-li však $F_1 \equiv F_2$, nalezneme nejprve z (25)

$$p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = m : m^2 : -n : -1 : 0 : m \tag{28}$$

jako souřadnice přímky p a z (23) podobně pro c_p^k

$$\begin{aligned} &p_{12} : p_{23} : \ldots = \\ &= mn(n - km^3) : m^2n^2 : n^3 : -(n - km^3)^2 : 0 : mn(n - km^3). \end{aligned} \tag{29}$$

Rovnice K jsou v našem případě (rovn. (15) a $c_{12} = c_{24} = 0$)

$$p_{24} = p_{12} - p_{34} = 0,$$

tak že jim hoví jak hodnoty (28), tak i hodnoty (29).[1]

7. Ježto z vět dříve vyložených[2]) jest patrno, že, známe-li vedle H také c_p^k příslušnou jedné zvolené přímce p neprotínající t, dovedeme ihned udati bod příslušný kterékoli rovině v Σ_k, docházíme k velmi jednoduchému závěru, že *stačí znáti vedle H polohu obou fleknodů a jeden pár přímek, abychom znali elementy třetího řádu zborcené plochy Π ve všech bodech vytvořující přímky t.* Tu se však naskytuje tato okolnost:

---

[1]) Netřeba uváděti výsledků korelativních k odst. 5 a 6.

[2]) Část II, odst. 6, případ b.)

rovnice (8) ukazují, že známe-li pouze t a H, máme tři konstanty volné; zvolíme-li F_1 a F_2 (a tím i f_1, f_2, K), zbývá jediná konstanta. Kongruence K obsahuje však ∞^2 přímek; mezi přímkami p, c_p^k musí tedy býti jistý vztah. Pravím že tento vztah zní: Ve zborceném svazku S, stanoveném přímkami t, p, c_p^k, určeme přímku r tak, aby

$$(trpc_p^k) = -1; \tag{30}$$

pak náleží přímka r hyperboloidu H. Jsou-li především F_1, F_2 různé, nalezneme z (23) a (27) pro průsečíky r s f_1, f_2:

$$(m^2n^2 + k^2m^2 - 1,\ 2m(1 - mn),\ 0),$$
$$(0,\ 2m(1 - mn),\ 0,\ m^2n^2 + k^2m^2 - 1).$$

Ježto rovnice H jest $x_1x_2 - x_3x_4$, vidíme, že r leží na H, jak tvrzeno. Splyne-li F_1 s F_2, máme nejprve z rovnic (28), (29) pro souřadnice obecné přímky zborceného svazku S určeného přímkami t, p, C_p^k:

$$\begin{aligned} & p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} \\ = {} & m[\mu + \nu n(n - km^3)] : m^2(\mu + \nu n^2) : n(-\mu + \nu n^2) \\ & : [\lambda - \mu - \nu(n - km^3)^2] : 0 : m[\mu + \nu n(n - km^3)], \end{aligned} \tag{31}$$

při čemž vzhledem k identitě $p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0$ jest

$$\varphi \equiv \lambda\mu + n^2\lambda\nu + A\mu\nu = 0, \tag{32}$$

kde hodnotu A nepotřebujeme znáti. Považujeme-li $\lambda\mu\nu$ za souř. bodu, jest φ kuželosečka projektivní se zborceným svazkem S; vzhledem ke (30) obdržíme obraz přímky r na φ, spojíme-li obraz přímky t s pólem přímky $\lambda = 0$ vzhl. k φ přímkou; rovnice této spojnice jest

$$\mu - \nu n^2 = 0. \tag{33}$$

Porovnáme-li s (31), vidíme, že jest pro r $p_{31} = 0$, t. j. r protíná přímku $x_1 = x_3 = 0$, náležející H. Avšak r dle toho, jak byla definována, náleží K, t. j. dotýká se H v bodě přímky $x_2 = x_4 = 0$. Jest tudíž celá přímka r položena na H, jak jsme chtěli dokázati.
