Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička
Příspěvek k nauce o nekonečných řetězcích

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 1, 15--18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123746

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1893

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

$$P=\alpha\beta\gamma\pi\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(\alpha^2+\varepsilon)(\beta^2+\varepsilon)(\gamma^2+\varepsilon)}}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2+\varepsilon}-\frac{y^2}{\beta^2+\varepsilon}-\frac{z^2}{\gamma^2+\varepsilon}\right).$$

Vzorce (15), jakož i (21), jimiž řešení problemu potencialu založené dosud na trojnásobné integraci redukováno jest na integraci jednoduchou i v tom případu, kdy hustota dle zmíněného zákona proměnlivou jest, jsou po mém soudu novými.

Příspěvek k nauce o nekonečných řetězcích.

Napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

V nauce o nekonečných řetězcích dokazuje se, že

$$-\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{F}}}\left(\frac{a_k}{a_k+1}\right)=1\ , \tag{1}$$

a to spůsobem jednoduchým sice, ale rozvláčným,*) takže vzniká odůvodněné přání, aby se důkaz tento vedl co možná nejkratčeji, *přímo*. A toho dosáhnouti možná takto:

Značí-li p_n a q_n čitatele a jmenovatele n-té hodnoty přibližné všeobecného řetězce

$$-\mathrm{F}\left(-\frac{a_k}{b_k}\right)=\cfrac{a_1}{b_1-\cfrac{a_2}{b_2-\cfrac{a_3}{b_3-\dots}}}\ ,$$

platí, jak známo,

$$p_n=a_1\begin{vmatrix} b_2, & 1, & 0, & \dots, & 0, & 0\\ a_3, & b_3, & 1, & \dots, & 0, & 0\\ 0, & a_4, & b_4, & \dots, & 0, & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & a_n \dots & b_n\end{vmatrix}, \tag{2}$$

což představuje determinant stupně $(n-1)$-ho, a podobně

---

*) Viz *Studnička:* „Všeobecné tvarosloví algebraické“ pag. 224.

$$q_n = \begin{vmatrix} b_1, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ a_2, & b_2, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & a_3, & b_3, & \ldots, & 0, & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & a_n, & b_n \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Platí-li tedy všeobecně

$$b_k = a_k + 1, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4}$$

můžeme poslednímu determinantu dáti tvar

$$q_n = \begin{vmatrix} a_1 + 1, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0 + a_2, & b_2, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0 + 0, & a_3, & b_3, & \ldots, & 0, & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 + 0, & 0, & 0, & \ldots, & a_n, & b_n \end{vmatrix},$$

načež se podlé prvků sloupce prvního rozloží v

$$q_n = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_3, & b_3, & 1, & \ldots, & 0 \\ 0, & a_4, & b_4, & \ldots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_2, & b_2, & 1, & \ldots, & 0 \\ 0, & a_3, & b_3, & \ldots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & b_n \end{vmatrix},$$

takže majíce zřetel ke vzorci (2) a ku podmínce (4), obdržíme

$$q_n = p_n + \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_2, & a_2 + 1, & 1, & \ldots, & 0 \\ 0, & a_3, & a_3 + 1, & \ldots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & a_3 + 1 \end{vmatrix}.$$

Poslední tento determinant uvede se postupným užíváním poučky, podle níž se stupeň jeho snižuje,*) na

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & \ldots \\ a_3, & a_3 + 1, & 1, & \ldots \\ 0, & a_4, & a_4 + 1, & \ldots \\ \vdots & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & \ldots \\ a_4, & a_4 + 1, & 1, & \ldots \\ 0, & a_5, & a_5 + 1, & \ldots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

*) Viz *Studnička*: „O nové poučce determinantní“ Časop. IX. pag. 97.

$$= \ldots = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ a_n, & a_n + 1 \end{vmatrix} = 1,$$

takže konečně bude

$$q_n = p_n + 1, \tag{5}$$

z čehož se odvozuje známým spůsobem vzorec (1).

Jest sice ze vzorce (5) patrno, že jmenovatel k-té hodnoty příbližné řetězce (1), kde jmenovatel k-tého článku jest o 1 větší nežli příslušný čitatel, taktéž jest o 1 větší nežli příslušný čitatel; avšak aby se dovodila obecná platnost vzorce (1), nutno věděti, že hodnota čitatele i jmenovatele n-tého zlomku příbližného roste do nekonečna.

Dokazujeť se tu pak, že

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{p}_n = \infty ,$$

což ze složení vzorcem (2) vyjádřeného jde na jevo, a přímým vyčíslením determinantu příslušného přímo se dokazuje. Jestiť tu za podmínky vzorcem (4) stanovené

$$p_n = a_1 \begin{vmatrix} a_2 + 1, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_3, & a_3 + 1, & 1, & \ldots, & 0 \\ 0, & a_4, & a_4 + 1, & \ldots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & a_n + 1 \end{vmatrix},$$

z čehož plyne, užijeme-li obratů dříve vytčených,

$$p_n = a_1 \left(1 + a_2 \begin{vmatrix} a_3 + 1, & 1, & 0, & \ldots \\ a_4, & a_4 + 1, & 1, & \ldots \\ 0, & a_5, & a_5 + 1, & \ldots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}\right);$$

a opakujeme-li týž postup i s determinantem tímto dále, zjednáme si konečně

$$p_n = a_1 (1 + a_2 (1 + a_3 (1 + a_4 (\ldots + a_{n-1} (1 + a_n)\ldots)))),$$

takže se obdrží, jde-li n do nekonečna,

$$\lim p_n = a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 a_4 + \dots,$$

anebo ve formě symbolické

$$\lim_{n=\infty} p_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots}{a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} \dots} = \infty, \tag{6}$$

z čehož zřejmě jde na jevo, že součet této řady nekonečné jest hodnoty nekonečné.

O integraci rovnic mezi třemi úplnými differenciály.

Napsal

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

Učebné knihy počtu integrálního mnohdy vykládají integraci rovnice

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

aniž při tom užívají t. zv. integrační podmínky, jež k existenci integrálu jest nutna.

Účelem těchto řádků jest elementárný výklad a odůvodnění methody k integraci této rovnice, výklad určený hlavně pro posluchače naší vysoké školy technické.

Pokusme se ustanoviti funkci z dvou proměnných x a y tak, aby úplný její differenciál dz hověl rovnici

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \tag{1}$$

kde P, Q, R jsou dané výrazy obsahující x, y, z.

Rovnici (1) považovati dlužno za zkrácené vyjádření požadavku

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R};$$

má-li tedy funkce existovati, musí