Henri Poincaré
Budoucnost mathematiky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 2, 129--144,145--149

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123775

H. Poincaré:

Budoucnost mathematiky.*)

Přeložil dr. B. Bydžovský.

Pro předvídání budoucnosti mathematiky je nejlepší methodou studovati její historii a její přítomný stav.

Není-li to, pro nás mathematiky, postup, který jaksi přísluší našemu povolání? Jsme zvyklí extrapolovati, což je prostředek k odvozování budoucna z minulosti a přítomnosti, a ježto dobře víme, zač tento prostředek stojí, nevydáváme se v nebezpečí, že bychom si činili illusí o dosahu výsledků, kterých nám podává.

Bývali dříve škarohlídci. Rádi říkávali, že všechny řešitelné problémy jsou již dávno rozřešeny, a že po nich je možno již jen paběrkovati. Na štěstí nás upokojuje příklad minulosti. Již často se lidé domnívali, že rozřešili všechny problémy, anebo alespoň že sestavili seznam těch, jež řešení připouštějí. A potom význam slova řešení se rozšířil; problémy neřešitelné staly se ze všech nejzajímavějšími, a naskytly se jiné, na něž se dosud nemyslilo. Pro Řeky bylo to řešení dobré, které užívá jen pravítka a kružítka; v pozdější době to, které se obdrží odmocňováním, potom to, v němž se vyskytují jen funkce algebraické nebo logarithmické. A tak pessimisté stále byli vháněni do úzkých, stále nuceni k ústupu, tak že nyní, myslím, jich skutečně již není.

Není tedy mým úmyslem potírati jich, když přece již vymřeli; víme ovšem, že mathematika se bude dále vyvíjeti, ale

*) Tento essay byl ohlášen jako jedna z hlavních přednášek na IV. mezinárodním kongressu mathematiků konaném v Římě v dubnu t. r. Přednášku přečetl za onemocnělého autora pan Darboux z výtisku již tištěného. Pan autor svolil k uveřejnění překladu v »Časopise«. Pozn. překl.

běží o to, abychom věděli, v jakém směru. Odpovíte mi „ve všech směrech“, a to je částečně pravda; kdyby však to bylo úplně správné, stávala by se věc trochu hrozivou. Naše poklady by nás záhy zaplavily a nakupily by se ve směsici stejně neproniknutelnou, jako byla pro nevědomého neproniknutelna neznámá pravda.

Historik a také fysik musí učiniti výběr z daných faktů; mozek učencův, který je jediným koutkem všehomíru, neobsáhne nikdy celý vesmír, tak že mezi nesčetnými fakty, jichž nám poskytuje příroda, jsou takové, jež necháme stranou, a jiné, jež podržíme. Je tomu stejně, a fortiori, v mathematice; ani mathematik nemůže podržeti v paměti směsici všech faktů, které se mu naskýtají; tím spíše, že tyto fakty si tvoří on sám — málem bych byl řekl: jeho rozmar. Neboť on veskrze vykonstruuje novou kombinaci tím, že uvede ve spojení její prvky; obyčejně nikoliv příroda sama přináší mu ji zcela hotovou.

Stává se ovšem někdy, že mathematik chopí se problému, aby vyhověl nějakému požadavku fysiky; že fysik nebo inženýr od něho žádají, aby vypočetl nějaké číslo vzhledem k určité applikaci. Má se proto říci, že my mathematikové máme jen vyčkávati objednávek a místo abychom pěstovali svou vědu pro své potěšení, máme jedině hleděti vyhověti přáním zákazníků? Nemá-li mathematika jiného úkolu, než pomáhati těm, kdož zpytují přírodu, musíme právě od těchto vyčkati bitevní heslo. Je toto nazírání oprávněné? Jistě nikoli; kdybychom nebyli pěstovali exaktní vědy pro ně samotné, nebyli bychom vytvořili mathematiku jako nástroj, a byli bychom odzbrojeni v den, kdy by se bylo ozvalo bitevní heslo fysikovo.

Také fysikové nečekají, až nějaká naléhavá potřeba hmotného života je přinutí studovati určitý zjev, a činí zcela dobře; kdyby učenci 18. století byli nedbali elektřiny, považujíce ji za pouhou kuriositu bez praktického významu, neměli bychom ve století 20. ani telegrafie, ani elektrochemie, ani elektrotechniky. Jsou-li tedy fysikové nuceni si vybrati, nedávají se ve svém výběru vésti pouze zřetelem užitečnosti. Jak si tedy počínají při výběru přírodních úkazů? Můžeme to snadno říci; fysiky zajímají právě ty fakty, které mohou vésti k nalezení zákona; jsou to tedy ty, jež jsou analogické mnoha jiným faktům, které se nám nejeví jako osamocené, nýbrž jako úzce seskupené s jinými. Osamocený fakt padne každému do očí, člověku prostému jako učenci. Ale jediné pravý fysik dovede viděti svazek, jenž víže řadu faktů, jichž analogie je hluboká, avšak skrytá. Anekdota o Newtonově jablku patrně není pravdiva, avšak je symbolická; mluvme o ní tedy, jako by byla pravdiva. Nuže, musíme se domnívati, že před Newtonem mnoho lidí vidělo padati jablka; žádný z toho nedovedl ničeho usouditi. Fakty by byly neplodné, kdyby nebylo duchů schopných učiniti z nich výběr rozpoznáním těch, za nimiž se něco skrývá, a poznati to, co se za nimi skrývá — duchů, kteří pod hrubým faktem vycítí jeho duši.

V mathematice činíme zcela totéž; z rozmanitých prvků, jimiž disponujeme, můžeme vytvořiti milliony různých kombinací; ale jediná taková kombinace, pokud je osamocena, je naprosto bez ceny; často jsme si dali mnoho práce, abychom ji sestrojili, ale není to naprosto k ničemu, leč snad k poskytnutí látky k úloze pro střední školu. Bude tomu zcela jinak toho dne, kdy tato kombinace nalezne své místo ve třídě kombinací analogických, a kdy my tuto analogii postřehneme; budeme pak míti před sebou ne fakt, nýbrž zákon. A toho dne skutečným vynálezcem nebude dělník, který trpělivě vybudoval několik těchto kombinací, nýbrž ten, kdo ukázal, že jsou příbuzné. První viděl pouze hrubý fakt, avšak jen ten druhý vycítil duši fakta. Často mu postačilo vynalézti nové slovo, aby dokázal tuto příbuznost, a toto slovo bylo tvůrčí; dějiny vědy poskytly by nám množství příkladů, které jsou vám běžné.

Proslulý filosof vídeňský Mach pravil, že úlohou Vědy je zjednati úsporu myšlení, stejně jako stroj zjednává úsporu práce. A to je velmi správné. Divoch počítá na prstech anebo sbíraje oblázky. Naučíme-li děti násobilce, uspoříme jim na příště nesčetné výkony s oblázky. Kdosi kdys poznal na oblázcích, nebo jinak, že 6kráte 7 je 42 a měl nápad poznamenati tento výsledek, a právě proto není nutno podnikati to znovu. Onen člověk nepromarnil svůj čas, třebas počítal jen sobě pro potěšení; jeho výkon mu zabral jen dvě minuty času, ale byl by si vyžádal celkem dvě milliardy minut, kdyby později milliarda lidí byla musila jej opakovati.

Důležitost fakta měří se tedy jeho užitkem, t. j. kvantitou myšlení, kterou nám umožňuje ušetřiti.

Ve fysice fakty o velkém užitku jsou ty, jež se podřazují zákonu velmi obecnému, poněvadž dovolují předvídati velmi mnoho jiných; a v mathematice není tomu jinak Podjal jsem se složitého výpočtu a dospěl jsem pracně k výsledku; nebudu odměněn za svou námahu, jestliže jsem se tím nestal schopen předvídati výsledky jiných výpočtu obdobných a s jistotou je říditi vystříhaje se při tom tápání, s nímž jsem se po prvé musil smířiti. A naopak, nepromarnil jsem svůj čas, jestliže právě toto tápání na konec mně odhalilo hlubokou analogii problému, o němž jsem pracoval, s mnohem rozsáhlejší třídou problémů jiných; jestliže mně ukázalo současně, v čem se podobají a v čem liší, slovem, jestliže mně dalo tušiti možnost zevšeobecnění. V tom případě jsem nabyl ne nového výsledku, nýbrž nové síly.

Jednoduchý příklad, který se nám především namane, je algebraická formule, jež nám podává řešení celého typu číselných problémů, jestliže na konec nahradíme písmena čísly. Takovou formulí jediný algebraický výpočet ušetří nám práci spojenou se stálým opakováním nových výpočtu číselných. To však je příklad jen hrubý; každý cítí, že jsou analogie, jichž nelze vyjádřiti formulí a které jsou ze všech nejcennější.

Má-li nový výsledek cenu, má ji proto, že spojuje prvky ode dávna známé, avšak dotud rozptýlené a zdánlivě cizorodé, a tím náhle zavádí řád tam, kde zdál se vládnouti nepořádek. Umožňuje nám pak rázem přehlédnouti i každý tento prvek i místo, které v celku zaujímá. Tento nový fakt je nejen sám sebou cenný, nýbrž jediné on dodává ceny všem dosavadním faktům, které vespolek víže. Náš duch je sláb jako naše smysly; ztratil by se ve složitosti světa, kdyby tato složitost nebyla harmonická, viděl by jen její jednotlivosti, jako člověk krátkozraký, a byl by nucen zapomenouti každou tuto jednotlivost, než by zkoumal následující, neboť nebyl by schopen vše obsáhnouti. Jediné fakty hodné naší pozornosti jsou ty, jež zavádějí řád v tuto složitost a tak ji činí přístupnou.

Mathematikové přikládají velkou důležitost eleganci svých method a svých výsledků; a v tom není pouhý dilettantismus.

Co v nás vlastně vzbuzuje pocit elegance při nějakém řešení nebo důkazu? Harmonie rozných součástí, jejich symmetrie, jejich zdařilé vyvážení; slovem vše to, co zavádí ve výpočet řád, vše, co mu dodává jednoty, a co nám tedy umožňuje, abychom jasně viděli a pochopili jeho celek současně s jednotlivostmi. Ale to zároveň také zpusobuje jeho velký užitek; neboť čím jasněji uvidíme tento celek a čím spíše jej přehlédneme jediným pohledem, tím lépe postřehneme jeho analogie s jinými sousedními předměty, a tím větší tedy budeme míti naději, že uhodneme možná zevšeobecnění. Elegance muže míti svuj puvod v pocitu překvapení, vzbuzeného neočekávaným střetnutím předmětu, jež nejsme zvyklí sbližovati; i v tom je plodná, ježto nám tak odhaluje příbuznost dotud neznámou; je i tehdy plodná, když má svůj vznik jen v kontrastu mezi jednoduchostí prostředků a složitostí předloženého problému, neboť pak nás vede k úvahám o příčině tohoto kontrastu a zpravidla nás přivede k poznání, že tato příčina není nahodilá, nýbrž tkví v nějakém netušeném zákonu. Zkrátka: pocit mathematické elegance není nic jiného, než uspokojení vyvolané tím, že řesení, které jsme právě nalezli, přizpusobuje se jaksi potřebám našeho ducha, a právě pro toto své přizpusobení může se státi pro nás nástrojem. Je tedy toto esthetické uspokojení spojeno s úsporou myšlení. Takovým zpusobem na př. karyatidy z Erechtheia zdají se nám elegantními, poněvadž nesou těžke břímě s lehkostí a takřka radostně, a vzbuzují v nás tak dojem úspory úsilí.

Z téhož důvodu nejsme uspokojeni, když počet poněkud dlouhý nás dovedl k jednoduchému a překvapujícímu výsledku, pokud jsme neukázali, že bychom byli *mohli předvídati* ne-li úplný tento výsledek, alespoň jeho nejvýznačnější rysy. Proč to? Co nám brání spokojiti se s výpočtem, který, jak se zdá, nám řekl vše, co jsme si přáli věděti? Je to proto, že v případech analogických nemohl by nám onen dlouhý výpočet znovu posloužiti, kdežto s úvahou často napolo intuitivní, která by nám byla umožnila předvídati, tomu tak není. Ježto tato úvaha je krátká, přehlédneme rázem všechny její části, takže ihned zpozorujeme, co je třeba na ní změniti, abychom ji přizpusobili všem problémům téže povahy, které se mohou naskytnouti. A ježto nám dovoluje předvídati, zda řešení těchto problému bude jednoduché, ukazuje nám alespoň, stojí-li za to podniknouti výpočet.

Co jsme právě řekli, stačí, aby se ukázalo, jak marná by byla snaha nahraditi svobodnou iniciativu mathematikovu jakýmkoli mechanickým výkonem. Chce-li kdo obdržeti výsledek mající skutečnou cenu, nestačí, aby přemílal výpočty nebo měl stroj, který by věci uváděl v pořádek; ne pouze pořádek, nýbrž pořádek neočekávaný má cenu. Stroj může hrýzti na hrubém faktu, duše faktu mu vždy unikne.

Od polovice minulého století mají mathematikové stále větší péči o dosažení naprosté přesnosti; jsou v právu a tato snaha bude se uplatňovati stále více. V mathematice přesnost není vše, ale bez ní není ničeho; důkaz, který není přesný, je holé nic. Myslím, že nikdo nepopře této pravdy. Kdybychom ji však pojímali příliš doslovně, byli bychom vedeni k závěru, že na př. před r. 1820 mathematiky nebylo; to by bylo tvrzení zjevně přemrštěné; geometrové té doby rádi mlčky předpokládali to, co my vysvětlujeme rozvláčnými výklady; tím nemá býti řečeno, že toho vůbec neviděli; ale oni přes tu věc přecházeli příliš rychle, a aby ji dobře postřehli, byli by musili si dáti práci vysloviti ji.

Jenom že stále je nutno opětovně to říkati: ti, kdož první pečovali především o přesnost, podali nám úvahy, o jichž napodobení se můžeme pokusiti; mají-li však důkazy v budoucnu býti vybudovány dle tohoto vzoru, nabudou mathematická pojednání značné délky; a této rozvláčnosti nebojím se pouze proto, že se obávám přeplnění knihoven, nýbrž proto, že se bojím, aby naše důkazy stávajíce se rozvláčnými neztrácely ráz harmonie, jejíž prospěšný úkol jsem právě vyložil.

Je třeba cíliti k úspoře myšlení a nestačí tedy podávati vzory pro napodobení. Je třeba, aby po nás mohli se obejíti bez těchto vzorů a místo aby opakovali úvahu již provedenou, mohli ji stručně shrnouti v několik řádek. A to se již leckdy podařilo; existovala na př. celá třída úvah, jež všechny byly si podobny a s nimiž jste se všude setkávali; byly dokonale přesné, avšak dlouhé. Jednoho dne bylo vymyšleno slovo „stejnoměrná konvergence“, a jediné toto slovo učinilo ony úvahy zbytečnými; nebylo již třeba jich opakovati, ježto bylo možno mlčky je před pokládati. Ti, kdož obtíže jemně rozbírají, mohou nám tedy posloužiti dvojnásob; jednak tím, že nás učí, abychom v případě potřeby činili jako oni, ale hlavně, že nám umožňují, abychom co nejčastěji nečinili jako oni, při tom však neobětujíce ničeho z přesnosti.

Právě jsme viděli na příkladu, jaká je v mathematice důležitost slov, avšak mohl bych uvesti mnoho jiných. Není skoro k uvěření, kolik myšlení uspoří — jak říkal Mach — slovo vhodně volené. Nevím, neřekl-li jsem již někde, že mathematika je umění označiti týmž jménem věci rozdílné. Musíme se dorozuměti. Je záhodno, aby tyto věci rozdílné látkou byly podobny formou, aby byly takřka ulity v témž kadlubu. Byla-li volena vhodná mluva, shledáme k svému údivu, že všechny důkazy provedené pro známý předmět bezprostředně se hodí na mnoho nových předmětů, není třeba ničeho na nich měniti, ani slov, ježto jména stala se totožna.

Příklad, který se tu ihned vybaví, jsou kvaterniony, o nichž se nebudu šířiti. Slovo dobře zvolené nejčastěji stačí k odstranění výjimek, které připouštěla pravidla vyslovená starou mluvou; proto byla vymyšlena čísla záporná, hodnoty imaginární, body v nekonečnu a co všechno ještě! A výjimky - nezapomínejme — jsou zhoubné, ježto zakrývají zákony.

Nuže, to je jeden ze znaků, dle nichž poznáváme fakty o velkém užitku; jsou to ty, jež umožňují tyto prospěšné novoty v řeči. V takovýchto případech je hrubý fakt někdy bez veliké zajímavosti, mohl býti již často konstatován, aniž se tím valně posloužilo vědě; nabude ceny až v ten den, kdy obezřetnější myslitel postřehne příbuznost, na kterou poukáže, a symbolisuje ji určitým slovem.

Ostatně fysikové jednají naprosto stejně; vynašli slovo „energie", a toto slovo bylo zázračně plodné, neboť ono rovněž tvořilo zákon vylučujíc výjimky, ježto dávalo totéž jméno věcem rozdílným látkou a podobným formou.

Mezi slovy, která působila nejpříznivějším vlivem, uvedu „grupu" a „invariant". Odkryla nám podstatu mnoha mathematických úvah; ukázala nám, v jak mnoha případech staří mathematikové brali v úvahu grupy, aniž o tom věděli, a jak, právě když se domnívali, že jsou navzájem velmi vzdáleni, shledali náhle, že jsou si blízci, aniž chápali proč.

Dnes bychom řekli, že brali v úvahu grupy isomorfní. Víme nyní, že v grupě málo nás zajímá látka, že záleží jen na formě, a že známe-li dobře jednu grupu, již tím známe všechny grupy isomorfní; a dík slovům „grupa" a „isomorfismus" — která v několik slabik shrnují toto subtilní pravidlo a rychle je činí běžným každému — je přechod bezprostřední a může býti vykonán bez jakéhokoliv úsilí myšlenkového. Pojem grupy víže se ostatně k pojmu transformace; proč přikládáme takovou cenu odkrytí nové transformace? poněvadž nám umožňuje z jediné poučky vyvoditi deset nebo dvacet jiných; má touž hodnotu jako nula připsaná v pravo k celému číslu.

Co dosud bylo uvedeno, určovalo až podnes směr postupu mathematické vědy, a totéž zajisté bude jej určovati i v budoucnosti. Avšak na tento postup působí také povaha naskýtajících se problémů. Nemůžeme zapomenouti, co má býti naším cílem; dle mého náhledu tento cíl je dvojí; naše věda sousedí s filosofií i s fysikou, a my pracujeme pro obě tyto své sousedky; proto vždy jsme viděli a stále uvidíme mathematiky postupovati ve dvou protivných směrech.

Jednak musí mathematika uvažovati sama o sobě, a to je prospěšno, neboť tím, že uvažuje sama o sobě, uvažuje o lidském duchu, který ji stvořil, tím spíše, že ona je ten z jeho výtvorů, pro nějž si nejméně vypůjčil z vnějšího světa. Proto jsou užitečné jisté spekulace mathematické, jako ty, jež směřují ke studiu postulátů, neobvyklých geometrií, funkcí o nezvyklém průběhu. Čím více se tyto spekulace vzdálí od nejobyčejnějších pojmů a tím tedy od přírody a applikací, tím lépe nám ukáží, co dovede lidský duch, když se stále více zbavuje tyranie vnějšího světa, a tím lépe nás seznámí s jeho podstatou

Avšak jádro naší armády nutno říditi směrem opačným, směrem k přírodě.

Tam se setkáváme s fysikem nebo inženýrem, kteří nám praví: „Mohli byste mně integrovati takovou a takovou differenciální rovnici, potřeboval bych ji ode dneška za týden pro jistou konstrukci, která musí býti dokončena toho a toho dne." „Tahle rovnice," odpovíme, „nenáleží do žádného typu rovnic, jež lze integrovati, víte, že jich není mnoho." „Ano, vím to, ale k čemu tedy jste?" Většinou by stačilo se dohodnouti; neboť inženýr ve skutečnosti nepotřebuje integrál vyjádřený v ukončeném tvaru; potřebuje znáti všeobecný průběh integrální funkce, anebo by prostě chtěl míti určité číslo, které by se snadno dalo odvoditi z tohoto integrálu, kdybychom jej znali. Obyčejně ho neznáme, avšak bylo by možno vypočísti číslo bez něho, kdybychom přesně věděli, jaké číslo inženýr potřebuje a v jakém přiblížení.

Dříve byla rovnice pokládána za rozřešenou jen tehdy, když její řešení se dalo vyjádřiti konečným počtem známých funkcí; ale to je možno sotva v jednom případu ze sta. Co však můžeme vždy učiniti, či spíše oč máme vždy se snažiti, je toto: rozřešiti problém, řekl bych, *kvalitativně*, t. j. snažiti se poznati povšechný tvar křivky vyjadřující neznámou funkci.

Zbývá pak nalézti kvantitativní řešení problému; nemůže-li však neznámá býti určena konečným výpočtem, lze ji vždy vyjádřiti nekonečnou řadou konvergentní, která umožňuje vypočísti ji. Lze to však pokládati za skutečné řešení? Vypravuje se, že Newton sdělil Leibnizovi anagram asi takový: *a a a a a b b b c c c c i i* atd. Leibniz mu ovšem pranic nerozuměl; ale my, kteří máme klíč, víme, že tento anagram znamená, přeložíme-li jej do moderní řeči: „Dovedu integrovati všechny differenciální rovnice", což nás přivádí k úsudku, že Newton měl zpropadené štěstí nebo že si činil mimořádné illuse. On však chtěl prostě říci, že dovede vytvořiti (methodou neurčitých součinitelů) řadu mocností, jež formálně hoví předložené rovnici.

Takové řešení by nás dnes neuspokojilo, a to z dvou důvodů; poněvadž konvergence je příliš pomalá a poněvadž členy po sobě následují bez jakékoliv zákonitosti. Naproti tomu zdá se nám, že řada Θ vyhovuje všem požadavkům, jednak, poněvadž konverguje velmi rychle (to je pro praktika, který si přeje míti své číslo co nejrychleji), jednak, poněvadž jediným pohledem postřehneme zákon, jímž se řídí členy (to zase vyhovuje esthetickým potřebám theoretika).

Ale potom není již problémů řešených a neřešených; jsou jen problémy *více nebo méně* řešené, podle toho, jsou-li řešeny řadou, jež konverguje s větší nebo menší rychlostí, nebo řízeny zákonem více nebo méně harmonickým. Stává se nicméně, že řešení nedokonalé nás uvádí na lepší řešení. Někdy řada konverguje tak zvolna, že výpočet je nemožný a že se podařilo jen dokázati možnost problému.

A tenkrát inženýr to shledává směšným, a má pravdu, ježto takové řešení mu nepomůže, aby dokončil svou konstrukci v určený den. On se málo stará o to, bude-li to užitečno inženýrům 22. století; my smýšlíme jinak a jsme někdy šťastnější, že jsme uspořili den práce svým vnukům, než kdybychom uspořili hodinu svým současníkům.

Někdy nazdařbůh zase zkoušejíce najdeme takřka empiricky formuli dostatečně konvergentní. Co chcete více? řekne nám inženýr; avšak my přes to přese všechno nejsme spokojeni; byli bychom chtěli *předvídati* tuto konvergenci. Proč? poněvadž kdybychom byli dovedli ji předvídati v jednom případě, dovedli bychom ji předvídati po druhé. Věc se nám zdařila, to však je málo, nemáme-li vážnou naději, že toho budeme moci užíti znovu.

Jak věda postupně se rozvíjí, stává se nesnadnější celou ji obsáhnouti; pak se snažíme rozřezati ji na kusy a spokojiti se jedním kusem: zkrátka specialisovati se. Kdybychom pokračovali v tomto smyslu, byla by to nepříjemná překážka pokrokům Vědy. Její pokrok může se díti — jak jsme již řekli — neočekávaným sblížením jejích různých částí. Příliš se specialisovati znamenalo by vzdáti se těchto sblížení. Doufejme, že kongressy, jako je tento, uvádějíce nás ve vzájemný styk, otevrou nám rozhled na pole sousedovo, přinutí nás srovnati je s naším, vyjíti trochu z naší vesničky, a stanou se tak nejlepším lékem proti nebezpečí, na něž jsem právě upozornil.

Avšak příliš jsem se zdržel při všeobecných vývodech, je na čase obrátiti se k jednotlivostem.

Učiňme přehlídku jednotlivých zvláštních nauk, jichž souhrn tvoří mathematiku; vizme, co každá z nich provedla, kam směřuje a čeho se lze od ní nadíti. Jsou-li názory svrchu uvedené správny, musíme nahlédnouti, že velké pokroky doby minulé nastaly, když dvě tyto nauky se sblížily, když si uvědomili podobnost jich formy přes rozdílnost látky, když jedna se utvářila dle vzoru druhé, takže mohly využíti vzájemně svých úspěchů. Současně musíme zahlédati ve sblíženích téhož druhu pokroky v budoucnosti.

Arithmetika.

Pokroky arithmetiky byly pomalejší než pokroky algebry a analyse, a je snadné pochopiti proč. Pocit spojitosti je cenný vůdce, který vypovídá službu arithmetikovi; každé celé číslo je odděleno od ostatních, má takřka svou vlastní individualitu; každé z nich je jakousi výjimkou, a proto všeobecné věty jsou asi vzácnější v theorii čísel a proto také ty, jež existují, jsou skrytější a déle budou unikati badatelům.

Je-li arithmetika pozadu za algebrou a analysí, nejlepší, co může činiti, je to, aby se hleděla utvářiti dle vzoru těchto věd, aby pak s prospěchem užila toho, oč jsou před ní. Arithmetik musí tedy vzíti za vodítko analogie s algebrou. Tyto analogie jsou četné, a nebyly-li v mnoha případech ještě zkoumány tak zevrubně, aby jich bylo možno užíti, tuší se alespoň ode dávna, a sama mluva v obou vědách užívaná ukazuje, že byly zpozorovány. Takovým způsobem se mluví o číslech transcendentních, čímž si uvědomujeme, že budoucí klassifikace těchto čísel má již za vzor klassifikaci transcendentních funkcí, a přece není ještě dobře viděti, jak bude možno přejíti od jedné klassifikace ke druhé; kdybychom to však byli postřehli, byla by věc již vykonána a nebyla by úlohou budoucnosti.

První příklad, který mne napadá, je theorie kongruencí, kde shledáváme dokonalý parallelismus s theorií algebraických rovnic. Jistě se podaří doplniti tento parallelismus, který asi existuje na př. mezi theorií algebraických křivek a theorií kongruencí o dvou proměnných. A až budou rozřešeny problémy týkající se kongruencí o několika proměnných, bude učiněn prvý krok k řešení mnoha otázek neurčité analyse.

Jiný příklad, kde však analogie byla zpozorována až dodatečně, poskytuje nám theorie těles a ideálů. Abychom si k ní zjednali protějšek, uvažujme křivky vedené na ploše; existujícím číslům budou odpovídati úplné průseky, ideálům neúplné průseky, prvoideálům nerozložitelné křivky; rozmanité třídy ideálů mají také své analogie.

Není pochyby, že tato analogie může objasniti theorii ideálů, nebo theorii ploch, nebo snad obě zároveň.

Theorie forem, zvláště forem kvadratických, je co nejúžeji spojena s theorií ideálů. Mezi arithmetickými theoriemi tato se ustavila jedna z prvních, což se stalo tehdy, když se podařilo uvésti v ni jednotu uvažováním grup lineárných transformací.

Tyto transformace umožnily klassifikaci a tím uspořádání. Snad nám vydaly již všechen užitek, který jsme od nich mohli očekávati; jsou-li však tyto lineárné transformace příbuzné geometrickým perspektivnostem, poskytuje nám analytická geometrie mnoho jiných transformací (jako na př. birationální transformace algebraické křivky), jichž arithmetické analogie vyhledávati bude s výhodou. Tyto budou tvořiti beze vší pochyby rozpojité grupy, jichž základní obor (domaine fondamental) bude třeba nejprve zkoumati a to bude klíčem všeho. Nepochybuji, že i v tomto studiu bude třeba užíti Minkowského „Geomerie der Zahlen“.

Myšlenka, jejíž obsah nebyl ještě úplně vyčerpán, je zavedení spojitých proměnných v theorii čísel provedené Hermitem. Víme nyní, co znamená. Vezměme za východisko dvě formy F a F', z nichž druhá je kvadratická definitní, a užijme na ně téže transformace; je-li forma F' po transformaci redukována, řekneme, že transformace je redukována a že také forma F po transformaci je redukována. Z toho plyne, může-li se forma F transformovati v samu sebe, že může míti několik forem redukovaných; ale tato obtíž je podstatná a nelze se jí vyhnouti žádnou oklikou; není však na překážku tomu, aby právě tyto redukované formy neumožnily klassifikaci forem. Je jasno, že tato myšlenka, jíž bylo dosud užito jen u forem a transformací velmi speciálních, může býti rozšířena na grupy transformací nelineárných; má dosah mnohem větší a nebyla ještě vyčerpána.

Oborem arithmetiky, kde jednota, jak se zdá, naprosto schází, je theorie prvočísel; byly nalezeny jen zákony asymptotické a nelze asi čekati jiných; avšak tyto zákony jsou osamoceny a lze k nim dospěti jen cestami různými, které, jak se zdá, nemohou spolu souviseti. Domnívám se, že tuším, odkud vyjde žádaná jednota, avšak tuším to velmi neurčitě; vše patrně bude převedeno na studium jisté třídy transcendentních funkcí, které umožní počítati asymptoticky jisté funkce velmi velkých čísel, provede-li se studium jich singulárních bodů a užije se methody páně Darbouxovy.

Algebra.

Theorie algebraických rovnic bude ještě dlouho poutati pozornost mathematiků; hlediska, s nichž lze přistoupiti k jich studiu, jsou četná a rozmanitá; nejdůležitější zajisté je theorie grup, k níž se ještě vrátíme. Ale je tu také otázka číselného výpočtu kořenů a diskusse počtu reálných kořenů. Laguerre ukázal, že Sturm neřekl vše o této věci. Je možno studovati systém invariantů neměnících znaménka, když se nemění počet reálných kořenů. Lze také utvořiti mocninné řady vyjadřující funkce, jichž singulárními body budou jednotlivé kořeny algebraické rovnice (na př. rationálné funkce, jichž jmenovatelem je levá strana anullované rovnice); koefficienty členů vyšších stupňů podají nám jeden kořen s přiblížením více méně dobrým; v tom je zárodek způsobu numerického výpočtu, jejž bude možno soustavně prostudovati.

Asi před čtyřiceti lety zdálo se, že studium algebraických forem absorbuje celou algebru; dnes toto studium je opuštěno; nicméně není látka vyčerpána; je jen třeba ji rozšířiti, na př. tím, že se neomezíme jen na útvary invariantní vůči lineárným transformacím, nýbrž obrátíme se k těm, jež přísluší libovolné grupě. Věty dříve získané přivedou nás takovým způsobem k jiným všeobecnějším, které se kolem oněch seskupí, stejně jako krystal vzrůstá v roztoku. Co pak se týče známé věty Gordanovy, že počet různých invariantů je omezený, věty, jejíž důkaz Hilbert tak šťastně zjednodušil, zdá se mi, že nás přivádí k tomu, položiti si otázku mnohem všeobecnější: „je-li dáno nekonečně mnoho celistvých mnohočlenů, jež algebraicky závisí na konečném počtu z nich, lze je vždycky odvoditi sečítáním a násobením konečného počtu daných polynomů?

Nesmíme se domnívati, že algebra je ukončena, ježto nám podává pravidla pro utvoření všech možných kombinací; zbývá hledati kombinace zajímavé, ty, jež vyhovují té či oné podmínce. Tak vznikne jakási neurčitá analyse, kde neznámými nebudou již celá čísla, nýbrž mnohočleny. Tentokráte pak algebra vezme si za vzor arithmetiku, dávajíc se vésti analogií celého čísla buď s celistvým mnohočlenem o libovolných koefficientech, nebo s celistvým mnohočlenem o celistvých koefficientech.

Differentiální rovnice.

Pro lineárné rovnice differentiální bylo již učiněno mnoho a zbývá jen dokončiti, co bylo počato. Ale pokud se týče nelineárných rovnic differentiálních, jsme daleko méně pokročilí. Naděje, že by se dala integrace provésti na základě známých funkcí, je již dávno ztracena; je tedy nutno studovati právě funkce definované těmito differentiálními rovnicemi a především pokusiti se o systematickou klassifikaci těchto funkcí; prvních základů této klassifikace poskytne nám bezpochyby studium způsobu, jakým rostou tyto funkce v blízkosti singulárních bodů, ale nebudeme spokojeni, pokud nenalezneme jistou grupu transformací (na př. transformací Cremonových), která bude míti pro differentiální rovnice týž význam, jaký má pro křivky algebraické grupa transformací birationálních. Pak budeme moci seřaditi do téže třídy všechny rovnice, vzniklé transformací téže rovnice. Zase budeme míti za vůdce analogii s theorií již provedenou, totiž s theorií birationálních transformací a rodu algebraické křivky.

Možno si předložiti úlohu převésti studium těchto funkcí na studium funkcí jednoznačných, a to dvěma způsoby: víme, platí-li $y = f(x)$, že lze, ať je funkce $f(x)$ jakákoliv, vyjádřiti y a x jednoznačnými funkcemi pomocné proměnné t; je-li však $f(x)$ řešení differentiální rovnice, v kterém případě budou také pomocné funkce jednoznačné vyhovovati differentiálním rovnicím? Toho nevíme; také nevíme, v kterých případech lze obecný integrál vyjádřiti ve tvaru $F(x, y) =$ arbitrární konstantě, kde $F(x, y)$ je jednoznačná funkce.

Upozorním ještě na kvalitativní diskussi křivek definovaných differentiální rovnicí. V nejjednodušším případě, kdy rovnice je prvého řádu a prvého stupně, tato diskusse záleží v určení počtu limitních cyklů. Je velmi choulostivá a může nám ji ulehčiti analogie s hledáním počtu reálných kořenů algebraické rovnice: vyskytne-li se jakýkoliv fakt, jenž učiní patrnou povahu této analogie, budeme si předem jisti jeho plodností.

Differentiální rovnice partiální.

Naše znalost partiálních rovnic differentiálních učinila nedávno značný pokrok objevy Fredholmovými. Zkoumáme-li z blízka podstatu těchto objevů, shledáme, že záležely v tom, že tato nesnadná theorie byla přizpůsobena jiné, mnohem jednodušší, totiž theorii determinantů a systémů rovnic 1. stupně. Ve většině problémů mathematické fysiky jsou rovnice, jež se mají integrovati, lineárné; slouží k určení neznámých funkcí několika proměnných a tyto funkce jsou spojité. Proč to? poněvadž jsme napsali rovnice za předpokladu, že hmota je spojita. Ale hmota není spojita, je utvořena z atomů, a kdybychom byli chtěli napsati tyto rovnice, jak by to byl učinil pozorovatel se zrakem dosti bystrým, aby viděl atomy, nebyli bychom měli malý počet *differentiálních* rovnic pro určení jistých neznámých *funkcí*, byli bychom měli velký počet *algebraických* rovnic pro určení velkého počtu neznámých *konstant*. A tyto algebraické rovnice byly by lineárné, tak že by bylo bývalo možno při nekonečné trpělivosti přímo na ně užíti methody determinantů.

Ale ježto krátké trvání našeho života nám nedovoluje přepychu nekonečné trpělivosti, je třeba počínati si jinak, je třeba přejíti k limitě za předpokladu spojitosti hmoty. Jsou dva způsoby, jak sevšeobecniti theorii rovnic 1. stupně přechodem k limitě. Lze uvažovati nekonečně mnoho diskretních rovnic, s nekonečným počtem neznámých rovněž diskretních. To učinil na př. Hill ve své theorii měsíce. Máme pak nekonečné determinanty, které se mají k obyčejným jako řady ke konečným součtům.

Lze vzíti partiální rovnici differentiální, jež představuje, abych tak řekl, spojitou nekonečnost rovnic, a užíti jí pro určení neznámé funkce, představující spojitou nekonečnost neznámých. Pak máme jiné nekonečné determinanty, které se mají k obyčejným, jako integrály ke konečným součtům. To učinil Fredholm; jeho úspěch opírá se ostatně o tento fakt: jestliže elementy hlavní úhlopříčny v determinantu jsou rovny jednotce, a pokládáme-li ostatní elementy za homogenní v 1. stupni, lze uspořádati rozvoj determinantu spojením v jedinou skupinu souhrnu homogenních členů téhož stupně. Nekonečný determinant Fredholmův dal se spořádati tímto způsobem a stalo se, že vyšla tak řada konvergentní.

Poskytla tato analogie, jež jistě vedla Fredholma, tím všeho, co má poskytnouti? Jistě ne; je-li příčinou úspěchu lineárná forma rovnic, musí býti možno užíti stejných myšlenek ve všech problémech, jež se týkají rovnic tvarem lineárných, ba vůbec obyčejných rovnic differentiálných, ježto jich integraci lze vždy převésti na integraci jedné rovnice *lineárné* obsahující partiální derivace prvého řádu.

Před nějakou dobou mathematikové chopili se problému Dirichletova a ostatních problémů s tím souvisících, užívajíce jiného prostředku, tím, že se vrátili k původní myšlence Dirichletově a hledali minimum jistého omezeného integrálu, ale tentokráte na základě přesných úvah. Nepochybuji, že se podaří bez velkých obtíží sblížiti obě methody a poznati jich vzájemné vztahy, a nepochybuji také, že obě při tom mohou velice získati. Dík panu Hilbertovi, jenž byl tu dvojnásob průkopníkem, kráčí se touto cestou.

Funkce Abelovy.

Je známo, která je základní otázka, kterou zbývá rozřešiti vzhledem k Abelovým funkcím. Abelovy funkce mající původ v integrálech algebraické křivky, nejsou nejvšeobecnější; jsou jen zvláštním případem, a lze je nazvati speciálními funkcemi Abelovými. Jaké jsou jejich vztahy s funkcemi obecnými a jak lze tyto obecné funkce roztříditi? Ještě před nedávnem zdálo se řešení velmi vzdáleným. Dnes však pokládám tento problém za virtuálně řešený, od té doby, co pánové Castelnuovo a Enriques uveřejnili své nejnovější pojednání o integrálech totálních differentiálů variet o více než dvou rozměrech. Víme nyní, že existují Abelovy funkce přidružené křivce a jiné přidružené ke ploše, a že nikdy nebude třeba dostoupiti až k varietám více než dvojrozměrným. Kombinací tohoto výsledku s těmi, jež plynou z prací páně Wirtingerových, překonají se patrně všechny obtíže.

Theorie funkcí.

Chtěl bych promluviti zvláště o funkcích dvou a více proměnných. Analogie s funkcemi jediné proměnné je vodítko cenné, avšak nedostatečné; mezi oběma druhy funkcí je podstatný rozdíl, a pokaždé, když se pokoušíme o sevšeobecnění přechodem od prvého druhu ke druhému, narazíme na neočekávanou překážku; občas se podařilo překonati ji zvláštními umělými obraty, ale často také zůstala až dotud nepřekročitelna. Musíme tedy vyhledávati fakty, jež jsou s to, objasniti nám podstatu tohoto rozdílu mezi funkcemi jedné proměnné a těmi, jež obsahují proměnných více. Bude třeba nejprve bedlivě prohlédnouti umělé obraty, které měly úspěch v jistých zvláštních případech, aby bylo poznáno, co asi mají společného. Proč je konformní zobrazení většinou nemožno v oboru čtyrrozměrném a čím třeba nahraditi je? Není snad skutečné sevšeobecnění funkcí o jedné proměnné v harmonických funkcích o čtyřech proměnných, jichž pouhými zvláštními případy jsou reálné části funkcí o dvou proměnných? Bude možno pro studium transcendentních funkcí o více proměnných získati něčeho z toho, co víme o funkcích algebraických nebo rationálných, čili jinými slovy: v jakém smyslu lze říci, že transcendentní funkce o dvou proměnných mají se k transcendentním funkcím jedné proměnné jako rationálné funkce o dvou proměnných k rationálným funkcím o jedné proměnné?

Je pravda, že lze pro $z = f(x, y)$, pro jakoukoli funkci f, vyjádřiti současně x, y, z jako jednoznačné funkce dvou pomocných proměnných, čili abych užil výrazu již skoro posvěceného užíváním, lze *uniformisovati* funkce o dvou proměnných, jako to činíme u funkcí jedné proměnné? Omezuji se na to položiti tuto otázku, jejíž řešení nám snad podá blízká budoucnost.

Theorie grup.

Theorie grup je rozsáhlý předmět, o němž bylo by možno mnoho říci.

Je mnoho druhů grup, a ať přijmeme jakoukoli klassifikaci, najdeme vždy nové grupy, které se jí nepodřazují. Chci se omeziti ve svém výkladu a promluvím zde jen o spojitých grupách Lie-ových a rozpojitých grupách Galoisových, jež obojí je zvykem označovati jako grupy konečného řádu, ačkoliv to slovo nemá zcela týž význam pro obojí.

V theorii grup Lie-ových jsme vedeni jistou speciální analogií; konečná transformace je výsledek kombinace nekonečně mnoha transformací infinitesimálních. Nejjednodušší případ je ten, kdy tyto infinitesimální transformace se redukují na násobení výrazem $1 + \varepsilon$, pro ε velmi malé. Opakování těchto transformací dá vznik funkci exponentiální; a tak k ní dospěl Neper. My víme, že exponentiela může býti vyjádřena řadou velmi jednoduchou a velmi konvergentní, a analogie nám tedy může ukázati cestu, po níž máme se bráti. Ostatně lze tuto analogii vyjádřiti speciálním symbolismem, o němž s vaším prominutím se zde nebudu šířiti. Jsme již velmi pokročilí v tom směru dík Lie-ovi, Killingovi a Cartanovi; zbývá již jen zjednodušiti důkazy, seřaditi a roztříditi výsledky.

Studium grup Galoisových je mnohem méně pokročilé; to je vysvětlitelno; má to týž důvod, pro který je arithmetika méně pokročilá než analyse, neboť kontinuita poskytla značného usnadnění, jichž dovedli mathematikové s výhodou užíti. Ale na štěstí existuje mezi oběma theoriemi zjevný parallelismus, a bude třeba vynasnažiti se, aby se stával stále zjevnější. Analogie je zcela podobna té, kterou jsme uvedli mezi arithmetikou a algebrou, a bude možno využíti jí stejným způsobem.

Geometrie.

Zdá se, že geometrie nemůže obsahovati ničeho, co by nebylo obsaženo již v algebře nebo v analysi; že fakty geometrické jsou jen fakty algebraické nebo analytické vyjádřené jinou mluvou. Mohlo by se tedy mysliti, že po přehledu, který jsme právě provedli, nezbude nám již nic, co bychom řekli specielně o geometrii. To by znamenalo zneuznávati samu důležitost mluvy dobře utvořené, nechápati, co přidává věcem samým způsob, jímž tyto věci vyjadřujeme a tím zároveň třídíme.

Především nás přivádějí úvahy geometrické k tomu, abychom si kladli nové problémy; jsou to sice, chceme-li, problémy analytické, ale takové, že bychom si je nebyli v analysi nikdy předložili. Analyse z nich má nicméně užitek, jako má užitek z těch, jež je nucena rozřešiti, aby vyhověla požadavkům fysiky.

Velká výhoda geometrie je právě v tom, že v ní mohou smysly přispěti rozumu a pomáhají uhodnouti cestu, kterou se máme bráti; a mnozí rádi převádějí problémy analytické ve tvar geometrický. Na neštěstí nemohou nás naše smysly dovésti daleko a nechají nás na holičkách, jakmile chceme vylétnouti z klassických tří rozměrů. Má tím býti řečeno, že, jakmile vyjdeme z té omezené oblasti, v níž zdá se, naše smysly nás chtějí uzavříti, máme spoléhati již jen na čistou analysi, a že každá geometrie o více než třech rozměrech je prázdná a bezpředmětná? V předcházející generaci největší učenci byli by odpověděli „ano“; dnes však jsme tak spřáteleni s tímto pojmem, že můžeme o něm mluviti i při universitní přednášce, aniž vzbudíme přílišný úžas.

Ale jaký může býti užitek z geometrie vícerozměrné? To se lehce pozná: především nám podává velmi pohodlný způsob vyjadřování, který vystihuje výrazy velmi přesnými to, co by obyčejná mluva analytická řekla v rozvláčných větách. Mimo to tento způsob vyjadřování dává totéž jméno podobným věcem a potvrzuje analogie, jichž zapomenouti nám nedovoluje. Umožňuje nám tedy také orientovati se v tomto prostoru, jenž je pro nás příliš velký a jehož nemůžeme viděti, a sice tím, že nám stále připomíná prostor viditelný, jenž je onoho prostoru obrazem sice neúplným, ale přece jen jeho obrazem. Zde zase, jako ve všech předchozích případech, analogie s tím, co je jednoduché, dovoluje nám pochopiti to, co je složité.

Tato geometrie o více než třech rozměrech není pouhá geometrie analytická, není čistě quantitativní, je také qualitativní a zvláště tím stává se zajímavou. Důležitost „analysis situs“ je ohromná a nelze ani klásti na ni dosti velký důraz;

k důkazu toho stačilo by to, co z ní vytěžil Riemann, jeden z jejích hlavních tvůrců. Je třeba sestrojiti ji úplně ve vyšších prostorech; budeme pak míti nástroj, který nám umožní skutečně viděti v hyperspatiu a vypomoci našim smyslům.

Problémy „analysis situs“ nebyly by se snad ani naskytly, kdybychom byli užívali jen mluvy analytické; či spíše, mýlím se, byly by se jistě naskytly, ježto jich řešení je nezbytné pro celou řadu analytických otázek; ale byly by se naskýtaly osamoceně, jeden po druhém, aniž by bylo možno postřehnouti jich společné pojítko.

K nejnovějším pokrokům geometrie zvláště přispělo zavedení pojmu transformace a grupy. Po tomto zavedení není již geometrie pouhou snůškou vět více méně podivných, jež jdou za sebou a nijak se sobě nepodobají, nýbrž nabyla jednoty. A naopak nesmí historie věd zapomenouti na to, že právě při geometrických problémech bylo počato systematické studium spojitých transformací, takže čistí geometrové svým podílem přispěli k rozvoji pojmu grupy, tak užitečného ostatním odvětvím mathematiky.

Studium bodových skupin na algebraické křivce dle způsobu Brill-Noetherova poskytne nám ještě užitečných výsledků, buď přímo, buď jako vzor jiným analogickým theoriím. A tak vidíme, jak se vyvíjí celá nová kapitola geometrie, v níž křivky vedené na ploše mají podobnou úlohu, jako skupiny bodové na křivce. Můžeme již dnes doufati, že tím se vyjasní poslední taje týkající se studia ploch a které se jevily tak neústupnými.

Geometrové mohou tedy sklízeti na rozsáhlém poli; a nemohu zapomenouti ještě na geometrii číselnou a zvláště na geometrii infinitesimální, kterou pěstuje tak skvěle p. Darboux a k níž p. Bianchi přispěl tolika užitečnými příspěvky.

Cantorism.

Mluvil jsem výše o naší potřebě stále se vraceti k prvním základům naší vědy a o prospěchu z toho pro studium lidského ducha. Právě tato potřeba vyvolala dva pokusy, jež zaujímaly velmi značné místo v nejnovější historii mathematiky. První z nich je cantorism, jenž prokázal vědě známé služby. Jeden z význačných rysů cantorismu je, že místo aby stoupal k všeobecnému buduje konstrukce stále složitější a aby definoval na základě konstrukce, vychází z *genus supremum* a definuje, jak by byli řekli scholastikové, toliko *per genus proximum et differentiam specificam*. Odtud hrůza, kterou budil po nějakou dobu v některých učencích, na př. v Hermite-ovi, jehož oblíbenou myšlenkou bylo srovnávati věty mathematické s přírodními. U většiny z nás tyto předsudky se již rozptýlily, ale přihodilo se, že se narazilo na jistá paradoxa, jisté zjevné kontradikce, které by byly naplnily radostí Zenona eleatského a školu megarskou. A tu každý jal se hledati lék. Já se své strany se domnívám — a nejsem jediný — že hlavní věc je nikdy nezaváděti entity, které nelze úplně definovati konečným počtem slov. Ať je přijatý lék jakýkoliv, můžeme si slibovati radost lékaře přivolaného k tomu, aby sledoval krásný pathologický případ.

Hledání postulátů.

S druhé strany vznikla snaha vyjmenovati axiomy a postuláty více méně skryté, jež tvoří základ různým mathematickým theoriím. Pan Hilbert dospěl k výsledkům nejskvělejším. Zdá se zprvu, že tento obor je velmi omezen a že nelze tu již ničeho činiti, až inventář bude dokončen, což v brzku nastane. Ale až vše bude vyjmenováno, bude tu hojně způsobů, jak to vše roztříditi; dobrý knihovník nalezne si vždy zaměstnání, a každé nové roztřídění bude poučné pro filosofa.

Končím tento přehled; na to, učiniti jej úplným, nemohu ani pomysliti pro množství důvodů, a především proto, že jsem již příliš zneužíval vaší pozornosti. Domnívám se, že uvedené příklady postačí, aby vám ukázaly, jakým mechanismem postupovaly vědy mathematické v minulosti, a jakým směrem asi budou kráčeti v budoucnu.