Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 1, 106--112

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123716

Úlohy.

a) Z mathematiky.

1.

Řešiti jest soustavy rovnic:

α) $x + y + xy = a$
$x^2 + y^2 + x^2y^2 = b$

β) $x + y + \sqrt{xy} = a$
$x^2 + y^2 + xy = b$

Prof. *Rudolf Hruša.*

2.

Dokažte bez použití analytické geometrie větu: Protíná-li hlavní osa kuželosečky v bodě N normálu vztyčenou v bodě M ke kuželosečce, jest průmět úsečky MN na průvodič roven parametru kuželosečky.

Dr. *V. Hruška.*

3.

Na straně BC daného trojúhelníku ABC jest dán bod D; tímto bodem mají se vésti dvě přímky DE, DF v úhlu φ tak, aby trojúhelník DEF, který má vrcholy E, F na stranách AB, BC, měl plochu co nejmenší.

Šk. rada *Václav Hübner.*

4.

Kružnice postupně se dotýkající mají společné vnější tečny. Stanovte jich poloměry a součet jich ploch.

L. Kolenatý.

5.

a) Dvěma body vésti kružnici na hmotné kouli.
b) Určiti průměr hmotné koule.
(Užitím pravítka, kružítka a pomocné nákresné noviny.)

Zásob. officiál *J. Kroupa.*

6.

Dvě paraboly mají ohniska F_1, F_2 a společnou řídící přímku d; jsou-li ohniska na téže straně přímky d a neleží-li na kolmici k d, protínají se obě paraboly ve dvou bodech v konečnu, jichž spojnice je osou souměrnosti F_1, F_2.

Týž.

7.

Najděte trojúhelník největšího resp. nejmenšího obvodu, jsou-li dány poloměry kružnice vepsané a opsané.

Prof. *Ant. Lochmann.*

8.

Najděte na ellipse bod, jehož normála má od středu vzdálenost co největší.

Týž.

9.

Sečísti jest řadu

$$\tfrac{1}{2}\binom{n}{1} - \tfrac{2}{3}\binom{n}{2} + \tfrac{3}{4}\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\binom{n}{n}.$$

F. Mádle.

10.

Pohybuje-li se úsečka stálé délky a tak, že její koncové body zůstávají stále na pravoúhlých osách souřadných, obaluje křivku zvanou asteroidou o rovnici $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Která tečna asteroidy je zároveň její normálou?

Týž.

11.

Na obvod kružnice o středu S opsané pravidelnému sedmiúhelníku $ABCDEFG$ budiž od vrcholu A směrem $ABC\ldots$ nanesen třikrát její poloměr, tak že $AM = MK = KL$; průsečíky úseček BG, CF, DE, s průměrem ASL označme M, N. O a průsečík přímek HL, KS označme P. Dokažte, že body M, N, O se z bodu P promítají třemi paprsky svírajícími navzájem úhly 60°.

Supl. prof. *Jaromír Pilnáček.*

12.

Jaké jest geometrické místo středů rovnostranných trojúhelníků vepsaných do ellipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Týž.

13.

Dokažte, že libovolná přímka procházející bodem $(-p, 0)$ protíná parabolu $y^2 = 2px$ ve dvou bodech, jichž normály se protínají v bodě na této parabole ležícím.

Týž.

14.

Výraz $2\binom{\binom{n}{2}}{3} - 3\binom{\binom{n}{3}}{2}$ upravte na tvar

$$a_0\binom{n}{5} + a_1\binom{n+1}{5} + a_2\binom{n+2}{5} + \ldots + a_5\binom{n+5}{5}.$$

Prof. *Jan Schuster.*

15.

Určete objem hranolce, který vznikne z pravidelného hranolu n-bokého, otočí-li se jedna podstava kol středu o úhel ε. Jaké těleso vznikne, necháme-li n růsti do nekonečna?

Týž.

16.

Lomenou čáru složenou ze $2n$ stejných úseček a učiňte hranami pobočnými a doplňte nahoře i dole vždy dalšími n hranami tak, aby vznikl hranolec, omezený dvěma pravidelnými n-úhelníky shodnými jako podstavami a $2n$ shodnými rovnoramennými trojúhelníky. Dokažte, že sklon dvou pobočných hran je nezávislý od n, má-li hranolec objem co největší.

Týž.

17.

Z trojúhelníku rovnoramenného složiti plášť souměrného čtyřstěnu o největším objemu.

Týž.

18.

Řada 2, 4, 8, 16, 31, 58, ... vznikla sečtením souhlasných členů řady arithmetické třetího stupně a řady geometrické. Určiti její obecný člen a součtový vzorec.

† Dr. *Vladimír Živanský.*

19.

Určiti jest v rovnicích

α) $x^3 - ax^2 + ax - 1 = 0$

β) $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$

a tak, aby součet třetích mocnin kořenů byl maximem neb minimem.

Týž.

20.

Bodem, v němž paprsek vedený ohniskem kuželosečky seče příslušnou přímku řídící, vedeny jsou tečny ke kuželosečce. Jest určiti souřadnice středu příslušné poláry a vyšetřiti geometrické místo těchto středů, otáčí-li se paprsek kolem ohniska.

Týž.

b) Z deskriptivní geometrie.

1.

Sestrojte kulovou plochu dotýkající se uvnitř stran daného trojúhelníka a přímky s rovinou tohoto trojúhelníka různoběžné.

Prof. *Fr. Granát.*

2.

Dány jsou dvě přímky mimoběžné o, t nakloněné k oběma průmětnám; o jest osou rotačního válce, který se dotýká přímky t. Má se sestrojiti půdorysná a nárysná stopa tohoto válce.

Prof. *Josef Hanuš.*

3.

Sestrojiti osu rotační plochy kuželové, která jest určena vrcholem, jedním bodem na povrchu, tečnou přímkou a odchylkou povrchových přímek od osy.

Prof. *Jan Kroupa.*

4.

Sestrojiti kouli, dotýkající se dané přímky a dané roviny, jež jsou navzájem rovnoběžné, známe-li jeden průměr co do polohy. Týž.

5.

Zobraziti rotační paraboloid, jsou-li dány čtyři body na povrchu a podmínka, že osa je kolmá k půdorysně.
Prof. *Ant. Navrátil.*

c) Z fysiky. *)

1.

Jak lze pomocí libelly (I. 115, 125) o poloměru křivosti R měřiti zrychlení? Když zeměkoule obíhá elliptickou dráhu kolem slunce, mění se její rychlost dle druhého zákona Keplerova (I, 93, 99). Bylo by možno vhodně citlivou libellou stanoviti zrychlení zeměkoule? *K.*

2.

V kapalině jsou vyznačeny proudové trubice tak, že jejich kolmé průřezy jsou všude obráceně úměrny rychlosti toku. Rovněž jsou vyznačeny plochy téhož rychlostního potenciálu a to tak, že rychlostní potenciál stoupne o stálou hodnotu, když přejdeme od jedné plochy k následující. Dokažte, že tyto plochy dělí proudové trubice na útvary buňkovité, které obsahují vždy týž obnos kinetické energie. *K.*

3.

Dvě přímková a rovnoběžná vírová vlákna jsou ve vzájemné vzdálenosti d umístěna v nekonečném objemu nestlačitelné kapaliny. Vírové intensity obou vláken jsou stejné, ale opačného znamení. Spojíme obě vlákna kolmicí, prodloužíme ji přes vlákno druhé, a ve vzdálenosti δ od něho nakreslíme kruh o poloměru R, takže $R^2 = (d + \delta)\,\delta$ v rovině na osách vláken kolmé. Dokažte, že tento kruh je proudovou křivkou. *K.*

---

*) Řešení úloh předpokládá studium článku prof. Dra. *B. Kučery* „O některých analogiích mezi hydrodynamikou a naukou o elektřině“, v tomto čísle uveřejněného.

4.

V nekonečné, nestlačitelné kapalině nachází se dublet, to jest vznik A a zánik B téže vydatnosti ve velmi malé vzájemné vzdálenosti. Přímka AB nazývá se osou dubletu. Ve směru, jenž s ní tvoří úhel ϑ a vzdálenosti r od středu C dubletu bod P. Dokažte, že složka rychlosti toku v bodě P, padající do směru PC jest rovna $\frac{2\,\sigma \cos \vartheta}{4\,\pi\, s\, r^3}$, kdežto do směru na $P\,C$ kolmého padá vložka $\frac{\sigma \sin \vartheta}{4\,\pi\, s r^3}$, kde s je spec. hmota kapaliny, a σ moment dubletu, to jest součin z vydatnosti vzniku a vzdálenosti $A\,B$. *K.*

5.

Lineární zdroj sestává ze spojité řady zdrojů bodových, v přímku sestavených. Jeho vydatností Q nazýváme množství za sekundu v jedničce délkové vznikající kapaliny. Dokažte, že ve vzdálenosti r nastává rychlost toku $\frac{Q}{2\,\pi\, s r}$. *K.*

6.

Dva lineární zdroje vydatnosti $+Q$ a $-Q$ rovnoběžné a ve vzdálenosti δ tvoří lineární dublet momentu $\sigma_1 = Q\,\delta$. Dokažte, že ve vzdálenosti r_1 tvořící s osou dubletu úhel ϑ je radiální složka toku rovna $\frac{\sigma_1 \cos \vartheta}{2\,\pi\, s r_1^2}$, kdežto složka kolmá na ní jest $\frac{\sigma_1 \sin \vartheta}{2\,\pi\, s r_1^2}$. *K.*

7.

Kapalina spec. hmoty s teče stejnoměrnou rovnou trubicí a ztrácí následkem vnitřního tření množství E energie na jedničku objemu při proběhnutí jedničky délkové. Jaký musí býti sklon trubice k horizontále, aby tlak kapaliny byl podél celé trubice stálý? *K.*

8.

Paprsek kapaliny dopadá rychlostí v na rovinnou plochu a kapalina roztéká se po dopadu tangenciálně po ploše. Dokažte, že síla, kterou působí paprsek na plochu, je sqv^2, kde q je průřez paprsku, s spec. hmota kapaliny. Má sqv^2 význam tlaku? *K.*

9.

Rychlíkové lokomotivy pro dlouhé tratě mohou plniti své vodní nádrže mezi jízdou pomocí následujícího zařízení. Nádrž jest opatřena vertikální trubicí, která dá se spustiti tak, že zasahá do dlouhého reservoiru vodního umístěného mezi kolejemi. Spodní konec trubice jest ohnut v pravém úhlu, takže horizontálním ramenem se pohybuje proti vodě v reservoiru. Je-li horní konec trubice ve výši h nad hladinou vody v reservoiru a je-li rychlost lokomotivy V, s jakou rychlostí poteče voda do nádrže na lokomotivě, zanedbáme-li vnitřní tření?

Pokyn k řešení: Udělme v myšlenkách lokomotivě i reservoiru společnou rychlost — V. *K.*

10.

Jak dlouho bude trvati, než se naplní nádrž objemu 10 hektolitrů na lokomotivě ujíždějící rychlostí 60 *km* za hodinu trubicí průměru 10 *cm*, je-li její horní ústí ve výši 250 *cm* nad hladinou vody v reservoiru a je-li energie zmařená v trubici ve tvar tepla rovna $^1/_3$ práce vykonané při zvedání vody. *K.*

Řešení úloh.

Řešení úloh buďtež zaslána do 15. dubna 1916 na adressu: S. doc. Dr. *K. Rychlík*, v Praze II., Mikulandská 3.

Páni řešitelé se žádají, aby řešení každé úlohy bylo napsáno *zvlášť* na jednu neb několik čtvrtek papíru obyčejného formátu. V čelo *každého* řešení budiž uvedeno číslo úlohy (tekst úlohy není nutno psáti), jméno řešitele a ústavu, na němž studuje. Řešení buďtež seřazena dle čísel, a jsou-li zasílána v obalu menšího formátu než čtvrtkového, jako celek složena. Zároveň uveďte páni řešitelé při poslední zásilce na zvláštním lístku papíru seznam všech řešení, která vůbec zaslali.

Mimo to je nutno, aby páni řešitelé uvedli přesnou adressu svou, aby mohly býti ceny správně rozeslány.

Neopomeňte zásilek dostatečně frankovati.
