František Josef Studnička

O některých integralech omezených

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 3, 185--187

O některých integralech omezených.

Napsal

P. da Silva

a z portugalštiny volně přeložil dr. F. J. St.*)

Francouzský mathematik *Hermite* uvádí v pěkném kompendii svém „Cours d' Analyse" některé vzorce integralní, jež možná vesměs integrováním po částech odůvodniti *přímo*.

Zavede-li se kratší označení

$$\begin{aligned} u &= x \sin x + \cos x, \\ v &= -x \cos x + \sin x, \end{aligned} \qquad (1)$$

platí následující vzorce (pag. 260.):

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2} = \frac{v}{u}, \qquad \int \frac{x^2 dx}{v^2} = -\frac{u}{v}, \qquad (2)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2} = -\frac{u}{au + bv}. \qquad (3)$$

Jestiť tu, jak patrno,

$$du = x \cos x dx, \quad \text{tedy} \quad x dx = \frac{du}{\cos x},$$

$$dv = x \sin x dx, \quad \text{tedy} \quad x dx = \frac{dv}{\sin x},$$

takže pro první integraly (2) obdržíme pomocí těchto součinů napřed

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2} = \int \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{du}{u^2}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{v^2} = \int \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{dv}{v^2},$$

a integrujeme-li po částech, postupně

$$\int \frac{x}{\cos x} \frac{du}{u^2} = -\frac{x}{\cos x} \frac{1}{u} + \int \frac{1}{u} \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= -\frac{x}{u \cos x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{x}{u \cos x} + \operatorname{tg} x = \frac{-x + u \sin x}{u \cos x}$$

*) Vyňato z časopisu „Journal de sciencias mathem. e astron." Vol. IV. pag. 87. et seqq.

$$= \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} = \frac{v}{u},$$

a postupem zcela stejným tedy též

$$\int \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{dv}{v^2} = -\frac{x}{\sin x} \frac{1}{v} + \int \frac{1}{v} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= -\frac{x}{v \sin x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{x}{v \sin x} - \cot x = -\frac{x + v \cos x}{v \sin x}$$

$$= -\frac{x \sin x + \cos x}{\sin x - x \cos x} = -\frac{u}{v}.$$

Pro integral (3) zaveďme pak

$$z = au + bv,$$

takže bude především

$$dz = adu + bdv = x(a \cos x + b \sin x) dx,$$

z čehož plyne obdobně

$$x dx = \frac{dz}{a \cos x + b \sin x},$$

načež obdržíme týmže spůsobem, jako prvé,

$$\int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2} = \int \frac{x}{a \cos x + b \sin x} \cdot \frac{dz}{z^2}$$

$$= -\frac{x}{a \cos x + b \sin x} \cdot \frac{1}{z} + \int \frac{(au + bv) dz}{z (a \cos x + b \sin x)^2}$$

$$= -\frac{x}{z (a \cos x + b \sin x)} + \int \frac{dx}{(a \cos x + b \sin x)^2}.$$

Abychom pak určili poslední integral, uvažme, že

$$\int \frac{dx}{(a \cos x + b \sin x)^2} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{(a + b \operatorname{tg} x)^2} = -\frac{1}{b(a + b \operatorname{tg} x)},$$

načež povstane, užijeme-li této hodnoty,

$$\int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2} = \frac{-x}{z(a \cos x + b \sin x)} + \frac{-\cos x}{b(a \cos x + b \sin x)}$$

$$= -\frac{u}{au + bv},$$

jakož bylo vzorcem (3) udáno.

Konečně budiž zde ještě přímo ustanoveno, že

$$\int \frac{a dx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2} = \frac{\operatorname{tg} x}{a + (ax + b) \operatorname{tg} x}, \qquad (4)$$

o kterémžto integralním vzorci tamtéž *Hermite* praví „dont on ne peut vérifier la valeur que par la différentiation“.

Položíme-li podobně, jako v případě posledním,

$$z = a + (ax + b)\operatorname{tg} x,$$

takže bude pak

$$dz = u \sec^2 x dx, \qquad \text{tedy} \qquad dx = \frac{\cos^2 x}{u} dz,$$

obdržíme především

$$\int \frac{adx}{[a + (ax + b)\operatorname{tg} x]^2} = \int \frac{a\cos^2 x}{u} \cdot \frac{dz}{z^2};$$

integrujeme-li tu po částech, povstane dále

$$\int \frac{a\cos^2 x}{u} \cdot \frac{dz}{z^2}$$

$$= -\frac{a\cos^2 x}{u} \cdot \frac{1}{z} + \int \frac{-2au\cos x \sin x - 2a^2\cos^4 x}{u^2 z} dx$$

$$= -\frac{a\cos^2 x}{uz} - \int \frac{2a\cos^2 x}{u^2} dx;$$

poněvadž zároveň platí

$$2a\cos^2 x dx = du,$$

obdržíme se zřetelem k integralu poslednímu

$$\int \frac{adx}{[a + (ax + b)\operatorname{tg} x]^2} = -\frac{a\cos^2 x}{uz} - \int \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{a\cos^2 x}{uz} + \frac{1}{u} = \frac{z - a\cos^2 x}{uz}$$

a vrátíme-li se konečně k významu litery z, vzorec (4), jejž i *Hermite* uvádí.

Poznámka k eliminaci při soustavě linearní.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Má-li soustava n stejnoměrných rovnic linearních

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = 0$$

$$\sum a_{2j} x_j = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum a_{nj} x_j = 0$$