Libuše Kučerová
Poznámka k stejnoúhlým rovinám čtyřrozměrného prostoru

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 1, D9--D13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123692

Poznámka k stejnoúhlým rovinám čtyřrozměrného prostoru.

Libuše Kučerová, Nymburk.

Dvě roviny ${}^1\varepsilon$, ${}^2\varepsilon$ v čtyřrozměrném prostoru S_4, jejichž obě extrémní odchylky jsou si rovny, nazýváme rovinami stejnoúhlými.[1]) Každou přímkou čtyřrozměrného operačního prostoru S_4, jehož úběžným prostorem je trojrozměrný eliptický prostor E_3, lze vésti pouze dvě[2]) roviny stejnoúhlé k pevné zvolené rovině o úběžnicích Q, Q'. Tedy úběžníkem b (na E_3) přímky, kterou roviny prokládáme, lze vésti pouze dvě úběžnice ${}^1Q$, ${}^2Q$ stejnoúhlých rovin k původní dané.

V následujícím ukážeme, že úběžnice zmíněných přímkou proložených stejnoúhlých rovin čtyřrozměrného prostoru S_4 jsou ve vzájemném vztahu s Cliffordovými[3]) rovnoběžkami eliptického trojrozměrného prostoru E_3 (vedenými bodem k přímce).

I. Základem E_3 jest reálný polárný prostor imaginární plochy druhého řádu. V obrázku zvolena imaginární plocha kulová, jejíž představitelkou jest reálná koule o středu s, dotýkající se půdorysny π.

Úloha: Bodem k veďme obě možné Cliffordovy rovnoběžky k volené přímce Y.

Z bodu k vedeme příčku K (elipticky kolmici) k Y a její absolutní poláře Y'. Kolmice K protíná přímky Y, Y' v bodech e, ${}^1e$ a její absolutní polára K' v bodech c, ${}^1c$. Od bodu c na K' naneseme pak „elipticky" na obě strany délku ke do cm nebo do cn. Spojením bodu k s koncovými body m resp. n obdržíme již obě Cliffordovy rovnoběžky M, N z bodu k k Y, Y'.

Avšak přenésti v eliptickém prostoru délku ek z K na K' od c[4]) znamená, nalézti na K' takový bod m, aby

$$(\xi_i {}^1\xi_i e k) = (\xi'_i {}^1\xi'_i c m). \tag{1}$$

Při tom $\left\{\begin{array}{l}\xi_i,\ {}^1\xi_i\\ \xi'_i,\ {}^1\xi'_i\end{array}\right.$ jsou absolutní elementy na $\left\{\begin{array}{l}K\\ K'.\end{array}\right.$

Rovnice (1) však předpokládá projektivnost řad

$$K\,(\xi_i,\ {}^1\xi_i,\ e,\ k,\ldots)\ \pi K'\,(\xi'_i,\ {}^1\xi'_i,\ c,\ m,\ldots),$$

[1]) Josef Klíma: „K určení úhlu dvou rovin v prostoru čtyřrozměrném a některé úlohy s tím souvisící." Časopis M. F., **62** (1933), str. 132—139.

[2]) H. de Vries: „Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume", str. 70.

[3]) Bonola-Liebmann: „Die nichteuklidische Geometrie", str. 199.

[4]) Václav Hlavatý: „Úvod do neeuklidovské geometrie", str. 97. Přenos délek v hyperbolické rovině. — Zde úlohu provádíme v eliptickém prostoru.

v nichž známe ξ_i, ${}^1\xi_i$, e, k, ξ'_i, ${}^1\xi'_i$, c. Hledáme m následujícím způsobem:

Projektivní řady na K a K' (jichž skutečné délky získáme sklopením do ${}^0K$ a ${}^0K'$) učiníme perspektivními v rovině tak, aby střed perspektivity byl v jednom γ neb druhém γ' středu, z nichž se promítá[5]) absolutní involuce, určující dvojinu absolutních elementů ξ_i, ${}^1\xi_i$ na K, do absolutní involuce, určující základní elementy ξ'_i, ${}^1\xi'_i$ na K'. Při tom $e \equiv c$ nechť je samodružným bodem obou perspektivních řad. Hledané středy γ, γ' budou tedy na spojnici přidružených bodů ${}^1e$, ${}^1c$.

Absolutní involuce na K (ξ_i, ${}^1\xi_i$), obsahuje bodové páry $e{}^1e$, $f{}^1f$, $h{}^1h$; involuce na K' (ξ'_i, ${}^1\xi'_i$) páry $c{}^1c$, $r{}^1r$, $l{}^1l$. Body jednotlivých párů si odpovídají tak, že na př. volenému f na K (v rovině rovnoběžné s nárysnou středem koule s) přísluší průsečík ${}^1f$ jeho antipolárné roviny $\varepsilon^\times$ (kolmé k ν) s K ($\varepsilon^\times{}_2 \equiv K'_2$).

Obě absolutní involuce na sklopených ${}^0K$ a ${}^0K'$, určené dříve zmíněnými bodovými páry (při čemž involuce bodová ze sklopeného ${}^0K'$ jest přenesena do K'_0 tak, že ${}^0e \equiv c_0$), promítneme paprskovými involucemi ze středu ${}^1s$ na kružnici Ω, jím jdoucí. Střed absolutní involuce na ${}^0K$ je η, na K'_0 δ. Pár dělící harmonicky $\left\{\begin{matrix} {}^0e{}^{01}e \\ c_0{}^1c_0 \end{matrix}\right.$ na $\left\{\begin{matrix} {}^0K \\ K'_0 \end{matrix}\right.$ a náležící tedy absolutní involuci o dvojných bodech $\left\{\begin{matrix} {}^0e,\ {}^{01}e \\ c_0,\ {}^1c_0 \end{matrix}\right.$ a středu $\left\{\begin{matrix} \eta' \\ \delta' \end{matrix}\right.$ jest $\left\{\begin{matrix} {}^0a{}^0a' \\ b_0b_0' \end{matrix}\right.$. Pak jsou v průsečících $\left\{\begin{matrix} \gamma \equiv \\ \gamma' \equiv \end{matrix}\right.$ $\begin{matrix} \equiv ({}^0ab'_0,\ {}^0a'b_0) \\ \equiv ({}^0a'b'_0,\ {}^0ab_0) \end{matrix}$ oba středy (na ${}^{01}e{}^1c_0$), z nichž se promítá jedna involuce ve druhou a tedy i (${}^0\xi_i$, ${}^{01}\xi_i$, ${}^0e$, ${}^0k$) do (ξ'_{i0}, ${}^1\xi'_{i0}$, c_0, $\left\{\begin{matrix} m_0 \\ n_0 \end{matrix}\right.$).

Bod m_0 perspektivně přidružený bodu ${}^0k$ získáme promítnutím ${}^0k$ ze středu γ. Přemístíme-li obě perspektivní čtveřiny (${}^0\xi_i$, ${}^{01}\xi_i$, ${}^0e$, ${}^0k$) a (ξ'_{i0}, ${}^1\xi'_{i0}$, c_0, m_0) zpět na K a K' v prostoru, dostaneme:

$$(\xi_i{}^1\xi_i ek) = (\xi'_i{}^1\xi'_i cm).$$

Tato rovnice, dřívější (1), však definuje elipticky rovnost

$$ek = cm.$$

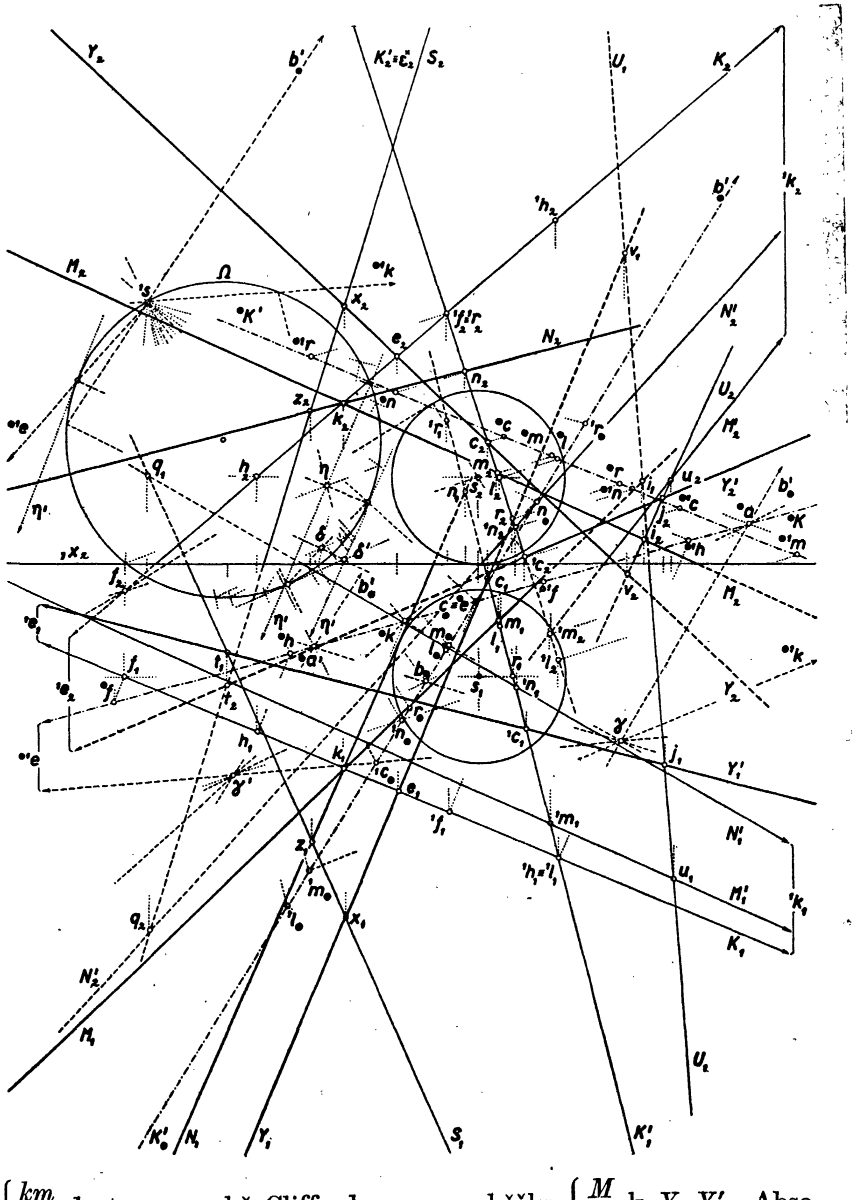
Promítneme-li ${}^0k$ z druhého středu γ' perspektivity, dostaneme na K'_0 bod n_0 té vlastnosti, že zase elipticky

$$ek = nc.$$

Úsečky $\left\{\begin{matrix} c_0m_0 \\ n_0c_0 \end{matrix}\right.$ přeneseme z překlopení do průmětů a spojením

---

[5]) Eduard Weyr: „Projektivná geometrie základních útvarů prvního řádu“, str. 135.



$\left\{\begin{matrix} km \\ kn \end{matrix}\right.$ dostaneme obě Cliffordovy rovnoběžky $\left\{\begin{matrix} M \\ N \end{matrix}\right.$ k Y, Y'. Absolutní poláry M', N', vycházejíce z ^1k absolutně přidruženého ke k na K, procházejí body ^1m a ^1n sdruženými v absolutní involuci δ

na K' vůči m, n. Body ${}^1m_0$, ${}^1n_0$ na K'_0 jsou vlastně průměty bodu ${}^{01}k$ ze středů γ a γ' na K'_0.

Pro kontrolu rovnoběžnosti (hyperboloidické polohy) rovnoběžek Y, Y' $\begin{cases} M, M' \\ N, N' \end{cases}$ jsou vedeny v obrázku: příčka $\begin{cases} U \\ S \end{cases}$ z bodu $\begin{cases} i \\ z \end{cases}$ na $\begin{cases} M \\ N, \end{cases}$ jež protíná Y, Y' $\begin{cases} M' \\ N' \end{cases}$ postupně v bodech $\begin{cases} v, j, u \\ x, t, q \end{cases}$.

II. Uvažujme nyní perspektivu čtyřrozměrného prostoru! Jsou-li v S_4 dvě roviny ε a ${}^1\varepsilon$ stejnoúhlé,[6]) mají jejich úběžnice Q, ${}^1Q$ i normálrovinové úběžnice Q', ${}^1Q'$ hyperboloidickou polohu. Pak jsou si rovny oba dvojpoměry $(aa'bb')$ a $(a^\times a^{\times\prime} b^\times b^{\times\prime})$, které tvoří průsečíky zmíněných čtyř úběžnic s oběma v obecném případě možnými jejich absolutně sdruženými transversálami Q^φ, Q^ψ.[7]) Úběžnice Q, Q' pevné roviny protínají transversály $\begin{cases} Q^\varphi \\ Q^\psi \end{cases}$ v párech $\begin{cases} aa' \\ a^\times a^{\times\prime} \end{cases}$, absolutní involuce na $\begin{cases} Q^\varphi \\ Q^\psi \end{cases}$.

Stejnoúhlé roviny povedeme v prostoru S_4 přímkou, jejíž úběžník nechť je zvolený bod b na Q^φ. Tím jdou již obě možné úběžnice ${}^1Q$, ${}^2Q$ rovin stejnoúhlých k pevné rovině o úběžnicích Q, Q'. Absolutní poláry (Normalebenenflüchtlinien) ${}^1Q'$, ${}^2Q'$ procházejí bodem b', absolutně sdruženým k b na Q^φ.

Na druhé příčce Q^ψ hledáme takový pár absolutně sdružených bodů $b^\times b^{\times\prime}$ (je možný ještě druhý pár $b^{\times\times} b^{\times\times\prime}$), aby $(aa'bb') = (a^\times a^{\times\prime} b^\times b^{\times\prime})$.

Pak spojnice

$$\begin{cases} bb^\times \equiv {}^1Q & b'b^{\times\prime} \equiv {}^1Q' \\ bb^{\times\times} \equiv {}^2Q & b'b^{\times\times\prime} \equiv {}^2Q' \end{cases}$$

jsou již úběžnicemi stejnoúhlých rovin $\begin{cases} {}^1\varepsilon \\ {}^2\varepsilon \end{cases}$ a mají hyperboloidickou polohu s Q, Q'.

α) V díle Vriesově jsou páry $b^\times b^{\times\prime}$ — $b^{\times\times} b^{\times\times\prime}$ hledány způsobem, který, jak ukážeme v odstavci β), je vlastně sestrojováním Cliffordových rovnoběžníků v eliptické geometrii (čili je eliptickým přenosem délky ab z Q^φ do $a^\times b^\times$ neb v druhou stranu $a^\times b^{\times\times}$ na Q^ψ).

Ke každému bodu p na Q^ψ je sestrojen jednak jemu přidružený p' v absolutní involuci a za druhé bod $p^\times$ přidružený tak, aby

$$(a^\times a^{\times\prime} pp^\times) = (aa'bb').$$

Body $p \ldots$ a $p^\times \ldots$ tvoří na Q^ψ dvě projektivní řady bodové s dvojnými body $a^\times$, $a^{\times\prime}$. Jsou tedy prostřednictvím bodů $p \ldots$

[6]) H. de Vries: „Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume“, str. 66.

[7]) Kadeřávek-Klíma-Kounovský: „Deskriptivní geometrie“, II. díl, str. 946.

projektivní i řady:

$$p' \dots \pi p^{\times} \dots$$

Volíme-li na Q^{φ} takový bod $p \equiv b^{\times}$, aby jemu odpovídající p' v absolutní involuci i $p^{\times}$ v řadě o dvojných bodech $a^{\times}, a^{\times\prime}$ splývaly v jediném $b^{\times\prime}$, pak tento je dvojným bodem řad $p' \dots \dots \pi p^{\times} \dots$

Dvojina $b^{\times} b^{\times\prime}$ je párem absolutní involuce na Q^{φ} a vyhovuje zároveň podmínce

$$(a^{\times} a^{\times\prime} b^{\times} b^{\times\prime}) = (aa'bb'). \tag{2}$$

Existuje ještě druhý pár $b^{\times\times} b^{\times\times\prime}$ podobných vlastností jako $b^{\times} b^{\times\prime}$.

β) Abychom ukázali, že jsme ke konstrukci projektivních čtveřin (2) mohli použíti eliptického přenosu délek, uvedeme je do perspektivní polohy tak, že učiníme $a \equiv a^{\times}$ samodružným bodem obou nyní perspektivních řad. Středy perspektivity λ, λ' jsou pak na spojnici odpovídajících bodů a', $a^{\times\prime}$. Pár bb' absolutní involuce na Q^{φ} se má promítnouti zase do páru $b^{\times} b^{\times\prime}$ absolutní involuce na Q^{φ}, vyhovujícího zároveň podmínce (2). Je proto nutno středy perspektivity λ, λ' na $a'a^{\times\prime}$ voliti v jednom neb druhém středu, z nichž se promítá absolutní involuce na Q^{φ} (dvojné body τ_i, τ'_i) do absolutní involuce na Q^{φ} ($\varkappa_i$, $\varkappa'_i$). Jsou pak perspektivní (τ_i, τ'_i, a, a', b, b') a ($\varkappa_i$, $\varkappa'_i$, $a^{\times}$, $a^{\times\prime}$, $b^{\times}$, $b^{\times\prime}$). Po rozmístění tedy

$$(\tau_i \tau'_i ab) = (\varkappa_i \varkappa'_i a^{\times} b^{\times}),$$

čímž definována elipticky rovnost délek ab a $a^{\times} b^{\times}$. Promítáme-li z druhého středu λ', dostaneme $ab = b^{\times\times} a^{\times}$.

Přenesli jsme tedy vlastně elipticky délku ab z Q^{φ} do $a^{\times} b^{\times}$ nebo $b^{\times\times} a^{\times}$ na Q^{φ} právě tak, jako jsme při sestrojování Cliffordových rovnoběžek k Y, Y' bodem k (v oddíle I.) přenášeli délku ke z K do cm neb v druhou stranu nc na K'. Dostáváme tudíž:

„Úběžný trojrozměrný prostor euklidovského čtyřrozměrného prostoru S_4 je eliptický prostor E_3. Uvažujeme-li v tomto prostoru E_3 obě Cliffordovy rovnoběžky M, N vedené bodem k k dané přímce Y, pak tyto jsou úběžnicemi dvou možných stejnoúhlých rovin čtyřrozměrného prostoru S_4, proložených přímkou (o úběžníku k) k rovině, jejíž úběžnice je přímka Y.“
