Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 3, 190--198

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123684

Úlohy.

Řešení úlohy 3. *)

Ad 1. Poněvadž $11p \equiv -p,\ 12 \equiv 0 \pmod{3}$
tedy
$$N = p^3 + 11p - 12 \equiv p^3 - p \pmod{3}$$
t. j.
$$N \equiv (p-1)p(p+1) \equiv 0 \pmod{3}$$
neboť ze tří po sobě jdoucích čísel jest vždy jedno třemi dělitelné.

Dále máme $11p \equiv 3p,\ 12 \equiv 4 \pmod{8}$
a tedy
$$N \equiv p^3 + 3p - 4 \pmod{8}$$
Každé liché p jest modulo 8 shodné buď s 1, 3, 5 nebo se 7.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Při } p \equiv 1 & \text{máme } N \equiv & 1 + 3 - 4 \equiv 0, \\ \text{„} \quad p \equiv 3 & N \equiv & 27 + 9 - 4 \equiv 0, \\ \text{„} \quad p \equiv 5 & N \equiv & 125 + 15 - 4 \equiv 0, \\ \text{„} \quad p \equiv 7 & N \equiv & 343 + 21 - 4 \equiv 0. \end{array}\right\} \pmod{8}$$

Jest tedy při každém lichém p
$$N \equiv 0 \pmod{3}, \quad N \equiv 0 \pmod{8}$$
a jelikož jsou moduly nesoudělné, máme
$$N \equiv 0 \pmod{24},$$
čímž tvrzení dokázáno.

Ad 2. Při sudém p mohou modulo 8 býti tyto případy
$$\begin{array}{lll} p \equiv 0, & \text{pak } N = & 5p^2 - 2p \equiv 0, \\ p \equiv 2, & N = & 20 - 4 \equiv 0, \\ p \equiv 4, & N = & 80 - 8 \equiv 0, \\ p \equiv 6, & N = & 180 - 12 \equiv 0, \end{array}$$
tedy vždy
$$N \equiv 0 \pmod{8},$$
jak tvrzeno. Jinak touto úvahou: Položme $p = 2n$, pak dané číslo
$$N = 5p^2 - 2p = 4n(5n - 1).$$

---

*) Srovnej Dr. *F. J. Studnička,* Základové nauky o číslech, Praha 1875, str. 100 sqq.

Při sudém n jest $4n$ dělitelno 8; při lichém n jest $5n-1$ sudé, tedy N opět dělitelno 8.

Ad 3. Dělitel jest zde, rozložen na dva nesoudělné faktory, $192 = 64 \cdot 3 = 2^6 \cdot 3$. Vůči

$$68 \equiv 4, \quad 64 \equiv 0, \quad (\text{mod. } 64)$$

máme dané číslo

$$N = p^4 - 20p^3 + 68p^2 - 64p \equiv p^4 - 20p^3 + 4p^2. \quad (\text{mod. } 64)$$

Sudé p nahraďme číslem $2n$, pak

$$(\alpha) \quad N \equiv 2^4 n^4 - 20 \cdot 2^3 n^3 + 4 \cdot 2^2 \cdot n^2 \equiv 2^4 (n^4 - 10n^3 + n^2). \quad (\text{mod. } 64)$$

Avšak

$$n^4 - 10n^3 + n^2 \equiv n^4 - 2n^3 + n^2 \quad (\text{mod. } 4)$$
$$\equiv n^2 (n-1)^2 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4).$$

Číslo N dá děleno 64 dle (α) týž zbytek jako $2^4 (n^4 - 10n^3 + n^2)$, t. j. týž zbytek jako $n^4 - 10n^3 + n^2$ děleno 4, t. j. zbytek 0; jest tedy N dělitelno 64.

Modulo 3 patrně máme

$$N \equiv p^4 - 2p^3 - p^2 - p$$

a poněvadž při sudém p musí toto býti shodné buď s 0 nebo s 2, máme v prvním případě $N \equiv 0$, v druhém $N \equiv 16 - 2 \cdot 8 - 4 - 2 \equiv 0$ (mod. 3), čímž tvrzení dokázáno.

Řešení podali pp. *Jos. Novák*, VII. tř. r. v Litomyšli, *Fr. Fabinger*, VIII. tř. gymn. v Hradci Králové, *Tom. Vondrášek*, V. tř. gym. v Písku, *Jar. Žák*, V. tř. gym. v Písku, *František Seykora*, VIII. tř. gym. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 4.

(Sdělil p. *Bohumil Lukáš*, stud. VIII. tř. obecného real. gym. v Praze.)

Z podmínky, že krychlové obsahy jsou si rovny

$$\frac{BV}{3} = \frac{B_1 v}{3}$$

máme

$$v = \frac{B}{B_1} V,$$

při čemž B jest podstavou daného jehlance, B_1 druhého. Poněvadž se základny — tolikéžstranné mnohoúhelníky — mají k sobě jako čtverce poloměrů opsaných kružnic,

$$\frac{B}{B_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{r^2}{V^2}$$

bude

$$v = \frac{r^2}{V}.$$

Poloměr r jest střední měřickou úměrnou mezi výškou V jehlance a rozdílem D — V průměru a výšky, t. j.

$$r^2 = V(D - V),$$

pročež

$$v = \frac{V(D - V)}{V} = D - V.$$

Tutéž úlohu řešili pp. *Jos. Novák*, VII. tř. r. v Litomyšli, *Fr. Fabinger*, VIII. tř. gym. v Hradci Králové, *Tom. Hájek*, VIII. tř. gym. v Budějovicích, *Fr. Jos. Kočí*, VII. tř. gym. v Jičíně, *Jindř. Schnehof*, VII. třídy gymn. v Hradci Králové, *Fr. Seykora*, VIII. tř. g. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 5.

(Podal p. *Ant. Pleskot*, stud. V. tř. real. gym. v Chrudimi.)

Ono číslo jest 142857.

Pozn. redakce. Kterak lze ukázati, že to jediné číslo, jež daným podmínkám vyhovuje?

Řešení úlohy 6.

(Podal p. *Fr. Jos. Kočí*, stud. VII. tř. gym. v Jičíně.)

Číslo *abcabc* vyjádříme si ve tvaru

$$100000\,a + 10000\,b + 1000\,c + 100\,a + 10\,b + c$$

t. j.

$$100100\,a + 10010\,b + 1001\,c$$

a to děleno 1001 dá celistvý podíl

$$100\,a + 10\,b + c.$$

Pozn. redakce. Prof. G. B. poukázal k tomu, že lze divisí přímo provésti:

$$\begin{array}{l} abcabc : 1001 = abc \\ \underline{a00a} \\ \quad bc0bc \\ \quad \underline{b00b} \\ \quad\quad c00c \\ \quad\quad \underline{c00c} \\ \quad\quad 0000 \end{array}$$

Tutéž úlohu řešili pp. *Jar. Mašek*, VI. tř. obec. real. gym. v Praze, *Vil. Kursa*, VIII. tř. gym. v Jindř. Hradci, *Jan Mikan*, VI. tř. gym. v Chrudimi, *Fr. Fabinger*, VIII. tř. gym. v Hradci Králové, *Ant. Pleskot*, V. tř. r. gym. v Chrudimi, *Jos. Novák*, VII. tř. r. v Litomyšli, *A. V. Burian*, VII. tř. gym. v Něm. Brodě, *Fr. Seykora*, VIII. tř. g. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 9.

Z rovnic $\frac{a}{c} = q + \frac{r}{c}, \quad \frac{b}{c} = q' + \frac{r'}{c}$

máme

$$a = cq + r, \qquad b = cq' + r'.$$

Z těchto dvou rovnic vychází, že každé číslo, jež dělí c, r dělí i a, a každé, jež dělí c, r', dělí též b; číslo, jež dělí současně c, r, r', jest tedy i dělitelem čísel a, b, c. — Napíšeme-li poslední dvě rovnice ve tvaru

$$r = a - cq, \quad r' = b - cq',$$

vidíme zcela obdobně, že každé číslo, jež dělí a, b, c, jest též dělitelem čísel r, r', c. Shrneme-li oba výsledky, vychází, že *největší* společný dělitel čísel a, b, c jest totožný s největším společným dělitelem čísel r, r', c, a tím dána odpověď k vytknuté otázce.

Řešení — ač ne úplné — zaslal p. *Ant. Pleskot*, V. tř. r. gym. v Chrudimi.

Řešení úlohy 10.

(Řešil p. *Jos. Novák*, VII. tř. r. v Litomyšli.)

Předpokládejme, že daný zlomek $\frac{a}{b}$ lze vyjádřiti jakožto součet konečného počtu zlomků, jichž jmenovatelé jsou mocniny čísla 12. Uvedeme-li tyto zlomky na společného jmenovatele, máme

$$\frac{a}{b} = \frac{\mathrm{N}}{12^m}.$$

Supponujeme-li, že daný zlomek $\frac{a}{b}$ jest napsán nejmenšími čísly (t. j. zkrácen, pokud možná), tu musí

$$12^m = bb',$$

kdež b' značí opět celistvé číslo. Jelikož 12 obsahuje jen kmenná čísla 2 a 3, může tu b obsahovati též jen tyto kmenné faktory. To ale také postačí, t. j. je-li b číslem tvaru $2^\lambda 3^\mu$, lze $\frac{a}{b}$ vyjádřiti naznačeným způsobem. Neboť pak uvedeme $\frac{a}{b}$ na tvar

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^\lambda 3^\mu} = \frac{\mathrm{N}}{12^m} = \frac{\alpha_1 12 + \alpha_2 12^2 + \ldots + \alpha_r 12^r}{12^m},$$

kdež čísla α jsou menší než 12; stačí uvážiti, že $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ jsou cifry, jimiž bychom psali N v číselné soustavě dvanáctičíslové. *)

Nyní máme

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha_1}{12^{m-1}} + \frac{\alpha_2}{12^{m-2}} + \ldots$$

A obecně soudíme: Aby zlomek $\frac{a}{b}$ napsaný nejmenšími čísly bylo lze napsati co součet zlomků, jichž jmenovatelé jsou mocniny jistého čísla M, jest nutno a postačí, aby každý kmenný faktor čísla b byl též kmenným faktorem čísla M. Tedy na př. aby zlomek $\frac{a}{b}$ se dal napsati co konečný desetinný zlomek, nutno a stačí, by b obsahovalo jen kmenné faktory 2 a 5, $(\mathrm{M} = 2 . 5)$.

V našem případě $b = 42 = 2 . 3 . 7$; $\mathrm{M} = 12 = 2 . 2 . 3$, obsahuje tedy b kmenné číslo 7, které se v M nevyskytuje, a proto nelze zlomek $\frac{13}{42}$ upravit co součet konečného počtu zlomků, jichž jmenovatelé jsou mocniny čísla 12.

---

*) Srovnej: *Č. Zahálka*, O soustavách číselných, tento svazek str. 27.

A skutečně, pokusíme-li se o to, vpraviti $\frac{13}{42}$ do vytknutého tvaru, shledáme, že počet nemá konce. Zlomek $\frac{13}{42}$ obsahuje $12 . \frac{13}{42}$ dvanáctin t. j.

$$\begin{array}{l} \underline{13 . 12 : 42 = 3} \\ \text{zbytek } 30 \end{array}$$

Zlomek $\frac{1}{12} . \frac{30}{42}$ obsahuje $\frac{30 . 12}{42}$ 12^2-tin, tedy

$$\begin{array}{l} \underline{30 . 12 : 42 = 8} \\ \text{zbytek } 24 \end{array}$$

a tak pokračujeme, což následující počet ukazuje:

$$\begin{array}{l} \underline{24 . 12 : 42 = 6} \\ \text{zbytek } 36; \\ \underline{36 . 12 : 42 = 10} \\ \text{zbytek } 12; \\ \underline{12 . 12 : 42 = 3} \\ \text{zbytek } 18; \\ \underline{18 . 12 : 42 = 5} \\ \text{zbytek } 6; \\ \underline{6 . 12 : 42 = 1} \\ \text{zbytek } 30. \end{array}$$

Poněvadž se tu zbytek 30 zase objevuje, opakuje se celá operace, t. j. obdržíme podíly 8, 6, 10, 3, 5, 1 stále znova a znova.

Tím máme

$$\frac{13}{42} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12^2} + \frac{6}{12^3} + \frac{10}{12^4} + \frac{3}{12^5} + \frac{5}{12^6} + \frac{1}{12^7} + \frac{8}{12^8} + \frac{6}{12^9} + \frac{10}{12^{10}} + \frac{3}{12^{11}} + \frac{5}{12^{12}} + \frac{1}{12^{13}} + \frac{8}{12^{14}} \text{ atd. do nekonečna.}$$

Úlohu tuto řešil též p. *Ant. Pleskot*, V. tř. gym. v Chrudimi.

Řešení úlohy 11.

(Zaslal p. *Jos. Novák*, VII. tř. r. v Litomyšli.)

Pomocí míry jeden metr dlouhé a rozdělené na decimetry můžeme každou délku změřiti přesně až na decimetry, t. j. stanoviti, kolik metrů a kolik decimetrů obsahuje. Buď a daná délka; změřme deset takových délek (mysleme si je na př. vedle sebe, ač při měření patrně stačí míti jen jednu délku a před rukama) naší mírou i obdržíme

$$10a = \alpha^m + \beta^{dm} + a';$$

zbytek a' jest menší než jeden decimetr. Tudíž

$$a = \alpha^{dm} + \beta^{cm} + \frac{a'}{10}$$

a neznámý zbytek $\frac{a'}{10}$ jest menší než jeden centimetr. Obsahuje tedy daná délka α decimetrů a β centimetrů, t. j. je změřena přesně až na centimetr.

Úloha 12.

Jaké kořeny má rovnice

$$(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1) + 9x^4 = 0.$$ *Std.*

Úloha 13.

Má se řešiti rovnice

$$\frac{(x^2 + ax + 1)^2}{(x^2 + bx + 1)(x^2 + cx + 1)} = \frac{(a - b)(a - c)}{bc}.$$ *Std.*

Úloha 14.

Má se řešiti rovnice

$$(x - a)(x - 3a)(x - 8a)(x + 4a) = b^4 - 35a^2b^2.$$ *Std.*

Úloha 15.

Výraz

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 3 + \varepsilon_3 3^2 + \ldots + \varepsilon_{n+1} 3^n,$$

kde ε_λ je buď -1, 0 neb $+1$ značí číslo celistvé. Lze tu každé číslo tímto tvarem vyjádřiti a kolikrát? *Dr. K.*

Úloha 16.

Žádá se důkaz, že vzorcem

$$\mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}$$

lze obdržeti dosazením celistvých kladných čísel za μ, *v každé* kladné celistvé číslo a jen *jedním* spůsobem. *Dr. K.*

Úloha 17.

Jsou-li a, b celistvá kladná čísla a značí-li symbol

$$\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - r^2}\right),$$

kde r je celistvé kladné číslo menší než a, ono největší celistvé kladné číslo, které se rovná anebo je menší než $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - r^2}$, tedy platí

$$\sum_{r=1}^{r=a-1}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - r^2}\right) = \sum_{s=1}^{s=b-1}\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - s^2}\right).$$

Tak na př. je při $a = 2$, $b = 3$,

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{2^2-1}\right) = 2, \quad \left(\frac{2}{3}\sqrt{3^2-1}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\sqrt{3^2-2^2}\right) = 1,$$

$$2 = 1 + 1.$$

Žádaný důkaz lze snadno nalézti, přihlíží-li se k ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dr. K.

Úloha 18.

Kterak nutno voliti α, β, aby výraz

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

při $c = \alpha a + \beta b$ byl čtvercem funkce racionálné v a, b?

Dr. K.

Úloha 19.

Kterak ustanovíme průměr dané hmotné koule pomocí kružítka? *Dr. K.*

Úloha 20.

Jak velké jsou krychlové obsahy K a k dvou válců o výškách $V = 48$ cm. a $v = 30$ cm., rovná-li se vzájemně plášť jednoho podstavě druhého? *Prof. V. Jelínek.*

Úloha 21.

Pláště kuželové roury (rovinami kolmými k ose kuželů seříznuté) o stejně tlustých $t = 1{,}36$ cm. stěnách jsou $P = 2{,}4173$ □ dm. a $p = 1{,}5827$ □ dm.; jak velký jest její hmotný obsah K? *Týž.*

Věstník literární.

S velkým potěšením oznamujeme, že počíná vycházeti objemné dílo vědecké:

Fysika pokusná i výkonná.

Sepsali *K. V. Zenger*, v. ř. professor obecné a technické fysiky na c. k. vysoké škole technické v Praze, a *Fr. Frídrich Čechač*, assistent obecné a technické fysiky tamtéž. V Praze, tiskem a nákladem knihtiskárny Fr. Šimáčka (1882).

Díl I.: Mechanika. Sešit 1. (4 archy velké osmerky s 32 původními dřevoryty, krámská cena sešitu 60 kr.)

Probírajíce se vydaným právě sešitem poznáváme, že se nám tu chystá velkolepé dílo ceny nevšední, které bude důstojným zakončením české fysikální literatury v témž století, které pohlíželo na první skromné počátky literatury té. Z prospektu vyjímáme, že pp. spisovatelé rozvrhli vědecký svůj podnik v 6 samostatných dílů, z nichž každý bude tvořiti celek o sobě, totiž:

1. Mechanika.
2. Akustika.
3. Optika.
4. Nauka o teple.
5. Magnetismus a elektřina.
6. Astronomie a meteorologie.

Ponechávajíce sobě tudíž promluviti obšírně o spise tom, jakmile první díl bude vydán, konáme milou nám povinnost, odporučujíce co nejvřeleji všem odborníkům a vůbec přátelům literatury naší dílo, které věcným obsahem svým i dokonalou úpravou typografickou stane se bohdá krásným pomníkem vědeckého pokroku našeho. *A. S.*

Nákladem knihkupectví Urbánkova v Praze vyšel (co sv. XCV. „Bibliotéky paedagogické“) spis *Jos. Kliky:* O vyučování