

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Emil Schoenbaum

K matematice pensijního pojišťování

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 4-5, 255--264

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123796>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1921

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

K matematice pensijního pojišťování.

Dr. E. Schoenbaum.

Aplikace matematiky na problémy sociálního pojišťování jest postavena rychlým vývojem sociálního pojišťování před nové úkoly, k jichž řešení musí nastoupiti matematikové zcela nové cesty, podstatně odlišné od metod matematiky pojišťování soukromého. Řešení úkolů těch vyžaduje prostředků analytických vyšších než jsme v matematice soukromého pojišťování navykli užívatí.

Je možno rozeznávati v podstatě dva zásadní rozdíly mezi matematikou pojišťování sociálního a soukromého.

Matematika soukromého i sociálního pojištění je založena na *principu ekvivalence*, tedy na zásadě, že hodnota nároků poskytnutých určité skupině pojištěnců má rovnati se hodnotě příspěvků touto skupinou, nebo pro ni placených. Kdežto ale v matematice soukromého pojištění tvoří se skupiny osob, pro než vymáhá se platnost principu ekvivalence, co nejhomogenější, tedy s ohledem na všechny statisticky postižitelné rozdíly nebezpečenské, a bře se tedy při vyměřování příspěvků ohled na stáří, povolání pohlaví, na zdravotní stav zjištěný lékařskou prohlídkou a pod, jeví se v pojišťování sociálním snaha, rozšířiti platnost principu ekvivalence na skupiny tvořené bez ohledu na individuální rozdíly nebezpečenské. V invalidním a starobním pojištění dělníků je na příklad úkolem stanoviti jednotný příspěvek nejen pro celou přítomnou generaci bez ohledu na její složení podle stáří, nýbrž i pro generace v budoucnosti teprve do pojištění na základě zákonného donucení vstupující

Vzniká tu řada zajímavých, obecně dosud neřešených úkolů: Na př.: Jak stanoviti nároky ze sociálního pojištění plynoucí, aby bylo hromadění kapitálů (tedy premiová reserva) co nejmenší, nebo aby byla jednotná (průměrná) premie co nejstabilnější, to jest co nejméně závislá na složení nynější generace dle stáří a na vzrůstu obyvatelstva pojištění podrobeného.¹⁾

¹⁾ Viz Blaschke: Die Prämien und Prämienreserven der Invalidenversicherung der Arbeiter 1909.

Další rozdíl mezi matematikou sociálního a soukromého pojištění je dán okolností, že při tvoření sociálně pojišťovacího zákonodárství rozhodují v první řadě úvahy sociálně politické a sociálně hygienické, které vedou ke komplikovaným a často novým druhům nároků po matematické stránce nesnadně nebo jen přibližně postizitelných.

Příkladem obtíží, které působí odhadnutí finančního efektu zákonných ustanovení sociálního pojištění je § 17^a zákona o penzijním pojištění z 5. února 1920 č. 89 sb. z. a n., který zní takto: „Invalidní nebo starobní důchod osoby, která má dítě nebo děti, jež by pro případ smrti měly nárok na příspěvek výchovaci, zvyšuje se o příplatek výchovaci, pokud důchodce o dítě pečuje. Tento příplatek činí za každé dítě $\frac{1}{6}$ základní částky důchodu, požíval-li však důchodce jen sníženého důchodu, $\frac{1}{6}$ snížené částky důchodové Úhrn všech těchto příplatků nesmí však činiti více, než-li 50% základní, případně snížené částky důchodové. Požitek tohoto příplatku počíná současně s důchodem invalidním nebo starobním a zaniká v případech uvedených v § 17. odst. 1“ § 17. odst. 1. zní: „Požitek výchovacích příspěvků počíná dnem úmrtí pojištěného rodiče a zaniká dokonaným 18. rokem věku, dřívějším zaopatřením, provdáním nebo úmrtím dítěte.“

Jedná se tu tedy o nový a značně komplikovaný druh dočasného důchodu životního tohoto obsahu: Požitek příplatku pro každé dítě staré pod 18 roků počíná priznáním invalidního nebo starobního důchodu pojištěnce a trvá: 1. pokud je dítě na živu, nejdéle však do dosažení 18. roku věku jeho nebo dřívějšího zaopatření neb provdání. 2. pokud běře důchodce důchod buď invalidní nebo starobní a pokud o dítě pečuje.

Výše příplatku je dána t. zv. základním obnosem invalidního důchodu (§ 8. zák.), neboť obnaší šestinu tohoto obnosu, po případě jeho snížené částky. Jest mimo to omezena ustanovením o konkurenci příplatků při větším počtu dětí, ježto úhrn všech příplatků nesmí činiti více nežli 50% základní, případně snížené částky důchodové.

Nárok na příplatek mají též nemanželské děti důchodce s tím omezením, že nemanželské otcovství musí býti prokázáno.

Přesné vystižení všech podmínek pro přiznání a požitek příplatku vychovávajícího při výpočtu prémie a premiových rezerv metodami individualisujícího soukromého pojištění je nemožné jednak z důvodu veliké komplikovanosti početních processů, jednak z důvodu nedostatku statistických podkladů. Bylo by třeba znáti systémy pravděpodobností $d(x)$, že se x -letému aktivnímu pojištěnci narodí v budoucnosti dítě, zvláště pro muže a zvláště pro ženy, a opět odděleně pro svobodné, pro ženaté (vdané) a ovdovělé pojištěnce a obdobné systémy pro x -letého invalidu. Až na dva pokusy pro ženaté²⁾ muže, ceny dosti pochybné, nejsou však, pokud je mi známo, tyto funkce známy.

Dále bylo by nutno znáti na př. pravděpodobnosti $d^a(x, z)$ pro ženatého aktivního pojištěnce, že má ve stáří x z -leté dítě, podobně pravděpodobnosti $d^i(x, z)$, že x -letý invalida má z -leté dítě. Bylo by třeba znáti tabulky ubývání dětí netoliko umíráním, nýbrž i dřívějším zaopatřením nebo provdáním.

Ale i kdyby byly všechny tyto statistické podklady známy, nebylo by možno přece přesně vypočísti prémie zvláště pro svobodného a pro ženatého pojištěnce, pro pojištěnce s jedním, s dvěma dětmi, atd. pro komplikovanost hodnot, jež tu přicházejí v úvahu.³⁾

Matematika sociálního pojištění může dovoliti si řešení mnohem jednodušší, třeba pouze přibližné z těchto důvodů: Především je a priori jasno, že v systému pensijního pojištění mají nároky na vychovávací příplatek váhu pouze zcela nepatrnou.

Sociální pojištění jakožto pojištění založené na zákonném donucení, může ba musí dále při výpočtu prémie abstrahovati od pohlaví, stavu rodiny a od stáří pojištěnce i stáří dětí a vybíratí ode všech pojištěnců bez rozdílu jedinou průměrnou premii.

V daném případě bylo pro odhad hodnoty nároků na vychovávací příplatek užito kolektivní metody, jejíž podstatu krátce

²⁾ Rohde: Rheinische Werk-Iserburger Hütte.

Amtmann-Pfaffenberger: Oberschles. Knappschaften; viz Amtmann-Pfaffenberger: Zur Mathematik der Pensionsversicherung.

³⁾ Zvláštní obtíž působí na příklad závislost úhrného příplatku na počtu dětí k požitku oprávněných.

podám. Této metody bylo nutno použití, (třeba je možno proti ní činiti vážné námitky), vzhledem k tomu, že nebylo lze měnit⁴⁾ základ výpočtů pro nárok na vychovávací příspěvky, daný novelou pensijního zákona v r. 1914.

Budiž $l(z)$ počet dětí žijících ve stáří z , odvozený z tabulky úmrtnosti dětí⁴⁾; značí-li

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1.04}$$

diskontního činitele při 4% úrokování, jest hodnota spojitého dočasného životního důchodu z -letého dítěte, nejdéle do dokonaného 18. roku věku dána výrazem

$${}^{18}\bar{a}_z = \frac{1}{l_z} \int_0^{18} l_{z+t} \cdot v^t \cdot dt = \frac{1}{D_z} \int_0^{18} D_{z+t} \cdot dt \quad (1)$$

položíme-li, jak zvykem,

$$l_z \cdot v^z = D_z$$

a píšeme-li proměnnou jako index funkce.⁵⁾

Ze statistiky rodin⁶⁾ lze odvoditi jakožto funkci stáří x počet všech sčítaných mužů tohoto stáří L_x a jako funkci stáří x a z počet mužů stáří x , kteří mají děti ve stáří z -let: $L_{x,z}$.

Jest tedy pravděpodobnost pro x -letého muže, míti dítě z -roků staré, dána výrazem⁷⁾

$$d_{x,z} = \frac{L_{x,z}}{L_x}$$

4) V daném případě z tabulky lidové úmrtnosti pruských mužů a žen v periodě 1891—1900 udávající aritmetický průměr čísel úmrtnosti obou pohlaví.

5) Ve skutečnosti počítána hodnota důchodu vzhledem k měsíčnímu vyplácení z výrazu

$${}_{/18-z}a_z^{(12)} = \frac{1}{D} (D_z + D_{z+1} + \dots + D_{18}) - 0.4648 \left(1 - \frac{D_{18}}{D_z} \right),$$

který však liší se jen nepatrně od výrazu (1) pro důchod vyplácený spojitě.

6) V daném případě úřední statistika: „Die Ergebnisse der über die Standesverhältnisse der Privatbeamten im Jahre 1896 eingeleiteten amtlichen Erhebungen“ Vídeň 1898, tab. 10.: „Stáří mužských zaměstnanců a jich dětí pod 20 let.“

7) V cit. statistice jsou o šem funkce L_x a $L_{x,z}$ dány tabelárně jako nespojitě funkce pro celočíselné hodnoty x a z .

a pravděpodobnost mítí dítě vůbec dána výrazem

$$d_x = \frac{\int_0^{18} L_{x,z} \cdot dz}{L_x} \quad (2)$$

Z těchto dat lze vypočísti *průměrné zatížení* vznikající úmrtím nebo invalidisováním x -letého aktivního pojištěnce přiznáním dočasného důchodu (vychovávacího příplatku) pro každé dítě v obnosu ročně 1:

$${}^{18}\bar{a}_{x(z)}^a = \frac{1}{L_x} \int_0^{18} L_{x,z} \cdot {}^{18}\bar{a}_z \cdot dz \quad (3)$$

Tato funkce je patrně závisla pouze na x . Podobně jest průměrné zatížení, vznikající přiznáním vychovávacího příplatku ročně 1 pro každé dítě x -letého invalidy dáno výrazem

$${}^{18}\bar{a}_{x(z)}^i = \frac{1}{L_x^i} \int_0^{18} L_{x,z}^i \cdot {}^{18}\bar{a}_z \cdot dz,$$

kde L_x^i a $L_{x,z}^i$ vyjadřuje obdobně, jak rozdělují se děti na x -leté invalidy.

K výpočtu zatížení, vznikajícího vychovávacími příplatky v obnosu 1 ročně pro dítě, přiznanými spolu s *invalidním důchodem*, vede tato úvaha:

Značí-li l_x intenzitu invalidisování pro x letého aktivního pojištěnce a l_x^{aa} počet aktivních pojištěnců v stáří x , daný dekrementní tabulkou aktivních osob, jest počet osob, které se staly invalidními v časovém momentu $(t, t+dt)$ ve stáří $x+t$ dán součinem

$$l_{x+t}^{aa} \cdot l_{x+t} \cdot dt$$

a zatížení plynoucí z přiznání dočasných dětských důchodů ročně 1 následkem invalidisování v intervalu $\{t, t+td\}$ má patrně hodnotu:

$$l_{x+t}^{aa} \cdot l_{x+t} \cdot {}^{18}\bar{a}_{x+t(z)}^a \cdot v^t dt \quad (4)$$

Ale ježto nárok na vychovávací příplatek zaniká též úmrtím invalidního důchodce, kdy vzniká nárok na vychovávací

příspěvek, pravidelně dvakrát vyšší, jest od tohoto součinu odečísti opravnou hodnotu, která se obdrží takto:

Z invalidů stáří $x+t$

$$l_{x+t}^{aa} \cdot l_{x+t} \cdot dt$$

zemře v časovém intervallu $t+\tau$, $t+\tau+dt$

$$l_{x+t}^{aa} \cdot l_{x+t} \cdot dt \frac{l_{x+t+\tau}^i}{l_{x+t}^i} \mu_{x+t+\tau}^i d\tau,$$

kde značí $\mu_{x+t+\tau}$ intenzitu úmrtnosti invalidů ve stáří $x+t+\tau$ a l_{x+t}^i počet invalidů stáří $x+t$ v dekrementní tabulce invalidů; jejich smrtí uvolní se z vychovávacích příplatků hodnota

$$l_{x+t}^{aa} \cdot l_{x+t} \cdot dt \frac{l_{x+t+\tau}^i}{l_{x+t}^i} \mu_{x+t+\tau}^i \cdot {}^{18}\bar{a}_{x+t+\tau}^{(z)} \cdot v^{t+\tau} \cdot d\tau. \quad (5)$$

Celkem uvolní se umíráním invalidů vzniklých v časovém intervallu $\{t, t+dt\}$ hodnota, kterou obdržíme, integrujeme-li (5) od $\tau=0$ do stáří $\omega_i - x - t$, kde ω_i je nejvyšší stáří, jež se vyskytuje v tabulce úmrtnosti invalidů; hodnota ta jest tedy dána výrazem

$$l_{x+t}^{aa} \cdot l_{x+t} \cdot dt \int_0^{\omega_i - x - t} \frac{l_{x+t+\tau}^i}{l_{x+t}^i} \mu_{x+t+\tau}^i \cdot {}^{18}\bar{a}_{x+t+\tau}^{(z)} \cdot v^{t+\tau} \cdot d\tau. \quad (6)$$

Jest tedy zatížení vznikající přiznáním vychovávacích příplatků k invalidním důchodům osob, které se staly invalidy ve stáří $x+t$ dáno rozdílem výrazů (4) a (6) t. j.

$$v^t \cdot l_{x+t}^{aa} \cdot l_{x+t} \cdot dt \left[{}^{18}\bar{a}_{x+t}^{(z)} - \int_0^{\omega_i - x - t} \mu_{x+t+\tau}^i \cdot {}^{18}\bar{a}_{x+t+\tau}^{(z)} \frac{l_{x+t+\tau}^i}{l_{x+t}^i} \cdot v^\tau \cdot d\tau \right] \quad (7)$$

a celkové zatížení z nároku na vychovávací příplatky pro x -leté aktivní pojištěnce obdržíme patrně integrací výrazu (7) podle t ,

tudíž nazveme-li je $\bar{a}_{x(z)}^{ai}$

$$l_x^{aa} \cdot \bar{a}_{x(z)}^{ai} = \int_0^{\omega_a - x} l_{x+t}^{aa} \cdot v^t [{}^{18}\bar{a}_{x+t}^a(z)] \\ - \frac{1}{l_{x+t}^i} \int_0^{\omega_i - x - t} l_{x+t+\tau}^i \cdot \mu_{x+t+\tau}^i \cdot v^\tau \cdot {}^{18}\bar{a}_{x+t+\tau}^i(z) \cdot d\tau] dt.$$

Zavedeme-li označení

$$l_x^{aa} \cdot v^x = D_x^{aa} \\ l_x^i \cdot v^x = D_x^i \\ l_x^i \cdot \mu_x^i \cdot v^x = \bar{C}_x^i$$

a změňme-li integrační proměnné ve vnitřním integrálu substitucí

$$x + t + \tau = \xi$$

a ve vnějším integrálu dosazením

$$x + t = \eta$$

bude

$$D_x^{aa} \cdot \bar{a}_{x(z)}^{ai} = \int_x^{\omega_a} D_{\eta}^{aa} \left[{}^{18}\bar{a}_{\eta(z)}^a - \frac{1}{D_{\eta}^i} \int_{\eta}^{\omega_i} C_{\xi}^i {}^{18}\bar{a}_{\xi(z)}^i \cdot d\xi \right] d\eta.$$

Označíme-li konečně

$$D_x^{aa} \cdot \bar{a}_{x(z)}^{ai} = \bar{N}_{x(z)}^{ai} \\ \frac{1}{D_{\eta}^i} \int_{\eta}^{\omega_i} C_{\xi}^i {}^{18}\bar{a}_{\xi(z)}^i \cdot d\xi = {}^{18}A_{\eta}^k,$$

jest

$$\bar{a}_{x(z)}^{ai} = \frac{\bar{N}_{x(z)}^{ai}}{D_x^{aa}},$$

kde

$$\bar{N}_{x(z)}^{ai} = \int_x^{\omega_a} D_{\eta}^{aa} \left[{}^{18}\bar{a}_{\eta(z)}^a - {}^{18}A_{\eta}^k \right] d\eta. \quad (8)$$

Podle vzorce (8) byly vskutku též hodnoty nároků na výchovácí příplatky k invalidním důchodům počítány s tím rozdílem, že integrace nahrazeny sčítáním, dále, že byl předpokládán stejný rodinný stav u invalidů jako u aktivních, t. j. že položeno bylo

$${}^{18}\bar{a}_{x(z)}^i = {}^{18}\bar{a}_{x(z)}^a,$$

což znamená přecenění hodnoty, ježto rodinný stav invalidů bude jistě menší než u aktivních osob, vzhledem k tomu, že manželství uzavřené ve stavu invalidity nezakládá nároku na důchod vdovský.

Nepřesnost takto vznikající jest však mnohem menší než nepřesnost vznikající z toho, že při konstrukci výrazu (8) vyloučeny jsou nesprávně proti znění zákona z nároku na výchovácí příplatek všechny děti, jež se narodí po nastoupení invalidity otce. Toto značné podcenění nároků, dovoluje použití základních čísel známých již odjinud a dáno jest metodou, použitou v odůvodnění novely z r. 1914 pro ocenění nároku na výchovácí příspěvky, kterou bylo nutno dodržeti.⁸⁾

Čísla $N_{x(z)}^{ai}$ uveřejněná ve výnosu ministerstva sociální péče ze dne 8. dubna 1921 č. 774-IV/3⁹⁾ jsou počítána tedy podle vzorců

$${}^{18}A_x^k = \frac{1}{D_x} \sum C_x^i {}^{18}a_{x+\frac{1}{2}(z)}^{(12)}$$

$$D_{x(z)}^{ai} = 0.85 D_x^{aa} i_x v^{\frac{1}{2}} \left[{}^{18}a_{x+\frac{1}{2}(z)}^{(12)} - {}^{18}A_{x+\frac{1}{2}}^k \right]$$

$${}^{18}A_{x+\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{2} \left({}^{18}A_x^k + A_{x+1}^k \right) N_{x(z)}^{ai} = \sum D_{x(z)}^{ai}$$

při čemž zkrácení o 15⁰/₀ bylo podrženo vzhledem k tomu, že důsledky omezení výchovácích příspěvků pro větší počet dětí na polovinu základního obnosu a přiznání dvojnásobných příspěvků úplným sirotkům byly odhadnuty své doby na 15⁰/₀ původních hodnot.

⁸⁾ Tím vysvětluje se též anomálie, že rozdíl ${}^{18}\bar{a}_{x(z)}^a - {}^{18}A_{x(z)}^k$ je pro stáří 20—30 negativní a tedy i rozdíl $N_{x(z)}^{ai} - N_{x+1(z)}^{ai}$.

⁹⁾ Viz Úřední list z 27. dubna 1921.

Čísla ${}^{18}A_x^k$ byla převzata z Riedlových tabulek.¹⁰⁾

Pro výpočet hodnot přiznaných již nároků na vychovávací příplatek z -letého dítěte k invalidnímu důchodu x -letého otce bylo by třeba použití tabulek funkce o dvou argumentech

$$/ \begin{matrix} a^{(12)} \\ 8-z \end{matrix} \text{ '},$$

t. j. tabulek spojených dočasných důchodů na život x -letého invalidy a z -tého dítěte. Není-li jich, lze použití přibližně hodnot ${}_{18-z}a_z^{(12)}$, kterými je ovšem zatíženi z vychovávacích příplatků přeceněno.

Pro výpočet hodnoty nároků na příplatek vychovávací k starobnímu důchodu x -letého aktivního pojištěnce platí vzorec

$$a_{x(z)}^{aa} = \frac{1}{D_x^{aa}} \left[0.85 D_s^{aa} \cdot {}^{18}a_{s(z)}^a - {}^{18}N_{s(z)}^a \right] = \frac{N_{x(z)}^{aa}}{D_x^{aa}},$$

kdež s značí stáří, v němž je splatný nárok na starobní důchod, a ${}^{18}N_{s(z)}^a$ základní čísla známá z matematického odůvodnění k novele zákona pensijního z r. 1914. Čísla $N_{x(z)}^{aa}$ jsou uveřejněna ve zmíněném výnosu ministerstva sociální péče z 8. dubna 1921 č. 774-IV/3.¹¹⁾

Metoda zde použitá, zvaná kolektivní na rozdíl od individuální metody beroucí ohled na rodinný stav pojištěnce, může být použita v případech, v nichž je pravděpodobno, že složení členstva pensijního ústavu podle stáří a rodinného stavu odpovídá složení materiálu užitého za základ výpočtu, neboť hodnoty pojistné závisí podstatně na tomto složení.

K informaci o číselném významu vzorců budtež uvedeny roční premie pro stáří ξ , pro nárok na vychovávací příplatek $\frac{4}{9}$ po 5. roce příspěvkovém a $\frac{2}{3}$ po 10. roce, počítané dle vzorce

$$p_{\xi} = \left[\frac{40}{9} \left(N_{\xi+5(z)}^{ai} - N_{\xi+10(z)}^{ai} \right) + \frac{20}{3} \left(N_{\xi+10(z)}^{ai} - N_{\xi+v(z)}^{ai} + N_{\xi+v(z)}^{aa(12)} \right) \right] : \left(N_{\xi}^{aa(12)} - N_{\xi+v}^{aa(12)} \right),$$

¹⁰⁾ Riedel: Die neuen 4% Rechnungsgrundlagen der Allgemeinen Pensionsanstalt f. Angestellte 1914.

¹¹⁾ Viz Úřední List ze dne 27. dubna 1921.

kdež ξ značí stáří při vstupu, v čekací dobu pro starobní důchod a kde nevzat ohled na stoupání příplatků mezi 5.—10. rokem příspěvkovým

$$\begin{array}{cccccccc} \xi = & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 & 55 \\ p_{\xi} = & 0.21 & 0.23 & 0.26 & 0.32 & 0.37 & 0.38 & 0.37 & 0.33. \end{array}$$

Tyto hodnoty liší se poněkud od hodnot tabulky 10. po-
jistně matematické zprávy k vládnímu návrhu zákona pensij-
ního¹²⁾ proto, že ve vládním návrhu počítán požitkem vychová-
vacích příplatků až do 20. roku a byla pro výpočet předpoklá-
dána 10-letá čekací doba.

Příspěvky k teorii některých transcendent počtu integrálního.

Píše M. Lerch.

(Pokračování.)

Integrál

$$A(v) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+v} \right) \varphi(x+1) dx \quad (4)$$

má derivaci

$$A'(v) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+1)}{(x+v)^2} dx;$$

integrací po částech plyne

$$A'(v) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi'(x+1)}{x+v} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+v)(x+n)^2};$$

$$\frac{1}{(x+v)(x+n)^2} =$$

$$\frac{1}{v-n} \frac{1}{(x+n)^2} + \frac{1}{(v-n)^2} \frac{1}{(x+v)} - \frac{1}{(v-n)^2} \frac{1}{(x+n)},$$

¹²⁾ Tisk 2.135 zasedání Nár. shr. čl. r. 1920.