Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr
O determinantu z Bernoulliských funkcí

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 33 (1904), No. 1, 9--12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123662

**Terms of use:**

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1904

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

pro $e$ ale $|CB + AB|$ protneme kružnicí k ní orthogonálnou, mající střed v $G$ resp. $G_*$ a bodem $A$ jdoucí v bodech 1, 2. Hledané tečny jsou kolmice z $G$, resp. $G_*$ ku $A1$, $A2$ spuštěné.

Protíná-li jedna z hledaných koulí K, jejíž střed značíme $K$, rovinu $ACD$ v kružnici $m$ středu $M$, rovinu $ABC$ v kružnici $n$ středu $N$, jest rovina $MKN$ kolma ku $AC$; po sklopení roviny $ABC$ přijde bod $N$ do polohy $(N)$ a jest i potom $M(N) \perp AC$.

Protínají-li tudíž kolmice ku $AC$ z bodů $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ vedené přímku $u$ v bodech $(N)$, $(N_1)$, $(N_2)$, $(N_3)$ a z bodů $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ přímku $v$ v bodech $(\mathfrak{N})$, $(\mathfrak{N}_1)$, $(\mathfrak{N}_2)$, $(\mathfrak{N}_3)$, tu obdržíme kružnice $(n)$, $(n_1)$, $(n_2)$, $(n_3)$ a kružnice $(\mathfrak{n})$, $(\mathfrak{n}_1)$, $(\mathfrak{n}_2)$, $(\mathfrak{n}_3)$, které příslušně v bodech těch mají své středy a dotýkají se přímek $A(B)$, $C(B)$. Kružnice tyto protínají se s příslušnými kružnicemi v rovině $ACD$ na hledaných koulích ležícími na přímce $AC$ reálně nebo združeně imaginárně.

Otočíme-li nyní rovinu $ABC$ z polohy $A(B)C$ do polohy původní, pak stanoví dvojiny kružnic $mn$, $m_1n_1$, $m_2n_2$, $m_3n_3$, $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}_1\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}_2\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{m}_3\mathfrak{n}_3$ všech osm ploch kulových úloze odpovídajících.

---

# O determinantu z Bernoulliských funkcí.

Napsal

Dr. **Karel Petr,**

m. professor české university v Praze.

Chtěje odvoditi některé vzorce Čebyševovy o interpolaci pomocí methody nejmenších čtverců,*) přišel jsem k determinantu

$$F(x) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x), & \varphi_1(x), & \ldots, & \varphi_{m-1}(x) \\ \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{m-1}(x) & \varphi_m(x), & \ldots, & \varphi_{2m-1}(x) \end{vmatrix},$$

*) Viz článek v programmu druhého českého gymn. v Brně z roku 1902/3.

kde $\varphi_k(x)$ jsou t. zv. Bernoulliské funkce, racionálné celistvé funkce proměnné $x$ a které jsou definovány pro celistvé hodnoty $x$ vztahy

$$
\text{(1)}\quad
\left.\begin{aligned}
\varphi_k(x) &= 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + x^k,\\
\varphi_k(-x) &= (-1)^k + (-2)^k \ldots + (-x+1)^k,
\end{aligned}\right\} x > 0,\ k > 0
$$
$$
\varphi_0(x) = x;
$$

pro které tedy platí

$$
\text{(2)}\qquad \varphi_k(x) - \varphi_k(x-1) = x^k, \quad \varphi_k(0) = 0.
$$

Vyčíslil jsem v citovaném pojednání tento determinant, který spadá do tvaru determinantního nazvaného Hankelovým, užívaje známé vlastnosti těchto determinantů a pomocí několika umělých obratů; shledal jsem však, že jednodušeji lze vypočísti hodnotu jeho pomocí methody v jiných oborech mathematiky zhusta, při výpočtech determinantů však jenom ve specielním případě používané. Chci v následujícím onu methodu na příkladě zvoleném, který sám o sobě jest dosti zajímavým, vyložiti.

Budiž $M$ číslo celé kladné nebo záporné, menší svojí absolutní hodnotou než $m$; pak jest především, jelikož $\varphi_k(x)$ jsou, jak jsem vytkl, racionálné celistvé funkce

$$
\text{(3)}\qquad \varphi_k(M+\varepsilon) = \varphi_k(M) + \varepsilon A_k,
$$

kdež, jestliže $\lim \varepsilon = 0$, $A_k$ zůstává konečným číslem (po případě stává se i nullou pro $M = -1$ a $k$ liché). Dosadíme-li (3) do našeho determinantu, dostaneme ihned

$$
F(M+\varepsilon) = \varepsilon^{m-|M|} B,
$$

kde $\lim B$ pro $\lim \varepsilon = 0$ jest rovněž konečná. Vztah tento plyne totiž z té okolnosti, že determinanty stupně $N > |M|$

$$
\begin{vmatrix}
\varphi_\alpha(M), & \varphi_\beta(M), & \ldots, & \varphi_\lambda(M)\\
\varphi_{\alpha+1}(M), & \varphi_{\beta+1}(M), & \ldots, & \varphi_{\lambda+1}(M)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\varphi_{\alpha+N-1}(M), & \varphi_{\beta+N-1}(M), & \ldots, & \varphi_{\lambda+N-1}(M)
\end{vmatrix}
$$

jsou rovny nulle, jelikož lze je pomocí (1) rozložiti na determinanty, mající aspoň dva sloupce úměrné.

Obsahuje tudíž determinant náš, který jest celistvou racionálnou funkcí, činitel $(x-M)^{m-|M|}$ a jest $F(x)$ dělitelno výrazem

(4) $\quad x^m(x^2-1^2)^{m-1}(x^2-2^2)^{m-2}\dots(x^2-\overline{m-1}^2)^1$.

Činitel prvý $x^m$ plyne přímo z toho, že $\varphi_k(0)=0$ a jest tudíž $\varphi_k(x)$ dělitelno $x$ a determinant $x^m$.

$F(x)$ jest, jak ihned z determinantního tvaru patrno, stupně nejvýše $m^2$ (neboť prvek $a_{ik}$ jest stupně $i+k-1$ a tudíž v determinantu rozvedeném v mnohočlen jest každý člen stupně $\frac{1}{2}m(m+1)+\frac{1}{2}m(m+1)-m=m^2$). Dělitel (4) pak, který $F(x)$ jakožto celistvá racionálná funkce dle předešlého má, jest, jak snadno seznáme, téhož stupně a lze tedy psáti

$$F(x)=Ax^m.(x^2-1^2)^{m-1}.(x^2-2^2)^{m-2}\dots(x^2-\overline{m^2-1}),$$

kde $A$ jest nezávislé na $x$. Lze tedy $A$ ustanoviti, zvolíme-li si za $x$ specielní hodnotu, pro kterou $F(x)$ jest známo. Učiníme-li na př. $x=m$, redukuje se náš determinant na diskriminant rovnice o kořenech $1, 2, \dots, m$, který jest rovný číslu $[1!\,2!\dots(m-1)!]^2$. A tak zjednáme si pro $A$ tento výsledek

$$A=\frac{[1!\,2!\,\dots\,(m-1)!]^4}{1!\,2!\dots(2m-1)!}.$$

Zcela podobným způsobem vypočísti můžeme tyto determinanty tvaru Hankelova (vypíši z nich pouze první řádky):

$$G(x)=|\,\varphi_0(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_{2m}(x)\,|,$$
$$G_1(x)=|\,\varphi_2(x),\ \varphi_4(x),\ \dots,\ \varphi_{2m}(x)\,|.$$

Tu jest ještě nutno použiti známé vlastnosti Bernoulliských funkcí sudých indexů, že totiž $\varphi_{2k}(-\frac{1}{2})=0$, ze které vzhledem ku (2) pro kladné celistvé $x$ plyne

$$\varphi_{2k}(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{2k}}[1^{2k}+3^{2k}+\dots+(2x-1)^{2k}].$$

Dostaneme tak na př. pro druhý determinant

$$G_1(x) = B_1 (2x+1)^m [(2x+1)^2 - 1^2]^m [(2x+1)^2 - 2^2]^{m-1} \\ . [(2x+1) - 3^2]^{m-1} \dots \\ . [(2x+1)^2 - (2m-2)^2]^1 [(2x+1)^2 - (2m-1)^2]^1,$$

$$B_1 = 2^m m! \frac{[1!\ 3!\ 5! \dots (2m-1)!]^4}{2!\ 4!\ 6! \dots\ 4m!}.$$

Srovnáme-li ve výsledku pro $G_1(x)$ právě napsaném koefficient $x^m$ po obou stranách, dostaneme tento zajímavý vztah pro čísla Bernoulliská:

$$\begin{vmatrix} B_1, & B_2, & B_3, & \dots, & B_m \\ B_2, & B_3, & B_4, & \dots, & B_{m+1} \\ B_3, & B_4, & B_5, & \dots, & B_{m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_m, & B_{m+1}, & B_{m+2}, & \dots, & B_{2m-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{2k}(k!)^3(2k)!} \cdot \frac{[2!\ 4!\ 6! \dots (2k!)]^6}{2!\ 4!\ \dots\ (4k)!}.$$

---

# Znázornění čísel délkami a naopak.

Napsal

Dr. Jan Vilém Pexider v Praze.

Předměty a jich vzájemné vztahy, jimiž se mathematika zabývá, definovány jsou jednoduchými zásadami, jež tím způsobem, axiomatickým, předměty ty pro mathematika v život uvádějí. Zásady takové možno jest vytknouti si zcela libovolně. Mathematik však zvolí je tak, aby sobě neodporovaly; neboť jinak nebylo by lze vyvoditi z nich důsledků logicky platných, a systém předmětů tak definovaných pro mathematika by neexistoval. Z toho důvodu jest prvou podmínkou soustavy axiomů, s nimiž mathematika vůbec může počítati, aby sobě vzájemně neodporovaly. (Věc, chce-li se, samozřejmá.)

Věda vzniknouti může tam, kde dostatečný počet dat, faktů, tedy mnoho materiálu jest známo; ona počíná však teprve uspořádáním materiálu, a pořádání to děje se přirozeně methodou axiomatickou, jež právě pro jednoduchost axiomů sama jest jednoduchou. Počátek jest ten, že se vytkne logická soustava pojmů a sice tím způsobem, aby vztahům mezi vytče-