Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Šolín
Počátkové arithmografie. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 3, 122--138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123751

Počátkové arithmografie.

(Píše prof. *Josef Šolín.*)

I. Úvod.

Poskytovala-li arithmetika geometrii mocné podpory ode dávných dob, zvláště pak od časů Cartesiových, dospěla i geometrie v době novější tak daleko, že může v odplatu za to zastupovati arithmetiku s úspěchem nevšedním v rozmanitých úlohách jak mathematiky theoretické tak i mathematických částí jiných věd. Je to zejmena *statika* jak theoretická tak i statická stránka strojnictví a stavitelství, jichž geometrické vyvinování nezřídka vyniká nad analytické zvláštní elegancí, vedouc zároveň cestou nejkratčí ku grafickému řešení příslušných úloh, za nímž řešení počtářské často daleko zůstává co do rychlosti a přehlednosti. První stopy nové nauky, *statiky geometrické* aneb — jak ji nazval původce její Culmann — *grafické*, shledáváme v geometrickém strojení výrazů analyticky vyvozených, což vyžadovalo výkonů geometrických, jimiž by mohly nahraditi se jednotlivé výkony počtářské. Tím vytčena úloha tak zvané *grafické arithmetiky* čili *arithmografie*, kteráž jest dobrou přípravou ku grafické statice.

Vyzván byv sl. redakcí tohoto časopisu, abych vyvinul řadou článkův počátky grafické arithmetiky, po případě pak dále i základy grafické statiky samé, odhodlal jsem se k sepsání těchto řádků v naději, že jednak vítány budou učícím se čtenářům tohoto časopisu, jinak že snad některý z čtenářů vyučujících, ač nemá proň grafická statika oněch darů, jichž poskytuje technikovi, pozornost svou obrátí k poli již proto velezajímavému, že na něm o přednost závodí obě vznešené sestry: arithmetika a geometrie.

Užívajíce arithmetiky v rozmanitých naukách, vyjadřujeme veličiny v nich se vyskytující *čísly*. Čísly těmito udávají se pak poměry daných veličin k určité veličině základní téhož způsobu, kteráž tedy sama *jedničkou* jest vyjadřena. Místo toho můžeme veličiny dané vyjadřovati veličinami geometrickými, jako *délkami*, *obsahy plošnými* a *tělesnými*, a to zase po zákoně úměrnosti, t. j. tak, že poměry veličin daných rovnají se poměrům měřických jejich zástupců čili *obrazů* v nejširším smyslu toho slova. Chceme-li měřicky vyjadřovati čísla, vytkněme určitou základní veličinu geometrickou, kteráž by odpovídala jedničce. Měřidlo na této jedničce založené jest pak prostředníkem mezi čísly a obrazy jejich.

Které geometrické veličiny by měly se voliti za obrazy veličin daných, závisí podstatně na zvláštním rázu těchto daných veličin; vždycky však přicházíme naposled k *délkám*, poněvadž obsah $\left\{\begin{matrix}\text{plošný}\\ \text{tělesný}\end{matrix}\right\}$ vyjádřiti lze $\left\{\begin{matrix}\text{dvěma}\\ \text{třemi}\end{matrix}\right\}$ délkami t. hlavními rozměry $\left\{\begin{matrix}\text{obdélníka}\\ \text{pravoúhelného rovnoběžnostěnu}\end{matrix}\right\}$, jemuž přísluší onen obsah.

Základem grafického počítání jsou tedy výkony, jež týkají se *délek*; k tomu přistupuje dále vyjadřování obsahů plošných dvěma délkami, z nichž jedna jest dána, a tělesných třemi délkami, z nichž dány dvě.

II. Grafické sčítání a odčítání.

a) *Obecné sčítání úseček, náležejících k téže přímé řadě* $\dot{P}$.*)

Úsečky dané, v nichž šetřeno budiž nejen velikosti ale i směru (tak že jimi mohou vyjádřeny býti dané veličiny jak co do velikosti tak i co do smyslu souhlasného neb protivného), znamenati můžeme jedním písmenem neb jednou číslicí, připsanými k té které úsečce uprostřed aneb, mají-li všecky úsečky společný počátek, ku konci každé z nich. Ne tak krátké ale v nejedné příčině určitější jest znamenání obou krajních bodů každé úsečky stejnými písmeny neb číslicemi, jež však rozeznávají se buď příponou neb čárkou. Budeme tedy znamenati jednotlivé úsečky buď krátce na př. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aneb, pokud by toho žádala určitost, $\overline{11'}, \overline{22'}, \overline{33'}, \ldots$ (obr. 4. a).

Mají-li sčítati se úsečky $\overline{11'}, \overline{22'}, \overline{33'}, \ldots$, hleďme umístiti je tak, aby konec každé úsečky předchozí byl spolu počátkem úsečky následující. Pak jest zajisté obecným (algebraickým)

*) Symbolem $\dot{P}$ znamenáme přímou řadu bodovou, jejíž spojnicí (místem) jest přímka P.

součtem všech úsečka, jejímž počátkem jest počátek dané úsečky první, a koncem konec dané úsečky poslední, jak naznačeno rovnicí

$$\overline{11'} + \overline{22'} + \overline{33'} + \ldots \overline{kk'} = \overline{1k'}.$$

Není potřebí dokládati, že v tomto obecném sčítání také odčítání zahrnuto.

b) *Sčítání úseček v soustavě rovinné neb prostorové jakkoliv rozložených.*

Mnohdy bere se sčítání úseček v tomto smyslu širším; úsečky dané umístí se bez proměny směru opět tak, aby počátek každé úsečky následující sjednotil se s koncem úsečky předchozí, čímž vznikne lomená čára rovinná neb prostorová. Za součet bere se jako dříve úsečka, jejímž počátkem jest počátek úsečky první, a koncem konec úsečky poslední. Tak jest v obr. 1. úsečka $\overline{15'}$ součtem úseček $\overline{11'}$, $\overline{22'}$, $\overline{33'}$, $\overline{44'}$, $\overline{55'}$. Je-li lomená čára $1'2'3' \ldots$ prostorová, musí zobraziti se některým způsobem geometrie deskriptivné, nejpříhodněji v pravoúhelné soustavě dvou průměten.

Sčítání takové nabývá zvláštního významu v grafické statice a dynamice.

III. Grafické násobení a dělení.

Součin $\left\{\begin{matrix}\text{dvou}\\ \text{tří}\end{matrix}\right\}$ úseček znamená v měřictví $\left\{\begin{matrix}\text{plošný}\\ \text{tělesný}\end{matrix}\right\}$ obsah $\left\{\begin{matrix}\text{obdélníka}\\ \text{pravoúhelného rovnoběžnostěnu}\end{matrix}\right\}$, jehož hlavními rozměry jsou ony úsečky. Součin čtyř a více úseček nemá významu ryze geometrického, vyskytuje se však v jiných vědách; tak jsou na př. v mechanice momenty setrvačnosti obrazců veličinami čtyř rozměrův.

Přestávajíce zatím na výkonech, jichž výsledkem jsou zase úsečky, přistupme k *násobení dané úsečky poměrem jiných dvou úseček* čili jinými slovy, k *strojení čtvrté úměrné ke třem úsečkám daným.*

Násobení toto, v němž obsaženo zároveň i dělení (dělení daným poměrem a násobení reciprokou hodnotou téhož poměru jsou úlohy totožné), založiti se může na rozmanitých souvislostech měřických; všecky jsou pak obsaženy v pojmu *podobnosti dvou soustav rovinných.*

Jsou-li totiž a, a' sdružené úsečky ve dvou podobných soustavách rovinných, má poměr $\frac{a'}{a}$ pro všeliké družiny stálou hodnotu; je-li tedy b, b' jiná družina úseček v týchž soustavách, máme

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

a tedy

$$a' = a\frac{b'}{b} = b'\frac{a}{b},$$

čímž vytčeno pravidlo násobení dané úsečky poměrem jiných dvou úseček. Dané tři úsečky a neznámá mají dle toho tvořiti dvě družiny úseček ve dvou podobných soustavách rovinných; co do místa, jež přísluší každé jednotlivé úsečce v oněch družinách, vychází ze vzorců výše vytčených, že *daná úsečka a přední člen poměru*, obdobně pak *neznámá úsečka a zadní člen nemohou náležeti k téže soustavě ani k téže družině.*

Dány-li tedy úsečky a, m, n, a má-li se strojiti

$$x = a\frac{m}{n},$$

lze to vykonati spůsobem rozmanitým. Nemají-li dané úsečky ve výkresu již určitou polohu, kteréž by pokud možno užiti se mělo, veďme libovolným bodem o dva paprsky a přenesme od bodu o na jeden z nich danou úsečku a, přední člen m daného poměru pak na paprsek druhý; zadní člen může na jednom neb druhém paprsku se umístiti, jak ukazují obr. 2. a), 2. b), kdežto je bod o společným počátkem všech úseček, a konec každé znamenán písmenem úsečky samé. V prvním případě veďme $mx \parallel na$, v druhém $ax \parallel mn$; v obou vyhovělo se tak podmínce, že daná úsečka a přední člen poměru, dále neznámá a zadní člen nemohou býti na téže různoběžce ani na téže rovnoběžce.

Mají-li dané úsečky ve výkresu určitou polohu, hleďme pokud možno užiti této polohy. Obr. 2. c) ukazuje řešení úlohy v tom případě, že úsečky m, n dány jsou na téže přímce od společného počátku o, úsečka a pak na přímce jdoucí koncem úsečky n. Obrazce 2. d) a 2. e) obsahují řešení úlohy, dány-li úsečky m, n na dvou různoběžkách o společném počátku, úsečka a pak jednou na rovnoběžce, po druhé pak na kolmici k úsečce n. (V obr. 2. d) jest $\overline{sm} = m$, $\overline{sn} = n$, $\overline{oa} = a$, $\overline{ox} = x$). —

Násobíce kterýmkoliv spůsobem nemusíme přestávati na prosté délce úseček, nýbrž můžeme přisuzovati jim také určité znaménko. V tomto případě potřebí šetřiti směru úseček obsažených v téže přímce neb v přímkách rovnoběžných, jak ukazuje na př. obr. 2. d), kdež znásobena úsečka a každým z poměrů $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, majících rozličné kombinace znamének obou členů.

Majíce na zřeteli formu

$$\frac{x}{a} = \frac{m}{n}$$

můžeme bráti výkon právě vyložený také za *přetvoření poměru* (zlomku) $\frac{m}{n}$ *na daný člen zadní* (na daného jmenovatele). Na čemž lze dále založiti sčítání poměrů $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}, \ldots$; přetvoříme-li je vesměs na společného jmenovatele tak, že

$$\frac{m}{n} = \frac{x}{a}, \quad \frac{m'}{n'} = \frac{x'}{a}, \quad \frac{m''}{n''} = \frac{x''}{a}, \ldots \qquad \text{(obr. 2. d)}$$

bude

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \ldots = \frac{x + x' + x'' + \ldots}{a}.$$

Máme-li stanoviti graficky *součin dvou činitelů číselných*, berme jednoho z nich za poměr úsečky a k jedničce měřidla, druhého pak za hodnotu poměru $\frac{m}{n}$; prostou délku úseček m, n, kteráž tím není stanovena, zvolme příhodně hledíce k pohodlnosti a přesnosti rejsování. Výsledek x vyjádří se pak na měřidle zase číslem.

Chceme-li na př. stanoviti k danému číslu hodnotu reciprokou, pišme

$$x = 1 \, . \, \frac{1}{c},$$

což spůsoby výše vytčenými se strojí. —

Máme-li *násobiti úsečku a poměrem složeným*, jak naznačuje rovnice

$$x_k = a\,\frac{m}{n}\,\frac{m'}{n'}\,\frac{m''}{n''}\ldots,$$

čili vyjádřiti složený poměr $\frac{m}{n}\,\frac{m'}{n'}\,\frac{m''}{n''}\ldots$ poměrem jednoduchým $\frac{x_k}{a}$, potřebí opětovati výkon výše naznačený tolikráte, kolik jednoduchých poměrů v daném složeném se vyskytá.

K tomu konci veďme v obr. 3. a) libovolným bodem s paprsky A, B a přenesme na $\left\{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\}$ úsečky $\left\{\begin{matrix} n, m', n'', m''', \ldots \\ m, n', m'', n''', \ldots \end{matrix}\right\}$ vesměs od společného počátku s; dále veďme libovolným bodem o paprsky $P \parallel A$, $Q \parallel B$ a přenesme danou úsečku a od bodu o na paprsek P. Vedeme-li $ax \parallel mn$, $xx' \parallel m'n'$, $x'x'' \parallel m''n''$, ... máme

$$x = a\,\frac{m}{n},\quad x' = x\,\frac{m'}{n'} = a\,\frac{m}{n}\,\frac{m'}{n'},\quad x'' = x'\,\frac{m''}{n''} = a\,\frac{m}{n}\,\frac{m'}{n'}\,\frac{m''}{n''},$$

a t. d.

Není-li to na újmu přehlednosti, lze užiti paprsků A, B spolu co paprsků P, Q.

Jiné zřízení má obrazec 3. b), kdež přeneseny úsečky n_1, n_2, n_3, ... na přímku X vesměs od společného počátku o, úsečky m_1, m_2, m_3, ... pak na rovnoběžné pořadnice, vedené koncovými body úseček n. Podlé znaménka přenášeny jednotlivé úsečky n na jednu neb druhou stranu počátku o, úsečky m pak na jednu neb druhou stranu přímky X. Je-li $\overline{oa} = a$, vyhovuje příslušná pořadnice $ax_1 = x_1$ přímky om_1 podmínce

$$\frac{x_1}{a} = \frac{m_1}{n_1};$$

přeneseme-li dále x_1 na osu X co úsečku $\overline{ox'_1}$ a vedeme-li příslušnou pořadnici $\overline{x'_1 x_2} = x_2$ přímky om_2, obdržíme

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{m_2}{n_2},$$

tedy

$$\frac{x_2}{a} = \frac{m_1}{n_1}\,\frac{m_2}{n_2}$$

a t. d.

Konstrukcemi vytčenými strojiti lze dále každý součin

$$abcd\ldots$$

číselných činitelů, dále podíl

$$\frac{abcd\ldots}{pqr\ldots}$$

dvou takových součinů, nechť jest v čitateli i v jmenovateli činitelů jakékoli množství. Výrazy ony mohou zajisté psáti se ve formě

$$a\frac{m}{n}\frac{m'}{n'}\frac{m''}{n''}\ldots,$$

nahradíme-li scházející členy jedničkami, a strojiti tedy spůsobem výše vytčeným.

Vysazování činitelů. Násobení délky a poměrem $\frac{m}{n}$ můžeme bráti dále za vysazení činitele n ze součinu am. Dejme tomu, že má *vysaditi se určitý činitel ze součtu takových součinů*, jak naznačeno vzorcem

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots = f(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots),$$

kdež jsou $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ dané úsečky, f činitel, který se má vysaditi, $y_1, y_2, y_3 \ldots$ konečně výsledky vysazení tohoto činitele z jednotlivých členů. Pro obecnost přisuzujme každé úsečce také určité znaménko, buď že náležejí úsečky $a_1, a_2, a_3 \ldots$ přímé řadě $\dot{A}$, dále úsečky $b_1, b_2, b_3, \ldots$ přímé řadě $\dot{B}$, majíce v nich každá směr určitý, aneb že sice úsečky samy berou se jen prostou svou délkou, za to však že některé součiny mají odčítati se místo sčítání, v kterémž případě lze znaménko záporné přisouditi kterémukoli z obou činitelů.

Veďme v obr. 4. b) dvě osy X, Y a přenesme na osu X jedny úsečky, na př. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ každou od počátku o v jednom neb druhém směru šetříce znaménka jejich, na př. positivné na pravo, negativné na levo, i veďme jimi přímky $A_1, A_2, A_3, \ldots$ rovnoběžně s druhou osou Y. Úsečky druhé $b_1, b_2, b_3, \ldots$ přenesme na přímku B (obr. 4. a), kterouž vedeme rovnoběžně s osou Y, a to tak, aby konec každé úsečky předchozí byl zároveň počátkem úsečky následující; šetříce pak v tom zase znaménka jednotlivých úseček, přenášejme na př. positivné zdola nahoru, negativné shora dolů. V obr. 4. a) znamenány body krajní, tak že

$$\overline{11'} = b_1,\ \overline{22'} = b_2,\ \overline{33'} = b_3, \ldots$$

Konečně zvolme ve vzdálenosti f měřené ve směru osy X od přímky B bod f, na př. na *pravé* straně. (V obr. 4. jsou osy X, Y pravoúhelné na vzájem; pročež měřena vzdálenost bodu f od přímky B na kolmici k této přímce.)

Krajní body 1, 1' úsečky b_1 promítají se z bodu f paprsky $f1$, $f1'$; vedeme-li rovnoběžky s těmito paprsky libovolným bodem a'_1 přímky A_1, obdržíme tím na ose Y body I, I', a poněvadž

$$\triangle f11' \backsim a'_1 II',$$

jsou sdružené strany $\overline{11'}$, $\overline{II'}$ obou trojúhelníků v poměru příček f, a_1 vedených sdruženými vrcholy f, a'_1 rovnoběžně s osou X (v obr. 4. jsou příčky tyto výškami oněch trojúhelníků), tak že

$$f.\overline{II'} = a_1 b_1 ;$$

pročež neznámá

$$y_1 = \overline{II'}.$$

Úsečka $11'$ promítá se úhlem $f(11')$ svazku paprskového $\bar{f}$*), a tomuto úhlu odpovídá úhel $a'_1\,(II')$ svazku $\bar{a}'_1$. Určitému směru úsečky odpovídá určitý smysl obou úhlů. Je-li bod f *na pravo* od přímky B, odpovídá positivné úsečce $\overline{11'}$ úhel $f(11')$ onoho smyslu, v kterémž točí se ukazovatel hodinový, a kterýž berme za positivný; týž smysl positivný má pak také úhel $a'_1\,(II')$, a úsečka II' má směr $\left\{\begin{matrix}\text{positivný}\\ \text{negativný}\end{matrix}\right\}$, je-li úsečka a_1 $\left\{\begin{matrix}\text{positivná}\\ \text{negativná}\end{matrix}\right\}$. Obrátíme-li směr úsečky b_1, vyměníce na vzájem body 1, 1', vymění se také body I, I', i obrátí se tudíž také směr úsečky y_1. Ze všeho vysvítá, že k $\left\{\begin{matrix}\text{positivným}\\ \text{negativným}\end{matrix}\right\}$ součinům ab náležejí $\left\{\begin{matrix}\text{positivné}\\ \text{negativné}\end{matrix}\right\}$ úsečky y, je-li bod f na pravo od přímky B. Zvolíme-li naopak bod f na levo od přímky B, budou k $\left\{\begin{matrix}\text{positivným}\\ \text{negativným}\end{matrix}\right\}$ součinům náležeti $\left\{\begin{matrix}\text{negativné}\\ \text{positivné}\end{matrix}\right\}$ úsečky y.

---

*) Symbolem $\bar{f}$ znamenáme svazek paprskový první třídy, jehož středem jest bod f.

Bereme-li vzdálenost f za $\left\{\begin{matrix}\text{positivnou}\\ \text{negativnou}\end{matrix}\right\}$, je-li bod f na $\left\{\begin{matrix}\text{pravo}\\ \text{levo}\end{matrix}\right\}$ od přímky B, dány $\left\{\begin{matrix}\text{positivné}\\ \text{negativné}\end{matrix}\right\}$ součiny ab $\left\{\begin{matrix}\text{positivnými}\\ \text{negativnými}\end{matrix}\right\}$ součiny fy, a vysazení činitele vykonáno vyloženou konstrukcí nejen co do prosté velikosti ale také co do znaménka.

Podrobíme-li druhý součin $a_2 b_2$ témuž výkonu, obdržíme

$$fy_2 = a_2 b_2$$

co do velikosti i znaménka; poněvadž pak bod 1' přímky B jest zároveň bodem 2 a tudíž paprsek $f1$ zároveň paprskem $f2$, jest i paprsek $a'_1 I'$ zároveň paprskem $a_2'II$ a tudíž bod I' spolu bodem II, což podmínkou, aby úsečky II', $II\,II'$ na přímce Y bezprostředně se sčítaly. Máme tedy

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = f(\overline{II'} + \overline{II\,II'}) = f.\overline{I\,II'}$$

Postupujíce tímto spůsobem obdržíme dále

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = f\,(\overline{II'} + \overline{II\,II'} + \overline{III\,III'}) = f.\overline{I\,III'}$$

a t. d.

Na tomto základě lze strojiti dále

$$a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_3 c_3 + \ldots = fg\,(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots),$$

kdež a, b, c jsou dané úsečky určité velikosti a určitého znaménka, f, g pak činitelé, jež vysaditi máme.

Stanovíme-li totiž spůsobem právě vyloženým

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= fy_1 \\ a_2 b_2 &= fy_2 \\ a_3 b_3 &= fy_3 \\ &\ldots\ldots, \end{aligned}$$

zbývá pak vykonati

$$y_1 c_1 + y_2 c_2 + y_3 c_3 + \ldots = g\,(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots).$$

Poněvadž úsečky $y_1, y_2, y_3 \ldots$ jsou na ose Y v té souvislosti, v jaké byly dříve úsečky $b_1, b_2, b_3 \ldots$ na přímce B, má osa Y nyní význam přímky B, i potřebí zvoliti ve vzdálenosti g (vzaté opět ve směru osy X) od osy Y na straně náležité bod g, přenésti na osu X úsečky c tak jako dříve úsečky a, vésti přímky C a sestrojiti lomenou čáru $c'_1\, c'_2\, c'_3 \ldots$ Pořadné strany její stanoví na ose Y žádané úsečky $\overline{11'} = \eta_1$, $\overline{22'} = \eta_2$, $\overline{33'} = \eta_3, \ldots$, jež zase polohou svou bezprostředně se sčítají. V obr. 4. sestrojeno tak

$$y_1 c_1 + y_2 c_2 + y_3 c_3 + y_4 c_4 = g\,(\overline{11'} + \overline{22'} + \overline{33'} + \overline{44'}) = g\,.\,\overline{14'},$$

i máme tedy co do velikosti i co do znaménka

$$a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_3 c_3 + a_4 b_4 c_4 = f.g.\overline{14'}.$$

Týmž spůsobem lze dále vysaditi činitele fgh ze součtu

$$a_1 b_1 c_1 d_1 + a_2 b_2 c_2 d_2 + a_3 b_3 c_3 d_3 + \ldots$$

a vůbec vyjádřiti součet součinův k činitelů jediným součinem, jehož $k - 1$ činitelů dáno.

IV. Grafické mocnění.

Jsou-li ve výraze

$$x = a\frac{m}{n}\frac{m'}{n'}\frac{m''}{n''}\cdots$$

poměry $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}, \ldots$ rovny vespolek, máme formu

$$x = a\left(\frac{m}{n}\right)^k,$$

t. j. úsečka a má se násobiti k-tou mocninou poměru $\frac{m}{n}$.

Poněvadž pak výraz ten psáti lze také ve formě

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{m}{n}\right)^k,$$

jest nám tu strojiti poměr, rovnající se k-té mocnosti poměru daného.

Konstrukce naznačena v obr. 5. a), kdež na každý z paprsků A, B přenešena od bodu 0 každá z úseček m, n, dále pak na paprsek A úsečka a, načež násobeno graficky spůsobem známým. Jestiť pak

$$\overline{01} = a\frac{m}{n}, \quad \overline{02} = a\left(\frac{m}{n}\right)^2, \quad \overline{03} = a\left(\frac{m}{n}\right)^3, \ldots$$

dále

$$\overline{01'} = a : \frac{m}{n} = a\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}, \quad \overline{02'} = a\left(\frac{m}{n}\right)^{-2}, \ldots$$

Mimo to vychází z podobnosti trojúhelníků $0a1$, 012

$$\frac{\overline{12}}{\overline{a1}} = \frac{\overline{01}}{\overline{0a}},$$

a znamenáme-li délku $\overline{a1}$ krátce písmenem b,

$$\overline{12} = b\frac{m}{n},$$

z obdobných důvodů pak dále

$$\overline{23} = \overline{12}\frac{m}{n} = b\left(\frac{m}{n}\right)^2, \quad \overline{34} = b\left(\frac{m}{n}\right)^3, \ldots,$$

což ukazuje k jinému poněkud spůsobu grafického mocnění, jež by záleželo v tom, že bychom danou délku b přenesli do mb, vedli $ba \parallel B$ a postupovali pak jako dříve.

Připomenutí. Délky $0a, 01, 02, \ldots$ a obdobně $a1, 12, 23, \ldots$ jsou pořadnými členy geometrické progressí, jejímž podílem jest poměr $\frac{m}{n}$; v posledním případě dán jest zároveň součet k členů délkou lomené čáry $a\,1\,2\,3\ldots$, i vysvítá z obrazce bezprostředně podmínka konvergence dotčené řady.

Poněkud jinak upraven jest obr. 5. b), kdež na dvě pravoúhelné osy A, B přenešeny od počátku 0 délky n, m, úsečka a pak na osu A. Vedeme-li $a1 \parallel mn$, $12 \perp a1$, $23 \perp 12$ a t. d., máme

$$\overline{01} = a\frac{m}{n}, \overline{02} = \overline{01}\frac{m}{n} = a\left(\frac{m}{n}\right)^2, \overline{03} = \overline{02}\frac{m}{n} = a\left(\frac{m}{n}\right)^3, \ldots;$$

naopak

$$\overline{01'} = a\frac{n}{m} = a\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}, \quad \overline{02'} = a\left(\frac{m}{n}\right)^{-2}, \ldots$$

Jiné opět zřízení ukazuje obr. 5. c), kdež vzato

$$\overline{0m} = m, \ \overline{0n} = n, \ \overline{na} = a$$

i odvozeno

$$\overline{ma_1} = a\frac{m}{n}, \quad \overline{ma_2} = a\left(\frac{m}{n}\right)^2, \quad \overline{ma_3} = a\left(\frac{m}{n}\right)^3, \ldots$$

Zvolíme-li, užívajíce zřízení obrazce 5. a), úhel ε paprsků A, B aneb poměr $\frac{m}{n}$ tak, aby $mn \perp B$ a tudíž i $m'n' \perp A$, obsaženo v obrazci tom násobení úsečky a mocnostmi sinusu neb cosinusu daného úhlu. Je-li tudíž v obr. 5. d) $\overline{0a} = a$, máme zajisté

$$\overline{01} = a \cos \varepsilon = a \sin \varepsilon'$$
$$\overline{02} = \overline{01} \cos \varepsilon = \overline{01} \sin \varepsilon' = a \cos^2 \varepsilon = a \sin^2 \varepsilon'$$
$$\overline{03} = \overline{02} \cos \varepsilon = \overline{02} \sin \varepsilon' = a \cos^3 \varepsilon = a \sin^3 \varepsilon'$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Naopak

$$\overline{01'} = \frac{a}{\cos \varepsilon} = \frac{a}{\sin \varepsilon'} = a \cos^{-1} \varepsilon = a \sin^{-1} \varepsilon'$$
$$\overline{02'} = \overline{01'} \cos^{-1} \varepsilon = \overline{01'} \sin^{-1} \varepsilon' = a \cos^{-2} \varepsilon = a \sin^{-2} \varepsilon'$$
$$\dots\dots\dots$$

V obr. 5. b) obsaženo pak zároveň násobení úsečky a mocnostmi tangenty neb cotangenty daného úhlu. Jestiť

$$\overline{01} = a\, tg\, \varepsilon,\ \overline{02} = a\, tg^2 \varepsilon,\ \overline{03} = a\, tg^3 \varepsilon, \dots$$
$$\overline{01'} = a\, tg^{-1} \varepsilon = a\, ctg\, \varepsilon,\ \overline{02'} = a\, tg^{-2} \varepsilon = a\, ctg^2 \varepsilon, \dots$$

Jde-li o grafické mocnění *čísel*, berme ve výraze

$$x = a \left(\frac{m}{n}\right)^k$$

$a = 1$, dané číslo pak za hodnotu poměru $\frac{m}{n}$. —

Posavadními výkony lze strojiti výrazy

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots,$$

kdež exponenty $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ jsou čísla celistvá dílem positivná dílem negativná a mimo to

$$\alpha + \beta + \gamma \dots = 1.$$

Znamenají-li činitelé $a, b, c, \dots$ čísla, odpadá poslední podmínka, poněvadž scházející činitelé jedničkami nahraditi se mohou.

Dejme tomu, že se má dále strojiti polynom

$$a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k,$$

kdež

$$\lambda = \frac{m}{n},$$

znamenají-li $a_0, a_1, \dots a_k, m, n$ úsečky dané. Úloha zakládá se na strojení výrazu prvního stupně

$$y = a \lambda + b.$$

Užijeme-li konstrukce, na níž založen dříve* obr. 2. d), sestrojíce (v obr. 6.) podobné a stejnělehlé trojúhelníky snm, oay_0 tak, aby

$$\overline{sn} = n, \ \overline{nm} = m, \ \overline{oa} = a,$$

máme

$$\overline{ay_0} = y_0 = a\lambda;$$

přímka L_0 dává pak hodnotu y_0 ku všelikým hodnotám a. Přímku oa zvolme za osu X; druhou osu Y veďme rovnoběžně s úsečkou nm. Přeneseme-li na osu Y od počátku o úsečku $\overline{ob} = b$, a vedeme-li bodem b přímku $L \parallel L_0$, jest

$$\overline{ay} = y = a\lambda + b;$$

přímka L dává pak zase ke všem hodnotám a příslušné y*).

Všeliké úsečky berou se zde opět nejen co do velikosti ale také co do znaménka, majíce podlé toho jeden neb druhý z obou směrů příslušné osy.

Máme-li pak strojiti polynom svrchu vytčený, sestrojme spůsobem právě vyloženým

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 \lambda + a_1 \\ y_2 &= y_1 \lambda + a_2 \\ y_3 &= y_2 \lambda + a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_{k-1} &= y_{k-2} \lambda + a_{k-1} \\ y_k &= y_{k-1} \lambda + a_k . \end{aligned}$$

Pak jest y_k žádanou hodnotou daného polynomu. Násobíme-li totiž tyto rovnice každou příslušným činitelem $\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \lambda^{k-3}, \ldots \lambda, 1$, a sečteme-li výsledky na obou stranách znaménka rovnosti, obdržíme

$$y_k = a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \ldots a_{k-1}\lambda + a_k.$$

V. Grafické odmocňování.

Veďme ve svazku $\bar{o}$ paprsky $A_0, A_1, A_2, \ldots A_k, \ldots$ tak, by

$$\sphericalangle A_0 A_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 = \ldots = \alpha,$$

a přenesme na ně od středu o po řadě délky a, $a\frac{m}{n}$, $a\left(\frac{m}{n}\right)^2, \ldots$

*) Jak patrno, strojíme tím přímku, danou v soustavě XY rovnicí $y = \lambda x + b$.

$a\left(\frac{m}{n}\right)^k, \ldots$ Vztahujeme-li měřické místo koncových bodů těchto délek k soustavě polárné, jejíž osou jest A_0 a jejímž počátkem jest o, náleží k odchylce

$$v = k\alpha$$

poloměr

$$u = a\left(\frac{m}{n}\right)^k;$$

eliminací veličiny k obdržíme pak

$$u = a\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{v}{\alpha}}.$$

Znamenáme-li stálý poměr $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ krátce písmenem λ, máme rovnici

$$u = a\lambda^v$$

čili

$$\frac{u}{a} = \lambda^v.$$

Místem koncových bodů jednotlivých poloměrů jest tudíž *spirála exponencialná.*

Jsou-li v, v' dvě libovolné odchylky, $u_v, u_{v'}$ pak příslušné poloměry polárné, tak že

$$\frac{u_v}{a} = \lambda^v, \quad \frac{u_{v'}}{a} = \lambda^{v'},$$

platí také

$$\frac{u_v}{a} \cdot \frac{u_{v'}}{a} = \lambda^{v+v'} = \frac{u_{v+v'}}{a}$$

$$\frac{u_v}{a} : \frac{u_{v'}}{a} = \lambda^{v-v'} = \frac{u_{v-v'}}{a}$$

$$\left(\frac{u_v}{a}\right)^k = \lambda^{kv} = \frac{u_{kv}}{a}$$

$$\sqrt[k]{\frac{u_v}{a}} = \lambda^{\frac{v}{k}} = \frac{u_{\frac{v}{k}}}{a},$$

z čehož vychází, kterak užívajíce této křivky můžeme graficky násobiti, děliti, mocniti i *odmocňovati.*

Ku každé dané délce, bere-li se za poloměr této spirály, náleží určitá odchylka v; násobení poměrův $\frac{u}{a}$ děje se sčítáním, dělení odčítáním, mocnění násobením, odmocňování dělením příslušných odchylek. Čára taková zastupuje logarithmické tabulky čísel, i mohou se jí řešiti nejen úlohy číselné ale i takové, jež dány jsou spůsobem ryze geometrickým, aniž by se data musela vyjadřovati čísly.

Na př. Má se stanoviti poloměr koule mající týž obsah tělesný jako točný kužel základního poloměru r a výšky h.

Potřebí tu vyhověti rovnici

$$\frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

čili

$$x^3 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 h$$

což můžeme psáti ve formě

$$\frac{x}{a} = \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{1}{2}r}{a}\right)^2 \frac{h}{a}}.$$

Rozměry $\frac{1}{2}r$, h kužele (kterýž může býti dán na př. průměty svými) uveďme do křivky co poloměry, a jsou-li v', v'' příslušné odchylky, stanovme dále poloměr náležející k odchylce

$$\frac{2v' + v''}{3};$$

poloměr tento jest žádaným poloměrem koule.

Chceme-li této křivky užívati ku grafickému násobení, dělení, mocnění a odmocňování daných *čísel*, připojme k ní ještě měřidlo co možno dokonalé, založené na délce a co jedničce. Rovnice spirály jest pak prostě

$$u = \lambda^v.$$

Máme-li na př. strojiti

$$x = \sqrt[5]{\frac{2{\cdot}82^3 . 3{\cdot}14}{4{\cdot}875^2}},$$

stanovme k poloměrům 2·82, 3·14, 4·875 příslušné odchylky v', v'', v''' a sestrojme

$$\frac{3v' + v'' - 2v'''}{5};$$

příslušný poloměr stanoví na měřidle žádané číslo x.

Není potřebí dokládati, že přesnost všelikých těchto výkonů záleží podstatně na přesnosti spirály, kteréž užíváme. Majíce strojiti tuto křivku rozdělme svazek paprskový $\bar{o}$ na rovné díly dostatečného množství, zvolme vhodně délku a, dále poměr $\frac{m}{n}$ a stanovme graficky délky

$$a\frac{m}{n}, \quad a\left(\frac{m}{n}\right)^2, \quad a\left(\frac{m}{n}\right)^3, \ldots,$$

jakož i

$$a\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}, \quad a\left(\frac{m}{n}\right)^{-2}, \ldots$$

příslušných poloměrů. Poněvadž tu každý následující poloměr vyvozuje se z předešlého, nutno vždy po několika výkonech přesvědčiti se o správnosti výsledku vypočtením té které hodnoty. Co se týče poměru $\frac{m}{n}$, uvažme, že k danému poloměru u stanoví se příslušná odchylka průsekem spirály s kruhovým obloukem, opsaným z bodu o poloměrem u, a že tedy strojíme tím přesněji, čím více úhel, v němž obě křivky se protínají, blíží se k pravému. Úhel ten závisí pak na tom, jak rychle roste poloměr spirály, i bude tedy k úhlu pravému tím blíže, čím věčší poměr $\frac{m}{n}$ za stejného jinak rozdělení svazku o v úhly α.

(Obr. 7. sestrojen na základě hodnot $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\frac{m}{n} = 1{\cdot}2$).

V příčině dělení úhlů, jehož vyžaduje odmocňování, prospívá kružnice opsaná ze středu o poloměrem tak velikým, jak nákresna dovoluje, a náležitě rozdělená. Tím lze vyhnouti dělení velikých úhlů a tedy velikých oblouků. Máme-li na př. strojiti třetinu úhlu obsaženého mezi 180° a 270°, můžeme rozděliti místo celého úhlu rozdíl jeho od $\left\{\begin{matrix}180^0\\270^0\end{matrix}\right\}$ a třetinu tohoto rozdílu $\left\{\begin{matrix}\text{přičísti k } 60^0\\\text{odečísti od } 90^0\end{matrix}\right\}$.

Jak známo, rejsuje se křivka soustavou bodů stanovená mnohem bezpečněji, dány-li spolu tečny oněch bodů. V tomto případě můžeme snadně jíti ještě dále, totiž strojiti kružnice oskulační jednotlivých bodů, čímž dosahujeme onoho účelu měrou ještě plnější. Známoť zajisté, že polárná normála spirály exponenciálné jest spolu jejím poloměrem křivosti; normála tato pak nejpříhodněji se stanoví polárnou subnormálou, kteráž dána výrazem

$$u\,l\lambda\,.$$

Potřebí tedy násobiti poloměr u poměrem

$$l\lambda = \frac{l\,m - l\,n}{\alpha}\,,$$

kterýž k tomu konci vypočísti se musí. Vyjádříme-li jej dvěma délkami m', n' a opíšeme-li jimi okolo středu o kružnice M', N', můžeme ku každému bodu u spirály stanoviti snadně střed křivosti. Seče-li kružnice N' poloměr ou v bodu n', kružnice M' pak kolmý k němu poloměr v bodu m', veďme $uc \parallel n'm'$; bod c jest pak žádaným středem křivosti.

Stanovíme-li takto ku každému sestrojenému bodu spirály příslušný střed křivosti, můžeme rejsovati křivku tuto velmi přesně co obalovou čáru jejích kružnic oskulačních.

Jak známo, jest evoluta spirály exponencialné také spirálou exponencialnou; lze pak voliti veličinu λ tak, aby jednotlivé středy křivosti obsaženy byly v čáře samé, kteráž jest pak vlastní svou evolutou. Tím stává se strojení křivky snadnějším, pro kterou příčinu ji také Culmann poroučí.

Nám zdá se však křivka taková nepříležitou proto, že nerozvíjí se dosti rychle, pročež také průseky její s kružnicemi středu o nejsou prakticky dosti určité.

(Pokračování.)

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.*)

(Pokračování.)

Tvary dvoustejnoklonné.

63. Mnohé stejnoklonné tvary objevují se v takových poměrech, že se dají odvésti od dvou prvotvarů spolu spojených v postavě úhlopříčné, totiž dle společné hlavní osy o 60^0