Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

George Neville Watson

Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 1, 1--7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123698

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale.

G. N. Watson, Birmingham.

(Eingegangen am 22. Juli 1935.)

I. Vor zwanzig Jahren hat Herr Professor K. Petr in seiner Abhandlung unter dem Titel: O jedné formuli pro výpočet určitých integrálů[1]) die folgende Formel zur numerischen Berechnung eines bestimmten Integrals ohne Beweis angegeben:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}h\,[f(a) + f(b)] + A_1 h^2\,[f'(a) - f'(b)] + \ldots$$
$$+ A_k h^{k+1}\,[f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)] + \ldots$$
$$+ A_{n-1} h^n\,[f^{(n-1)}(a) + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(b)] + R_n,$$

wobei

$$h = b - a,$$

$$A_{2k-1} = \binom{n-k}{k} \frac{1}{2\,(4n-2)\,6\,(4n-6)\ldots(4k-2)\,(4n-4k+2)},$$

$$A_{2k} = \binom{n-k-1}{k} \frac{1}{2\,(4n-2)\,6\,(4n-6)\ldots(4k-2)\,(4n-4k+2)\,(4k+2)},$$

$$R_n = \frac{(-1)^n\,(n!)^2\,h^{2n+1}}{(2n)!\,(2n+1)!}\,f^{(2n)}(\xi), \qquad a < \xi < b,$$

ist.

Es ist zu bemerken, daß in der Originalabhandlung des Herrn Petr das Zeichen $(-1)^n$ im Restglied infolge eines Schreib- oder Druckfehlers fehlt.

Um die Wichtigkeit der Petrschen Entwicklung darzutun' beobachten wir, daß das Restglied gleich $O(h^{2n+1})$ ist, während das

[1]) Časopis, 44 (1915), 454—455.

letzte Glied der vorangehenden Reihe h^n enthält; die Glieder, die $h^{n+1}, \ldots, h^{2n}$ enthalten, fehlen.

Ganz neulich hat Herr J. Gebauer[2]) verschiedene ähnliche Formeln untersucht. In der Gebauerschen Abhandlung hat der Verfasser einige Transformationen unendlicher Taylorreihen benutzt. Folglich hat er annehmen müssen, daß die Funktion $f(x)$ im Intervall von a bis b mit Einschluß der Endpunkte[3]) alle Differentialquotienten $f'(x), f''(x), \ldots$ besitzt. Ebenso hat er als ausgemacht angenommen, daß die Entwicklung

$$\int_a^x f(t)\, dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m-1)}(a)$$

im Intervall von a bis b mit Einschluß der Endpunkte gültig ist.

Für die Gültigkeit der Petrschen Entwicklung ist nicht notwendig, daß die Differentialquotienten $f^{(2n+1)}(x), f^{(2n+2)}(x), \ldots$ existieren. Ferner ist es noch nicht bewiesen worden, daß die Gebauersche Reihe und das Petrsche Restglied äquivalent sind. Aus diesem Grunde habe ich mich entschieden, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Petrschen Entwicklung zu untersuchen. Daher gebe ich in dieser Abhandlung zwei Erforschungen[4]) dieser Entwicklung an.

II. Ich schreibe die Entwicklung in der Form:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k h^{k+1} [F^{(k+1)}(a) + (-1)^k F^{(k+1)}(b)] + R_n,$$

wobei

$$h = b - a,$$

$$A_k = \frac{(2n-k-1)!\, n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!\,(2n)!},$$

$$R_n = \frac{(-1)^n (n!)^2 h^{2n+1}}{(2n)!\,(2n+1)!} F^{(2n+1)}(\xi), \quad a < \xi < b$$

ist. Ist $f(x)$ ein Differentialquotient, dessen Integral $F(x)$ ist, so kommt die Petrsche Entwicklung heraus. Es ist merkwürdig, daß man die Petrschen Werte der Koeffizienten A_{2k-1}, A_{2k} im einfachen obenerwähnten Ausdrucke zusammenfassen kann. Um diese Verbindung zu beweisen, beobachten wir, daß

$$1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2m-1) = \frac{(2m)!}{2^m\,.\,m!}$$

[2]) Časopis, **68** (1934), 152—166.

[3]) Im Anschluß an G. Kowalewski und H. Hahn bezeichne ich mit (a, b) das Intervall ohne die Endpunkte, mit $[a, b]$ das Intervall einschließlich der Endpunkte.

[4]) Herr Petr hat mir mitgeteilt, daß meine Beweise und der seinige verschieden sind.

ist. Folglich haben wir

$$\binom{n-k}{k} \frac{1}{2\,(4n-2)\,6\,(4n-6)\ldots(4k-2)\,(4n-4k+2)} =$$

$$= \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!\,2^{2k}} \cdot \frac{1\,.\,3\ldots(2n-2k-1)}{1\,.\,3\ldots(2k-1)\,.\,1\,.\,3\ldots(2n-1)} =$$

$$= \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!\,2^{2k}} \cdot \frac{(2n-2k)!\,2^k\,.\,k!\,2^n\,.\,n!}{(2k)!\,(2n)!\,2^{n-k}\,.\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(2n-2k)!\,n!}{(2k)!\,(n-2k)!\,(2n)!} = A_{2k-1}$$

nach der neuen Definition von A_k. Ebenso haben wir

$$\binom{n-k-1}{k} \cdot \frac{1}{2\,(4n-2)\,6\,(4n-6)\ldots(4k-2)\,(4n-4k+2)\,(4k+2)} =$$

$$= \frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k-1)!\,2^{2k+1}} \cdot \frac{1\,.\,3\ldots(2n-2k-1)}{1\,.\,3\ldots(2k+1)\,.\,1\,.\,3\ldots(2n-1)} =$$

$$= \frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k-1)!\,2^{2k+1}} \cdot \frac{(2n-2k)!\,2^{k+1}\,.\,(k+1)!\,2^n\,.\,n!}{(2k+2)!\,(2n)!\,2^{n-k}\,.\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(2n-2k-1)!\,n!}{(2k+1)!\,(n-2k-1)!\,(2n)!} = A_{2k}.$$

Bei meinem ersten Beweis der Petrschen Entwicklung benütze ich partielle Integration in Verbindung mit dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung; beim zweiten Beweis benutze ich einen Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Folglich sind die Bedingungen, den $F(x)$ unterworfen ist, etwas schwächer beim zweiten Beweis als beim ersten Beweis.

III. Nun zum ersten Beweis der Petrschen Entwicklung! Wir setzen noch zur Abkürzung

$$t^n\,(1-t)^n \equiv \Phi(t).$$

Also ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_0^1 h\,F'(a+ht)\,\frac{\mathrm{d}^{2n}\Phi(t)}{\mathrm{d}t^{2n}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k\,h^{k+1} \left[\frac{\mathrm{d}^{2n-k-1}\Phi(t)}{\mathrm{d}t^{2n-k-1}}\,F^{(k+1)}(a+ht)\right]_{t=0}^{t=1} +$$

$$+ h^{2n+1} \int_0^1 \Phi(t)\,F^{(2n+1)}(a+ht)\,\mathrm{d}t.$$

Für die Gültigkeit dieser Formel[5]) ist hinreichend, daß $F'(x)$, $F''(x)$. . ., $F^{(2n+1)}(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ existieren und daß $F^{(2n)}(x)$ das Integral von $F^{(2n+1)}(x)$ ist.[6]) Wenn die Funktionen $F'(x), F''(x), \ldots, F^{(2n+1)}(x)$ die obigen Voraussetzungen erfüllen, so ist $F^{(2n)}(x)$ das Integral von $F^{(2n+1)}(x)$; daher ist $F^{(2n)}(x)$ eine beschränkte Funktion.[7]) Daher ist $F^{(2n-1)}(x)$ das Integral von $F^{(2n)}(x)$; usw.[8]) Bekanntlich ist die Integrierbarkeit von $F^{(2n+1)}(x)$, $F^{(2n)}(x), \ldots, F'(x)$ eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der obigen partiellen Integrationen.

Jetzt vereinfachen wir die rechte Seite der obigen Formel. Es ist leicht zu erkennen, daß

$$\int_0^1 h\, F'(a + ht)\, \frac{d^{2n}\Phi(t)}{dt^{2n}}\, dt = (-1)^n \,.\, (2n)! \int_0^1 h\, F'(a + ht)\, dt =$$

$$= (-1)^n \,.\, (2n)!\, [F(b) - F(a)]$$

ist. Wir bemerken zunächst, daß

$$\frac{1}{(2n-k-1)!} \left[\frac{d^{2n-k-1}\Phi(t)}{dt^{2n-k-1}}\right]_{t=0}$$

gleich dem Koeffizienten von t^{2n-k-1} im Ausdrucke

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} t^{n+m}$$

ist. Ist $k = n, n + 1, \ldots, 2n - 1$, so ist dieser Koeffizient gleich Null. Ist $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, so ist der Koeffizient gleich

$$(-1)^{n-k-1} \binom{n}{n-k-1} = (-1)^{n-k-1} \frac{(2n)!\, A_k}{(2n-k-1)!}.$$

Ebenso mit $t = 1 - u$ haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n-k-1)!} \left[\frac{d^{2n-k-1}\Phi(t)}{dt^{2n-k-1}}\right]_{t=1} &= \frac{(-1)^{k+1}}{(2n-k-1)!} \left[\frac{d^{2n-k-1}\Phi(u)}{du^{2n-k-1}}\right]_{u=0} \\ &= 0, \qquad\qquad k = n, n + 1, \ldots, 2n - 1, \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!\, A_k}{(2n-k-1)!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n - 1. \end{aligned}$$

Also erhält man

---

[5]) Vgl. E. W. Hobson, The Theory of Functions of a real Variable, 1 (1921), § 420. Die Integrale sind im Lebesgueschen Sinne gemeint.

[6]) D. h. $F^{(2n)}(x) - F^{(2n)}(a) = \int_a^x F^{(2n+1)}(t)\, dt$.

[7]) Hobson, a. a. O., § 404.

[8]) Hobson, a. a. O., § 410.

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k h^{k+1} [F^{(k+1)}(a) + (-1)^k F^{(k+1)}(b)] + R_n,$$

wobei

$$R_n = \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 t^n (1-t)^n F^{(2n+1)}(a + ht)\, dt$$

ist.

Ist $F^{(2n+1)}(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig, so besagt der erste Mittelwertsatz der Integralrechnung, daß

$$R_n = \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n)!} F^{(2n+1)}(\xi) \int_0^1 t^n (1-t)^n\, dt$$

$$= \frac{(-1)^n (n!)^2 h^{2n+1}}{(2n)!\,(2n+1)!} F^{(2n+1)}(\xi), \qquad a < \xi < b$$

ist.[9]) Damit ist der erste Beweis der Petrschen Entwicklung vollendet.

Beiläufig zeigen wir, daß wir ziemlich viele Ausdrücke des Restgliedes aus dem Mittelwertsatz erhalten können. Z. B. sei $0 \leqq \mu \leqq n$, $0 \leqq \nu \leqq n$; dann haben wir

$$R_n = \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n)!} \Theta^\mu (1-\Theta)^\nu F^{(2n+1)}(a + \Theta h) \int_0^1 t^{n-\mu} (1-t)^{n-\nu}\, dt$$

$$0 < \Theta < 1$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n-\mu+1)\,\Gamma(n-\nu+1)\, h^{2n+1}}{(2n)!\,\Gamma(2n-\mu-\nu+2)} \Theta^\mu (1-\Theta)^\nu F^{(2n+1)}(a + \Theta h)$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n-\mu+1)\,\Gamma(n-\nu+1)\, h^{2n-\mu-\nu+1}}{(2n)!\,\Gamma(2n-\mu-\nu+2)} \cdot$$

$$\cdot (\xi - a)^\mu (b - \xi)^\nu F^{(2n+1)}(\xi), \qquad a < \xi < b.$$

Allgemeiner sei der Differentialquotient $\psi'(t)$ eine in $[0, 1]$ stetige nichtverschwindende Funktion, dessen Integral $\psi(t)$ ist. Dann ist

$$R_n = \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n)!} \cdot \Theta^n (1-\Theta)^n \cdot \frac{F^{(2n+1)}(a + \Theta h)}{\psi'(\Theta)} \int_0^1 \psi'(t)\, dt =$$

$$\frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n)!} \cdot \Theta^n (1-\Theta)^n \cdot \frac{\psi(1) - \psi(0)}{\psi'(\Theta)} F^{(2n+1)}(a + \Theta h), \quad 0 < \Theta < 1.$$

IV. Ich gründe den zweiten Beweis der Petrschen Entwicklung

[9]) Hobson, a. a. O., § 421.

auf dem Cauchyschen erweiterten Mittelwertsatz der Differentialrechnung, nämlich:

Sind die Funktionen $\chi(x), \psi(x)$ in $[0, 1]$ stetig und in $(0, 1)$ differenzierbar, so gibt es mindestens einen Wert Θ $(0 < \Theta < 1)$, so daß

$$\{\chi(1) - \chi(0)\}\, \psi'(\Theta) = \{\psi(1) - \psi(0)\}\, \chi'(\Theta)$$

ist.[10])

Setzen wir voraus, daß die Funktionen $F(x), F'(x), \ldots, F^{(2n)}(x)$ in $[a, b]$ stetig sind und daß die Funktion $F^{(2n+1)}(x)$ in (a, b) existiert. Ferner sei

$$\psi'(t) \neq 0, \qquad 0 < t < 1.$$

Setzen wir zunächst

$$\begin{aligned}\chi(t) \equiv F(a + ht)\, \Phi^{(2n)}(t) - h\, F'(a + ht)\, \Phi^{(2n-1)}(t) + \ldots \\ + (-1)^{k+1}\, h^{k+1}\, F^{(k+1)}(a + ht)\, \Phi^{(2n-k-1)}(t) + \ldots \\ + h^{2n}\, F^{(2n)}(a + ht)\, \Phi(t),\end{aligned}$$

so daß

$$\chi'(t) = h^{2n+1}\, F^{(2n+1)}(a + ht)\, \Phi(t) = h^{2n+1}\, F^{(2n+1)}(a + ht)\, t^n (1 - t)^n$$

ist. Unter diesen Voraussetzungen sind die Bedingungen des Cauchyschen Mittelwertsatzes erfüllt.

Ferner haben wir

$$\frac{\chi(1) - \chi(0)}{(-1)^n \,.\, (2n)!} = F(b) - F(a) -$$
$$- \sum_{k=0}^{n-1} A_k h^{k+1}\, [F^{(k+1)}(a) + (-1)^k\, F^{(k+1)}(b)].$$

Mit Hilfe dieser letzten Gleichungen gewinnt man aus dem Cauchyschen Mittelwertsatz:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k h^{k+1}\, [F^{(k+1)}(a) + (-1)^k\, F^{(k+1)}(b)] +$$
$$+ \frac{(-1)^n\, h^{2n+1}}{(2n)!} \,.\, \Theta^n (1 - \Theta)^n \,.\, \frac{\psi(1) - \psi(0)}{\psi'(\Theta)}\, F^{(2n+1)}(a + \Theta h),$$
$$0 < \Theta < 1.$$

V. Zum Schluß entnimmt man sehr leicht mit Hilfe meiner Form des Restgliedes einige Darstellungen des Restgliedes als unendliche Reihen. Z. B. aus der Taylorreihe erhält man

$$R_n = \frac{(-1)^n\, h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 t^n (1 - t)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m t^m}{m!}\, F^{(2n+1+m)}(a)\, dt$$

---

[10]) Hobson, a. a. O., § 263.

$$= \frac{(-1)^n\, n!\, h^{2n+1}}{(2n)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!\, h^m}{m!\,(2n+1+m)!} F^{(2n+1+m)}(a),$$

was die Gebauersche Formel (25) ist.[11]

Ferner ist

$$R_n = \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 t^n (1-t)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m (t-\frac{1}{2})^m}{m!} F^{(2n+1+m)}\left(\frac{a+b}{2}\right) dt$$

$$= \frac{(-1)^n\, n!\, h^{2n+1}}{(2n)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!\, h^{2m}}{2^{2m}\,.\, m!\,(2n+1+2m)!} F^{(2n+1+2m)}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Ich glaube, daß diese symmetrische Reihe bisher unbekannt ist.

Für die Gültigkeit dieser Darstellungen des Restgliedes ist notwendig und hinreichend, daß die Funktion $F^{(2n+1)}(a+ht)$ im Intervall $0 < t < 1$ nach Potenzen von t bzw. $t - \frac{1}{2}$ entwickelbar ist und daß die integrierten Reihen konvergieren.

*

O jednom vzorci pro numerický výpočet určitých integrálů.

(Obsah předešlého článku).

Předmětem této práce je důkaz vzorce

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k h^{k+1} [F^{(k+1)}(a) + (-1)^k F^{(k+1)}(b)] + R_n,$$

kdež

$$h = b - a,$$

$$A_k = \frac{(2n-k-1)!\, n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!\,(2n)!},$$

$$R_n = \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 t^n (1-t)^n F^{(2n+1)}(a+ht)\, dt,$$

kterýžto vzorec jest nepodstatnou modifikací vzorce, jejž v tomto časopise bez důkazu otiskl K. Petr.[1])

Můj důkaz spočívá na $2n$-násobné částečné integraci uvedeného výrazu pro R_n. Petrův tvar se potom obdrží použitím první věty o střední hodnotě integrálního počtu.

Tento článek obsahuje také důkaz, v němž metody integrálního počtu jsou nahrazeny metodami počtu diferenciálního. Tento druhý důkaz má tu výhodu, že se při něm požadují od funkce $F(x)$ podmínky poněkud méně omezující než při prvním důkazu.

[11]) Gebauer, a. a. O., S. 156.
[1]) Časopis **44** (1915), 454—455.