Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Problém gravitace

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 4, 387--402

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123763

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1923

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

L'auteur a constaté, dans une des plaques étudiées, qui présentait un voile considérable, une marche anomale de la courbe de gradation. La courbe descend d'abord et ne monte qu'à partir d'une certaine exposition. Le voile s'étend, dans le voisinage immédiat des places exposées dans la partie anomale de la courbe de gradation, parallèlement à cette courbe; à une distance plus grande il est irrégulier.

Problém gravitace.*)

Napsal Prof. Dr. *Arnošt Dittrich.*

Einstein uveřejnil v „Naturwissenschaften" 480, 1916, recensi Lorentzovy knihy „Les théories statistiques en thermodynamique" (1912). Praví:

Každý, kdo mathematické theorie studoval, zná následující trapný zažitek. Člověk přepočítá trpělivě a pečlivě všechny dedukce a na konec — nerozumí ničemu. Proč? — Protože autor vůdčí myšlenku čistě nevypracoval. Někdy je k tomu neschopen, někdy koketuje se zakrýváním původu své matematiky.

Einstein doporučuje proti tomuto zlu neomezenou otevřenost: sdílnost do krajnosti! Ať se autor neostýchá svěřiti čtenáři i myšlenkově slabé impulsy, jen když dílu jeho prospěly.

Jako odstrašující příklad uvádí Gibbsovou statistickou mechaniku, jako vzor hořejší knihu Lorentzovu.

Jak píše Einstein sám? Upřímně a otevřeně, ale velice stručně. Proto vytkl jsem si za úkol vypracovati co možná zřetelně vůdčí myšlenky jeho theorie gravitace. Snad usnadním tím leckomu přepočítání rozvláčných počtů široké relativistiky. Aspoň bude ten, jenž potom k nim sáhne, věděti, zda po jeho názoru za tu velikou námahu stojí či nikoliv.

Užší theorie relativity vázána na transformace lineárné, na skupinu Minkowského. Pro ni jest fysika invariantní theorií této skupiny v 4-rozměrnu x, y, z, t, jež Minkowski nazval „světem". Čítáme-li čas imaginárně $u = it$, jest fysika Euklidovou geometrií 4-rozměrna x, y, z, u. Ale jen formálně, to jest vyjádřena ve vzorcích, jež nedbají o imaginárnost souřadnice u. Tuto myšlenku lze vyjádřiti obrazným rčením: Svět Minkowského jest tuhým, 4-rozměrným

---

*) Tento článek uveřejněn jako první z řady článků, jež mají z péra povolaného, poučiti čtenáře o vědeckých aktualitách.

Redakce.

tělesem. Tím končí řetěz myšlenkový, jehož první článek je u Lagrange v poznámce, že mechanika je geometrií ve 4 rozměrech.[1])

V těchto myšlenkách jest však hluboko skrytý spor. Einstein upozornil, že relativistika dokazuje bezvýznamnost rovnoměrně-přímočarého pohybu tím, že jej absolutně vyznamenává před všemi jinými pohyby. Myšlenkový obsah užší relativistiky lze shrnouti ve větu: Absolutní význam rovnoměrné přímočarosti projevuje se v její bezvýznamnosti.

To ovšem nemůže býti posledním slovem relativistiky. Proto ptal se Einstein: Nejsou ještě jiné transformace důležité pro fysiku než lineárné? — Proč jen pohyb rovnoměrně přímočarý má býti neznatelný pro pozorovatele sebou unášeného. Rotace v geometrii má přesně týž charakter jako translace. Odkud je její absolutnost prozrazující se silami odstředivými. Dále: proč neplatí princip relativnosti pro pohyby urychlené?[2])

Planck namítl, že pohyb rovnoměrný snad je vyznamenán v témž smyslu jako přímka vůči jiným křivkám.[3]) Ale vždyť i naše analysis situs o takové vyznamenanosti nic neví. Dobře učinil Einstein, že přece jen rozebral případ pohybu rovnoměrně urychleného pro pozorovatele, jenž sám padá s křížem Descartesovým a je proto onoho pohybu rovnoměrně urychleného účasten. V takovém kříži pohyb ve skutečnosti rovnoměrný prohne se v parabolu vrhovou. Ve skutečnosti znamená: vůči kříži, proti němuž se právě pohybujeme rovnoměrně-zrychleně. Naopak: padá-li kříž v gravitačním poli země, natáhnou se pro pozorovatele sebou padajícího paraboly vrhové v přímky, po nichž bod pozorovaný klouže rovnoměrně a přímočaře. Hle, tu by byla nit, jež vede do širší relativistiky, než jest Lorentz-Einstein-Minkowského. Ale tato nová theorie fysiky bude zároveň theorií gravitace. Neboť urychleným pohybem kříže lze vyvolati illusi gravitačního pole, pro pozorovatele, jenž pohybu se účastní. Pole to je opačného směru než pohyb je vyvolávající. Naopak zmizí skutečné pole gravitační, když kříž i pozorovatel v něm volného pádu se účastní.

Lze opravdu pohybem rovnoměrně zrychleným odstraniti homogení gravitační pole? — Pusťme současně kuličku z platiny a křídy. Což kdyby platina v poli zemském padala o něco volněji než křída? — Pak by to nešlo. Kdyby kříž padal s platinou, pohybovala by se vůči němu křída a naopak. Hmota, kterou známe prostřednictvím setrvačnosti, nekryla by se pak s hmotou, kterou poznáváme prostřednictvím tíže. Na štěstí není této potíže. Již Newton nechal kývati stříbro, zlato, olovo, sklo, písek, sůl, vodu, obilí a dřevo. Zjistil rovnost obou hmot na 1/1000. Později Bessel pozoroval

---

[1]) Lagrange, „Theorie des fonctions."

[2]) Řeč, když se stal členem akademie. Berl. Ber. 741, 1914.

[3]) Odpověď na tuto řeč tamtéž 743.

kývání zlata, stříbra, olova, železa, zinku, mosazi, mramoru, hlíny, křemene a meteoritů. Shledal, že úchylka tíže od setrvačnosti jest najisto pod 1/60.000.

Nejdůkladněji zajistil souhlas setrvačné a těžké hmoty Roland Eötvös,[4]) Započal své studie v letech 80-tých minulého století. Během let vypracoval torsijní váhy v přístroj úžasné výkonnosti. Pomocí jeho gravitačního kompensatoru ukáží na 1‰ váhu člověka, na dálku 1·5 *m*.[5]) Při obyčejném vážení přitahuje země člověka. Zde naopak malý model země, kulička na konci tyče torsijních vah, jest přitahován člověkem. Základní idea Eötvösova byla tato: tíže, kterou na povrchu země zjišťujeme skládá se ze dvou složek, z tíže skutečné a síly odstředivé. Prvá je úměrná těžké hmotě, druhá setrvačné. Kdyby skutečná tíže závisela na volbě materialu, kdyby obě hmoty nebyly totožny, bude směr zdánlivé tíže záviseti na volbě látky. Eötvös dosáhl s E. Feketem a D. Pekárem[6]) přesnosti takové, že změny směru tíže obnášející 1/600.000″ by byli zrovna ještě konstatovali. Pod takovým úhlem viděli bychom 1/3 *cm* na měsíci.[7]) Porovnávali magnalium, hadí dřevo, med, vodu krystalinickou skalici modrou, roztok modré skalice, asbest a luj s platinou. Ukázalo se, že rozdíl obou hmot, je-li vůbec nějaký, jest na jisto menší než 1/200,000,000.

Vůči zemi jest tedy tíže dvou hmot stejná, jeví-li tyto stejnou setrvačnost. Jmenovaní zkoumali, zda to platí i vůči slunci. Tyčka točivých vážek opatřena na jednom konci kuličkou platinovou, na druhém magnaliovou, postavena do meridiánu. Kdyby slunce magnalium přitahovalo silněji, hne se toto při slunce východu tomuto vstříc. Opačným směrem půjde při západu. Takové torsijní váhy jevily by jednodenní kmit. Ač poruchy byly vyšetřeny předem tím, že magnalium bylo nahraženo platinou neukázal se žádný rozdíl. Také radioaktivní látky nedělají výjimek. Radiumbromid chová se jako platina až na nejvýše 1/2000.000.

Touže otázkou zabýval se pod maličko jiným zorným úhlem Southerns.[8]) Ptal se, zda vniterná energie, jež relací

$$E = m c^2$$

připoutána k hmotě setrvačné, vázána touže relací též k hmotě

---

[4]) „Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen. Mathem. u. naturwiss. Ber. aus Ungaren 8. 65. 1890.

[5]) Pekár „Baron Roland v. Eötvös wissenschaftliche Laufbahn“. Naturwissenschaften 7. 387. 1919.

[6]) „Über geodätische Arbeiten in Ungaren, besonders über Beobachtungen mit der Drehwage.“ Kap. VI. Abhandlungen d. XVI. allgemeinen Konferenz d. internationalen Erdmessung. 1909.

[7]) Pekár „Das Gesetz d. Proportionalität von Trägheit und Gravität“.

[8]) L. Lontherns „Determination of the ratio of mass to weight for a

těžké, jinými slovy, ptal se, zda energie jest těžká, zda setrvačná hmota kryje se s gravitační. J. J. Thomson upozornil, že u radioaktivních hmot emissí energie — dle theorie relativity — najisto klesá hmota setrvačná. Při rozpadu radia činí pokles 1/10.000 úhrnné hmoty, Kdyby energie této setrvačné hmotě aekvivalentní neměla váhu, tak by kyvadlo, jehož čočka obsahuje radioaktivní hmotu, jež se stále ještě rozkládá, kývalo volněji, než jiné podobné bez radioaktivní čočky. Southerns to v laboratoři jeho zkoumal a shledal, že poměr mezi těžkou a setrvačnou hmotou u kysličníku urana a olova liší se nejvýše o 1/200.000. Kdyby energie neměla váhy, musilo by dle odhadu Southernsova vyjíti 1/26.000. Pokus svědčí pro rovnost setrvačné a těžké hmoty, pro váhu vniterné energie.

Tyto pokusy povzbudily Einsteina, aby hledal rozšíření relativistiky, to jest theorii gravitace, jako součást theorie prostoru a času.

Vyšel od Planckovy[9]) formulace Hamiltonova principu, že bod nepodléhající silám vyhovuje podmínce

$$\delta \int \sqrt{c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = 0 \qquad (1)$$

Tu jsme ještě v rámci užší relativistiky, to jest rychlost světla jest stálou. Ale již r. 1907. věděl Einstein, že v gravitačním poli rychlost světla jest funkcí polohy.[10]) Plyne to z rovnocennosti urychleného pohybu kříže a gravitačního pole. Průhledné odůvodnění podal Lorentz: Jak vyšetříme pomocí aekvivalentního urychlení kříže vliv urychlení zemského g na paprsek světelný? — Odmysleme si tíži a nechme kříž vůči zemi urychlením g stoupati. Tu se každý pohyb rovnoměrněpřímočarý prohne v parabolický vrh. I paprsek světla se prohne a křivost jeho bude $c^2 : g$, tam, kde je vodorovný.

Ale šíření světla lze vyšetřiti také pomocí vlnoploch Huygensovou konstrukcí. Má-li se paprsek křiviti dolů, musí synchroní elementární vlna horní míti větší poloměr, to jest rychlost světla klesá ve směru tíže.[11]) Jest pak

$$dc = -\frac{g\,dz}{c}$$

z čeho pro gravitační potentiál Φ přibližná relace

$$dc = \frac{d\Phi}{c}.$$

---

radio-active substance". Proc. Royal Society, London A. 84. 325. 1910 — Na týž zjev upozornil Langevin Einsteina ústně. Ann. d. Phys. 38. 1062 1. 1921.

[9]) Planck „Das Princip d. Relativität und die Grundgleichungen d. Mechanik". Verh. d. deutsch. phys. Ges. 136. 1906.

[10]) Einstein, „Über d. Relativitätsprincip und d. aus demselben gezogenen Folgerungen". Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik. 4. 461. 1907.

[11]) Lorentz, „D. Relativitätsprincip" (3 Vorles.). 34. 1914.

Toto připoutání gravitačního potenciálu k rychlosti světla vedlo pak Einsteina k myšlence, aby v Hamiltonově principu (1), jenž pro stálé c dává pohyb setrvačný, zkusil dáti za c funkci polohy. Ukázalo se, že opravdu

$$\delta \int \sqrt{c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = 0$$

dává pak pohyb hmotného bodu v gravitačním poli. Jsou-li ostatní hmoty pole způsobující vesměs v klidu, je c gravitačním potentiálem. Tím odhalen reálný význam tohoto pojmu i s aditivní konstantou, dříve nepřístupnou.[12])

V závěreční poznámce citovaného dodatku praví Einstein, že rovnice analytické mechaniky mají význam, jenž sahá daleko přes hranice mechaniky Newtonovy. Dle Hamiltonovy relace (1) lze tušiti, jak budou vypadati pohybové rovnice hmotného bodu v dynamickém poli gravitačním.

Slib posledními řádky naznačený splnil ve společné práci s M. Grossmannem.[13]) Rozšířená relativistika musí se arci opírati o širší skupinu transformací než jsou orthogonálně-lineárné transformace Minkowského. Einstein nevěděl, jak daleko má postoupiti ve zvšeobecnění transformací. Pro jistotu šel co nejdále a připustil jakékoliv spojité transformace 4 proměnných x, y, z, t v 4 nové proměnné x', y', z', t'. Žádal pak, aby rovnice fysiky pro každou libovolnou transformaci zachovaly svou formu. Na základě této myšlenky, jíž formulován nový široký princip relativnosti, lze z podmínky pro pohyb hmotného bodu v statickém poli gravitačním

$$\delta \int \sqrt{c^2\, dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2} = 0,$$

zavedením nových proměnných libovolnou transformací dostati pohybovou podmínku

$$\delta \int ds = 0$$

$$ds^2 = g_{11}\, dx^2 + g_{22}\, dy_2 + \cdots + 2g_{12}\, dx\, dy + \cdots$$

pro obecné, dynamické gravitační pole. Element ds prostoro-časového 4-rozměrna „světa" Minkowského je fundamentálním mathematickým útvarem široké relativistiky Einsteinovy. Deset prostoro-časových funkcí g_{ik}, jež přehlédneme pomocí schematu:

---

[12]) Dodatek při korrektuře článku Einsteinova „Zur Theorie d. statischen Gravitationsfeldes". Ann. d. Phys. 38. 458. 1912.

[13]) „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie d. Gravitation." Zeitsch. f. Math. und Phys. 62. 1913. — Separátně u Teubnera.

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{matrix}$$

dle hlavní diagonály souměrného:

$$g_{ik} = g_{ki}$$

převezme nyní úkol gravitačního potentiálu. Dalším cílem Einsteinovým bylo nalézti pro tyto funkce differentiální rovnice obdobné Laplaceově, po příp. Poissonově pro potentiál gravitační. Po jistém kolísání, jež se obrazí v řetězu jeho publikací, ustálil se Einstein na následujících požadavcích pro differentiální rovnice veličin g_{ik}:

1. Mají býti druhého stupně dle g_{ik}, aby Poissonova rovnice mohla býti jejich zvláštním případem.

2. Mají zachovati formu při libovolné spojité transformaci 4-rozměrna.

Obírejme se nejprve podmínkou druhou. Aby rovnice fysiky srovnávaly se s Euklidovou geometrií, musí se dáti napsati v symbolech vektorového kalkulu. Čtyřrozměrno užší relativistiky máojinou geometrii, totiž invariantní theorii skupiny Minkowského, proto se pro ně musil vypracovati zvláštní nový kalkul vektorový. Týž úkol čekal širokou relativistiku Einsteinovu. Na štěstí byly tu již začátky a základy pro tuto práci. Základy jsou v Christoffelově práci „Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades".[14]) Vycházejíce odtud vyvinuli Ricci a Levi-Civita „absolutní", to jest na charakteru použitých souřadnic nezávislý, počet differenciální. Pomocí něho lze differenciálním rovnicím fysiky dáti formu invariantní pro libovolné transformace.[15]) Protože tato vektorová analysis Euklidova prostoru v křivočarých souřadnicích kryje se formálně s vektorovou analysí 3-rozměrna, jehož element je úplně libovolný, nebylo žádných zvláštních obtíží v přenesení těchto úvah na 4-rozměrno s elementem

$$ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Tím vznikl „tensorový kalkul", jenž v elastickém 4-rozměrnu Einsteinově koná fysice ty služby, jež starší fysice prokazovala geometrie Euklidova. Je to differentiální geometrie náležející k analysis situs „světa".

Čím jest Einsteinův „tensor"? — Má jistý počet složek, jež jsou funkcemi polohy a času. Charakteristické pro něj jest, že do nových souřadnic transformuje se tensor lineárně-homogeními relacemi. Proto obecné zákony fysiky praví, že složky nějakého tensoru

[14]) J. f. Math. 70. 46. 1869.

[15]) „Methodes de calcul differentiel absolu et leurs applications. Math. Ann. 54. 125. 1901.

rovnají se nulle.[16]) Vlastnost ta jest totiž pro lineárnou-homogenitu transformačních rovnic tensoru nezničitelná. Zachová se při přechodu k jakýmkoliv novým souřadnicím.

Jaký tensor máme položiti roveň nulle, abychom dostali gravitační rovnice, jichž existenci nám ve starší fysice prozrazuje rovnice Poissonova. Einstein hledá jej pomocí speciálního případu. Homogení gravitační pole lze odtransformovati rovnoměrně-urychleným pohybem kříže. Necháme jej prostě padat i s pozorovatelem. To se však zdaří jen ve zvláštním případě. Již gravitační pole celé zeměkoule se pohybem odtransformovati nedá.[17]) Když u nás kříž padá volným pádem, stane se v něm tíže u protinožců dvakrát větší. Toho si byl Einstein od začátku vědom..[18] Že libovolné těžné pole nelze nahraditi pohybem souřadnic, zdá se mu tak samozřejmým, jako že v užší relativistice nelze všechny body pohybujícího se media transformovati na klid.

Speciální případ, jenž odemyká problém, zjednává si Einstein následující cestou:

Vyjdeme od pole, v němž není tíže. Rovnoměrně-přímočarý pohyb hmotného bodu dán pak podmínkou

$$\delta \int \sqrt{c^2\, dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2} = 0.$$

Zavedeme-li libovolnou transformaci 4 nové proměné x_1, x_2, x_3, x_3, dostaneme pohyb v gravitačním poli

$$\delta \int ds = 0 \qquad (2)$$

kde $$ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Ale to jsou nyní speciální funkce g_{ik}, jež lze nějakou transformací souřadnic proměniti v systém konstant

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{matrix}$$

Ze studií geometrů víme, že pro taková g_{ik} musí zmizeti t. zv. Riemannův tensor,
$$B^{\varrho}_{\mu\delta\tau} = 0,$$

jenž má 256 (!) složek. Obsahuje druhé a první derivace gravitačních potentiálů g_{ik} dle souřadnic x_1, x_2, x_3, x_4.

[16]) Einstein, „Die Grundlage d. allgemeinen Relativitätstheorie".

[17]) Einstein „Grundlage" 43.

[18]) Einstein „Über d. Einfluss d. Schwerkraft auf die Ausbreitung d. Lichtes. Ann. d. Phys. 35. 899$_1$. 1911.

Dosud šlo o mathematické samozřejmosti. Nyní vstupujeme pa hypothetickou půdu. Einstein ví, že z horních rovnic dostane gravitační relace klassické mechaniky, pokládáme-li c za funkci polohy. To mu suggerovalo předpoklad, že relace (2) dají pohyb lehounkého zkusného tělíska v gravitačním poli obecném, jehož g_{ik} nelze vhodnou transformací přeměniti v konstanty. Pohybové rovnice jsou pak totožny s rovnicemi pro geodetické čáry 4-rozměrna. Zní:

$$\frac{d^2 x_\tau}{d s^2} + \sum_{\mu\nu}^{1..4} \left\{ \begin{matrix} \mu\ \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0,$$

kde Christoffelův symbol

$$\left\{ \begin{matrix} \mu\ \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} = \sum_{\alpha}^{1..4} \frac{g^{\tau\alpha}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right)$$

a $g^{\tau\alpha}$ je subdeterminant prvku $g_{\tau\alpha}$ v determinantu veličin $|g_{ik}| = g$, touto hodnotou dělený. — Hypothesu tuto doporučuje Einstein poznámkou, že differenciální rovnice geodetické čáry závisí jen na g_{ik} a jejich prvních derivacích, mezi kterými i ve specielním případě, že g_{ik} lze transformovati v konstanty není vazeb. Tensorová podmínka $B^{\varrho}_{\mu\sigma\tau} = 0$ váže totiž první derivace k druhým.

Rovnice pro g_{ik} hledá Einstein nejprvé pro vakuum, kde není hmoty (a energie, neboť ta má také hmotu). Pole bez tíže, jichž potentiály g_{ik} lze transformovati v konstanty sem také spadají. Ale $B^{\varrho}_{\mu\sigma\tau} = 0$, je příliš mnoho rovnic (256) pro 16 veličin g, z nichž pro souměrnost dle indexů jen 10 jest podstatných. Okolí slunce náleží také k případům nyní studovaným. V okolí slunce však najisto nelze pole gravitační odtransformovati. Tam dojista všech 256 $B^{\varrho}_{\mu\sigma\tau}$ nezmizí. Ale z tohoto Riemann-Christoffelova tensoru lze odvoditi jiný

$$B_{\mu\nu} \equiv \sum_{\alpha}^{1..4} B^{\alpha}_{\mu\alpha\nu},$$

jenž čítá jen 16 složek

$$B_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{r}^{1..4} \left\{ \begin{matrix} \mu\ r \\ r \end{matrix} \right\} - \sum_{r}^{1..4} \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \begin{matrix} \mu\ \nu \\ r \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \sum_{r,s}^{1,4} \left(\left\{ \begin{matrix} \mu\ r \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\ s \\ r \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu\ \nu \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r\ s \\ s \end{matrix} \right\} \right). \qquad (3)$$

Jsou to složky křivosti 4-rozměrna v bodě x_1, x_2, x_3, x_4. Podstatných je jich jen 10, právě jako g_{ik} a ze stejného důvodu. Je totiž

$$B_{\mu\nu} \equiv B_{\nu\mu}.$$

Na třech součtech ve vzorci (3) je souměrnost přímo viděti, jen první člen ji zatajuje svou formou. Člen tento platí však

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \, \partial x_\mu} \, lg \sqrt{-g},$$

kde hodnota pod kořenem je vždy kladná.

Za rovnice vakua by se tedy hodily relace

$$B_{\mu\nu} = 0,$$

ichž jest v podstatě 10, jako potentiálů $g_{\mu\nu}$. Jsou to partiální differentiální rovnice dle 2 derivací veličin g_{ik} lineárné, jež obsahují ještě g_{ik}, jejich prvé derivace a víc nic.

Není to přílišná smělost, řekne-li Einstein: To jsou gravitační rovnice vakua, zvšeobecnění rovnice Laplaceovy $\Delta\Phi = 0$. Vždyť bychom mohli takhle námatkou navrhnouti ještě půl tuctu obdobných systémů... myslí si člověk. Když to ale zkouší, shledá, že to nejde. Systém, k němuž nás Einstein dovedl, jest jedinečný. Není jiného tensoru[19]) s 10 podstatnými složkami než tento, má-li býti odvozen z g_{ik}, jich prvních derivací a býti v druhých lineárný, což žádá ohled na rovnici Laplaceovu. Čtyrrozměrno nemá totiž jiné vlastnosti než skalární křivost

$$B = \sum_{\mu,\nu}^{1..4} g^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$$

jejíž složky jsou tensorové komponenty $B_{\mu\nu}$. Odtud jest, že velmi specielní případ; rovnice Laplaceova, dovedla Einsteina k obecným rovnicím. Tuto výhodu děkujeme ztrátě Euklidovy geometrie, dokonalé elastičnosti 4-rozměrna.

Einstein navrhl tedy nejdříve rovnice z g_{ik} odvozené, invariantní pro každou deformaci 4-rozměrna a pak ukázal, že jsou pravými, protože žádných jiných není.

Je-li to pravda, musí rovnice gravitační ve spojení s podmínkou $\delta \int ds = 0$ býti rovnocenné s gravitační mechanikou Newtonovou ve vakuu. Tak tomu opravdu jest. Pro pohyby volné vůči rychlosti světla vychází v slabém statickém poli gravitačním jako první přiblížení Newtonův zákon, jako druhé přiblížení Leverrierem objevené stáčení perihelia Merkurova. Konečně řešil Schwarzschild rovnice gravitační pro pole kulově souměrné přesně, čím výsledkům, jež si Einstein zjednal přibližnými počty, dostalo se přísné odůvodnění, to jest potvrzení.

Jak ale znějí rovnice gravitační z nichž se vyspecialisuje rovnice Poissonova? — To jsou rovnice obecné, pro partie prostoru hmotou,

---

[19]) Einstein „Grundlage" 43₁ upozorňuje, že to vlastně platí o tensoru $B_{\mu\nu} + \lambda g^{\mu\nu} B$, je-li $\lambda = \text{konst}$. Ale položen roven nulle vede zpět k horním relacím.

to jest energií naplněné. Einstein chopil se k nalezení jich hypothesy, že rovnice gravitační lze dostati variací jisté funkce Hamiltonovy dle g_{ik}. Skalára, jež by se za Hamiltonovu funkci hodila, je tu jen jediná, křivost 4-rozměrna. Integrál, jenž se má vavírovat tak, aby δg_{ik} na hranicích libovolné 4-rozměrné oblasti zmizely, zní[20])

$$\delta \int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \sqrt{-g} \cdot B = 0,$$

Variaci vyjdou relace

$$B_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} B = 0,$$

což jsou rovnice vakua jen maličko pozměněné ve formě. (Viz poznámku 19.) Tamní $\lambda = -0{\cdot}5$. Je-li prostor naplněn hmotou jest, jak na Poissonově rovnici vidíme, na místě nully funkce polohy a času, tedy tensorová složka. Tento tensor — $T_{\mu\nu}$, musí býti téhož charakteru jako $B_{\mu\nu}$, to jest má také 16 složek a jest souměrný. Obecné gravitační rovnice zní

$$B_{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} B = -T_{\mu\nu},$$

kde souměrný tensor $T_{\mu\nu}$ vyjadřuje vyplnění prostoru hmotou, to jest energií. Ve vakuu tensor hmotný zmizí.

Myslím, že se nedoporučuje, abychom tensor $T_{\mu\nu}$ předčasně specifikovali. Dosud jsou probrány tyto případy:

1. Položí se $$T_{\mu\nu} = \varrho\, u_\mu\, u_\nu,$$

kde $$u_\nu = \sum_{k}^{1.4} g_{\nu k}\, u^k$$

Veličiny u^k jsou složky rychlosti $dx_k : ds$ proudící hmoty v bodě x_i s hustotou ϱ. V slabém statickém poli redukují se pak rovnice gravitační na relaci Poissonovu.

2. Přesné řešení gravitačních rovnic uvnitř hmoty kulově souměrné podařilo se Schwarzschildovi.[21] Ale v relativistice nelze počítati paušálně pro hmotu, bez ohledu na to je-li tuhá tekutá či plynná, jak to dovoluje mechanika Newtonova, jež není tak „fysikální" jako mechanika relativistiky. Schwarzschild pokládal kouli za tekutou. Pro stejnorodou, nestlačitelnou tekutinu jest

$$T_{\mu\nu} = \varrho\, u_\mu\, u_\nu - p g_{\mu\nu},$$

kde p je tlak, jenž s konstantní hustotou ϱ_0 souvisí relaci

$$\varrho = \varrho_0 + p.$$

Ukázalo se, že v nitru nestlačitelné koule platí geometrie Riemannova.

[20]) Přesněji je $B-\lambda$, obecnou invariantou, kde λ je konstantou.

[21]) Schwarzschild „Über d. Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach d. Einsteinschen Theorie". Berl. Ber. 7. 189. 1916 a tamtéž 47. 831. 1915.

3. Einstein vyšetřoval g_{ik} pro případ, že celý prostor je stejnoměrně naplněn hmotou s hustotou ϱ. Ukázalo se, že rovnice gravitační dostanou se variací Hamiltonovy funkce

$$R - \lambda,$$

kde $\lambda = \varrho$ jest konstantou.[22]) V případě tom jest částí hmotného tensoru $T_{\mu\nu}$ tensor

$$-\frac{\varrho}{2} g_{\mu\nu}.$$

Vyjde pak propočítáním, že v takovém prostoru stejnoměrně hmotou naplněném platí geometrie Riemannova. Prostor ten jest sám v sebe uzavřen, jako koule mezi plochami.

4. Obecné rovnice s tensorem pod 1. uvedeným řešil Einstein pro slabá pole pomocí retardovaných potentiálů. Objevil tím theoreticky, že existují gravitační vlny.

Schwarzschildová přesná řešení kulově-souměrného pole pro vakuum a nitro koule nestlačitelnou tekutinou naplněné jest dedukcí Newtonova zákona o gravitaci. V obou případech zjednoduší se element ds na tvar daný relací

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - d\sigma^2,$$

kde c jest rychlost světla, t čas, $d\delta$ element prostoru, ale neeuklidický, v obou případech různý. Tu nám dekomposice 4-rozměrna v prostor a čas zůstane zachována.

Schwarzschildův element ds odhaluje nám tajný smysl Newtonova zákona. Pro kulovou souměrnost stačí položiti středem vodní koule rovinu a zkoumati její ne-euklidický element.[23]) Mysleme si tuto rovinu (1, 2) vodorovně a středem vodní koule si postavme na ni kolmici označenou číslem 5. Měříme-li tuhým metrem na ose 1 směrem k hmotnému bodu, přijde tento do hustšího a hustšího gravitačního pole, čím se smršťuje. Právě tato jeho změna dává rovině (1, 2) ne-euklidický charakter. Jaký charakter? — Takový, jaký má rotační paraboloid, jenž vznikne rotací paraboly v rovině (1, 5) kol osy 5, jež je zároveň přímkou řídicí. Osa paraboly padne do osy 1. Parametr její měří 2 α, kde

$$\alpha = \frac{2k^2}{c^2} M_0$$

$$k^2 = \frac{66{\cdot}8}{10^9}\, cm^3\, g^{-1}\, sec^{-2}$$

je gravitační konstanta. $c = 2{\cdot}9986.10^{10}$ $cm\ sec^{-1}$ je rychlost světla.

[22]) Viz poznámku č. 20.

[23]) Flamm „Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie". Phys. Zeitschr 17. 449. 1916.

M_0 je hmota koule. Pro slunce jest

$$k^2 M_0 = 1{\cdot}324 \,.\, 10^{26}\, cm^3\, sec^2,$$

takže,
$$\alpha = 2{\cdot}945 \,.\, 10^5\, cm,$$

čili — v souhlase s odhadem Schwarzschildovým — okrouhle 3 *km*.

Mysleme si veškerou hmotu sluneční napěchovanou do této 3 *km*-ové koule. Hustota její by pak arci byla nesmírná, zvětšila by se 12·5 . 10^{15}-krát. Tu by prostor měl dvojí nekonečně vzdálené partie.

Nekonečnost jest nepřístupnost, nedosažitelnost. Zeď 2 *m* ode mne jest nekonečně vzdálená, měříme-li k ní metrem, jenž se každým přeložením smrští na polovinu bývalé délky. Nekonečnost není vlastností prostoru, ale míry a pohybu. Pro šíp z luku vystřelený nebude zeď naše nekonečně vzdálená, ač šíp uletí nejdříve 1 *m*, pak $^1/_2$, potom $^1/_4$ atd., jak známo ze sofismatu Zenonova. Všimněme si nyní obou nekonečností v okolí gravitující koule. K nekonečnosti v obvyklém slova smyslu směřujeme, když se přímo od slunce po paraboloidu vzdalujeme, tak, aby rychlost naše zůstávala pod rychlostí světla. Vedle toho existuje nyní nová nekonečně vzdálená partie vnitřní, 3 *km*-ová koule sluneční, kterou lze právě do hrdla rotačního paraboloidu vložiti. Toto hrdlo jest totiž v konečném čase nedostižné. Kdybychom po paraboloidu stejně dlouhými kroky k němu sestupovali tak, aby rychlost naše zůstávala menší než rychlost světla, nikdy hrdla nedosáhneme, protože rychlost světla klesá na nullu, když se mu přibližujeme. Je totiž

$$c^2 dt^2 - d\sigma^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 \,(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \; d\varphi^2), \quad (4)$$

z čeho plyne, že i světlo dosáhne hrdlo odkudkoliv venku vycházejíc za čas nekonečně dlouhý.

Jak tato ne-euklidická vlastnost vakua vně koule souvisí s deformací tuhých měřítek tíží? Všimněme si délkových elementů na paraboloidu a příslušných průmětů jejich na rovinu (1, 2). Element na paraboloidu k průvodiči kolmý promítá se nezkráceně do neeuklidické roviny. Otočíme-li jej do průvodiče, aby mířil ke slunci, zkrátí se jeho průmět tím víc, čím blíže jsme slunci, čím silnější jest gravitační pole. Ve vzdálenosti 3 *km* smrskne se na nullu, zmizí úplně. To je nový důvod, proč kruh s poloměrem α v neeuklidické rovině (1, 2) jeví se nekonečně vzdáleným. Měřím-li k němu po průvodiči (v rovině!), smršťuje se mi jednak měřítko jednak měřím volněji a volněji, protože přece nemohu předstihnouti svým pohybem světlo, jehož rychlost dle vzorce

$$c^2 = 1 - \frac{\alpha}{R}$$

klesá na nullu. Distance R ze vzorce (4) zjistí se tím, že měříme na kruhu tangentiálně kol slunce. Obvod takto tuhým měřítkem obdržený dělíme 2π. Číslo takto zjednané platí za souřadnici R distance od slunce.

V astronomii nevyskytují se tak nesmírné hustoty, jakých by bylo třeba, aby koule jimi naplněná stala se nekonečně vzdálenou. Následkem toho v jisté konečné vzdálenosti vstoupíme do koule, kterou si Schwarzschild myslí naplněnou nestlačitelnou tekutinou. Charakter geometrie v naší rovině středem koule proložené se nyní změní. Vně koule souhlasila s geometrií na rotačním paraboloidu. Uvnitř má charakter geometrie na vrchlíku kulovém. Vrchlík ten se paraboloidu v okrajovém kruhu dotýká. Koule z níž jest seříznut má poloměr

$$R_0 = \sqrt{3 : \varkappa\,\varrho},$$

kde

$$\varkappa = \frac{8\pi k^3}{c^2}$$

Gravitace tekuté koule je tedy vystižená nálevkovitou plochou, jež se skládá z rotačního paraboloidu, jehož se dotýká kulový vrchlík. Křivost jeho jest stálá $+\frac{1}{R_0{}^2}$. Křivost rotačního paraboloidu slábne prudce s distancí, neboť zní $-\frac{\alpha}{2R^3}$; v nekonečnu (zevním) zmizí. Přistupuje ještě sdělení o rychlosti světla uvnitř koule. Pokládáme-li za první souřadnici vrchlíkového bodu úhel mezi jeho poloměrem a osou vrchlíku χ, jest

$$c = \frac{1}{2}(3\cos\chi_a - \cos\chi)$$

kde χ_a jest největší možné χ náležející okraji vrchlíku.

Deformace roviny směrem pátého rozměru v soustavě sluneční jest skrovná. Největší jest v hmotě sluneční a i tam sahal by poloměr křivosti R_0 od slunce až mezi planetoidy. Jest R_0 486-krát větší poloměru slunečního, tedy $= 3.38 \cdot 10^{13}$ *cm*. Tím vysvětleno, proč se Euklidova geometrie původně na zemi objevená osvědčila i v soustavě sluneční. Posavadní extrapolace geometrie naší do prostoru mimozemského je tedy dovolena pro relativní slabost gravitačních polí v tomto prostoru.

Rozměr, do něhož se naše ne-euklidická rovina křiví, označil jsem jako 5. proto, že 4-rozměr již je zadán pro čas. Je to onen rozměr, který Zöllner označoval jako 4. Mluvil také o projekci ze svého 4-rozměrna do našeho prostoru. Fantastické anticipace Zöllnerovy vykrystalovaly se v jiných hlavách v hořejší projekční úvahy o kráceni délkového elementu tíží.

Další úspěch, jenž doporučuje novou nauku, jest objevení mostu mezi světlem a tíží. Jako hmotný bod pohybuje se i světlo po geodetické čáře, jenže přistupuje ještě podmínka $ds = 0$. Proto jsou rovnice vyjadřující pohyb světla v okolí slunce tytéž, jako rovnice hmotného bodu na př. Merkura. Obdobou stáčení perihelia Merkurova jest prohnutí světla tíží. Obnáší na okraji slunce 1·75.

Tento zjev chtěla hledati expedice vyslaná k srpnovému zatmění slunce r. 1914 na Kavkaz. Chtěla fotografovat hvězdy v okolí zatemnělého slunce. Válka to překazila. Ale zdařilo se to dvěma anglickým výpravám 29. V. 1919. Eddington a Cottingham šli pozorovat zatmění slunce na ostrov Principe u pobřeží Guinejského (záp. Afrika), Crommelin a Davidson do Sobralu v Brasilii. Totalita trvala 5^m a po 4^m bylo úplně jasno. Zůstali ještě půl roku na místě, aby fotografovali stejnými stroji tutéž partii nebe, kde bylo zatmění o půlnoci. Srovnáním obojích snímků se ukázalo, že hvězdy při zatmění se posouvají:

1. o tolik, jak Einstein předpověděl, pro okraj slunce,

2. že posuv slábne s dálkou, jak Einstein ze své theorii vypočetl.*)

Nerozhodnuta jest dosud záležitost t. zv. rudého posuvu, další velmi závažné předpovědi Einsteinovy. Jako se měřítka tíží zkracují, tak se chod hodin tíží zvolňuje. Také atom zářící — třeba natriový — lze pokládati ve smyslu relativistiky za hodiny. Vibruje-li na slunci, bude frekvence kmitu menší než na zemi, čáry jeho pošunou se k části červené, arci jen o 1/500 distance obou nátriových čar $D_1 - D_2$.[24])

Dosud se posuv ten, jenž odpovídá na základě Dopplerova principu rychlosti 635 *m/sec*, zjistiti nedal. Freundlich myslil, že jej nalezl na slunci i ve vidmu velikých stálic.[25]) Ale Schwarzschild ukázal, že na slunci effekt Einsteinův jasně z pozorování nevystupuje. Rozpory v pozorování žádají dalších měření.[26]) U hmotných hvězd zjistiti posuv se dosud také nezdařilo. Seeliger ukázal, že Freundlich se mýlí.[27]) Ostatně asi i odpůrci očekávají, že tento efekt existuje. Aspoň bych si tak vykládal poznámku Lenardovu,[28]) jenž jest naprostým odpůrcem široké relativistiky. Praví: „I zde vadí cizí děje

[24]) Lorentz „Das Relativitätsprincip." 36, 1914.

[25]) Freundlich „Über die Verschiebung d. Sonnenlienien. Phys. Zeitschr. 15. 369. 1914. — „Über d. Gravitationsverschiebung d. Spektrallinien bei Fixsternen". Phys. Zeit. 16. 115. 1915, a pod týmž titulem v Astr. Nachr. 4826. 17. 1915.

[26]) Schwarzschild „Über d. Verschiebung d. Bande bei 3883 A im Sonnenspektrum." Berl. Ber. 1201. 1914.

[27]) Seeliger „Über d. Gravitationswirkung auf Spektrallinien. Astr. Nach. 4829. 83. 1916.

[28]) Lenard „Über Relativitätsprincip, Äther, Gravitation". 19b 1921

*) Viz také „Zprávy". Pozn. red.

(tentokrát Doplerův efekt, vliv tlaku, zdánlivý vliv sousedních čar ve vidmu), jež přímým závěrům v cestu se staví." — Rozbor otázky zpracoval jsem pro „Říši hvězd", kam odkazuji.

Vzdálenou možnost kontroly Einsteinových úvah dávají gravitační vlny. Impulsy gravitační šíří se rychlostí světla. Pro mírná pole s volnými pohyby integroval Einstein rovnice gravitační klada tensor

$$T_{\mu\nu} = \varrho\, u_\mu\, u_\nu.$$

retardovanými potentiály, známými z elektrodynamiky. Existenci těchto vln konceduje mu i Lenard.[29]) Že prý nepochybně od pohybujícího se centra gravitačního vycházeti musí, šířily se gravitace konečnou rychlostí. Jestliže tedy planeta ať lehká ať hmotná běží okolo slunce, jest pohyb ten spojen s emisí gravitačních vln. Každé vlnění, jež známe transportuje energii. Proto čekáme totéž pro planetární vlny gravitační. Patrně bude se tato energie hraditi z potentiální energie planety vůči slunci. Pak arci není možno, aby planeta běžela kol slunce v kruhu, poběží v zúžující se spirále. Závity její nebudou zajisté všude stejně husté. Budou distancé, kde závit těsně vedle závitu se klade, a budou přechody mezi těmito polohami, jimiž planeta v řídkých závitech spěchá ke slunci. Pravděpodobně nalezneme pak planety v místech hustých závitů, čím zákonitost Bodeova by byla aspoň vysvětlena, inclusive její přibližnost. Očekávám, že odtud budou nitě k rozkvantování drah, to jest k oblibě drah pro určité vybrané kruhy.

Einstein nejprve myslil, že má rozšířiti princip relativnosti jen na lineárné transformace tím, že se vzdá imaginární orthogonálnosti Minkowského. Později mínil, že má důkaz, že aspoň všechny možné transformace 4-rozměrna, všechny možné jeho elastické deformace nelze připustiti. Ohlasem toho jest snaha vyjíti s transformacemi pro něž $\sqrt{-g} = 1$, které nemění objem transformovaných partií 4-rozměrna. Ale tím by se již rovnoměrná rotace vylučovala. Konečně sáhl k uvolnění všech transformací. Pro to má vážný důvod: Všem experimentům společno jest, že konstatují současné soumístnosti. Einstein vyvinul ve svém tensorovém kalkulu elastického 4-rozměrna všeobecnou theorii experimentu v duchu Leibnizově, jenž přísně zamítá akce in distans. Z této obecné, mathematické theorie experimentu vysvětlil stáčení perihelia Merkurova, prohnutí světla tíží, a odkryl celé serie hlubších souvislostí, jako důkaz Fermatova principu pro šíření světla, Hamiltonův princip pro volný pohyb lehké planety. Kdo chce Einsteina „vyvrátiti", musí dokázati, že nejsou všechny transformace přípustny, nýbrž jen některé. To by ale i Einstein asi zcela rád viděl. Vždyť se k naprosté elastičnosti 4-rozměrna teprve lopotným vývojem probil. Tu by nastala situace, jako by někdo Clausiovi přinesl „perpetuum mobile".

[29]) Lenard, „Relat". 22 ñ. 1921.

„Vyvrátiti“ Einsteina je jako dohnati Diogena, — jenž nic nemá ke konkursu. Jako Diogenes změnou majetkových poměrů vždy získá, tak by Einstein získal na geometrii, kdyby odpůrci jeho nalezli pro deformace světa nějaké omezení. Tu by se tensorový kalkul nahradil užší naukou, jež by přírodu těsněji semkla. Einstein jaksi s politováním konstatuje, že je anarchie v transformacích 4-rozměrna a přizpůsobil se jí jako nutnému zlu. Na prvních publikacích je zrovna vidět, že je mu úzko z neohraničenosti světa geometrií. Tehdá hledal přímo omezení přípustných transformací. Hledal, ale nenašel. A nad čím nejpovolanější znalec relativistiky na konec resignoval, o to usilují dál jeho odpůrci. Uvidíme, co naleznou. Ale ať již Einstein sám, či jeho odpůrci jsou na vzestupné linii, jisto jest, že zažíváme nesmírné rozepnutí perutí ducha lidského. Proto je tu každá pomocná ruka vítána i hlavy kritické, jež hledají slabá místa.

*

Le problème de gravitation.

(Extrait de l'article précédent.)

Einstein s'est aperçu de la contradiction profondément cachée dans l'idée fondamentale de la théorie de relativité restreinte: la signification absolue du mouvement rectiligne uniforme se manifeste par son insignifiance. C'est par là qu'il fut amené à la généralisation de cette théorie.

L'accord entre la matière inerte et la matière pondérable revèle le caractère illusoire du champ homogène de gravitation. En partant du fait observé par Planck, que le principe de Hamilton pour les variations de l'intégrale de l'élément du monde de Minkowski donne le mouvement inerte, il trouva que l'élément général de l'espace à quatre dimensions donne le mouvement causé par la gravitation. Il cherchait ensuite les équations de champ analogues à la relation de Poisson. Il les obtint en postulant que ces équations fussent du 2e ordre, comme il en est de la relation de Poisson, puisque l'espace à quatre dimensions possède une seule propriété géométrique, qui est la courbure. Pour les mouvements libres et pour des champs faibles les équations d'Einstein se réduisent à la mécanique de Newton. En deuxième approximation elles donnent le déplacement du périhélie du Mercure.

Par l'intégration du champ symétrique dont le centre de symétrie est un point singulier, on arrive à la loi Newtonienne de gravitation. On peut l'interpréter géométriquement par la courbure de l'espace. On peut interpréter d'une facon analogue les champs de gravitation à l'intérieur d'une sphère homogène.

Des conséquences ultérieures des considérations d'Einstein sont l'inflexion de la lumière et le déplacement rouge. La première fut déjà observée; on cherche maintenant le deuxième.