Augustin Pánek

Poznámka k předchozímu článku p. Václava Havlíčka "Příspěvek k rotačním plochám 2ho stupně"

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 1, 108--113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123657

Poznámka k předchozímu článku p. Václava Havlíčka „Příspěvek k rotačním plochám 2ho stupně."

Napsal

Augustin Pánek.

V zmíněném pojednání pan autor snaží se způsobem zcela elementárním dokázati známou vlastnost, že ohniska rotačního ellipsoidu prodlouženého, rotačního hyperb. dvojplochého a rotačního paraboloidu v orthogonálném promítání axonometrickém promítají se jako ohniska kontury.*)

Hlavní věta, které pan autor ku svému důkazu užívá: „ohnisko průmětu kuželosečky ležící na rotačním kuželi ve směru osy na rovinu kruhového řezu jest na ose", nebo „první průmět vrcholu kužele, jehož osa jest kolmá k rovině půdorysné, jest ohniskem půdorysného průmětu každé kuželosečky na kuželi narýsované" jest všeobecně známá. Viz na př. Fiedler, Darst. Geometrie 1. vyd. 1871. pag. 231. [Tamtéž jest také uvedeno, jakým jednoduchým způsobem obdržíme direktrix tohoto ohniska. (Ve 3. vydání sv. II. na str. 59.)]. Dále: Niemtschik, Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- u. Cylinderflächen etc. (Sitzb. d. k. Akad. 1871). Zcela elementárně jest ta věta dokázána v pojednání: Note zur Abhandlung „Über die Focalcurven des Quetelet" (Sitzb. d. k. Akad. 1888) od prof. Pelze, v němž jest též vyřčeno, že délka hlavní poloosy zmíněného průmětu rovná se poloměru kružnice na ku-

---

*) Obecné sestrojení ohnisek pro průměty ploch 2. stupně podal prof. Pelz ve své krásné práci: „Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen 2. Grades" (Sitzb. d. k. Akademie 1877). Sestrojení to jest elegantní a vede ve všech případech jednoduše a rychle k cíli; ono podává též speciální věty v pojednání p. Havlíčkově uvedené. Direktní odvození těchto speciálních vět cestou elementární nepostrádá však zajímavosti již k vůli tomu, aby se seznalo, jak elementárními jsou věty samy a dále proto, že vět těch lze s výhodou použíti k odvozování obecnějších vlastností, jak to učinil prof. Pelz sám v pojednání: „Ergänzungen zur allgemeinen Bestimmung der Brennpunkte...", odvodiv z nich krásným způsobem Chaslesovu větu, jež praví, že orthogonálný průmět fokálních kuželoseček dané plochy 2. stupně jsou kuželosečky konfokální s průmětem plochy.

želi rotačním, jejíž rovina prochází středem kuželosečky promítnuté, a v pojednání: Jos. Blaschke, Ein Beitrag zur elem. Behandlung der Kegelschnitte (Jahresbericht der Landes- Oberrealschule, Graz, 1897).

Vzhledem k elementárnosti uvedených vět budiž zde poukázáno k tomu, že za společné východisko můžeme bráti známou větu Quetelet-Dandelinovou, z níž lze téměř celou theorii kuželoseček vyvoditi. Ona nás vede nejprvé k pojmu kuželoseček fokálních té vlastnosti, že každá z dvou fokálních kuželoseček se promítá z libovolného bodu druhé kuželem rotačním Rozšíříme-li vlastnosti ohniskové také vzhledem k ohniskům neležícím v téže rovině s kuželosečkou, jak to slavný Steiner provedl (Steiner-Geiser: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Behandlung, 3. vyd. str. 178.), pak dojdeme ihned k větě, že libovolná kuželosečka k na ploše rotační, vzniklé otočením kuželosečky dané kolem osy hlavní, se promítá z obou ohnisek F, F_1 plochy kužely rotačními. Osy těchto kuželů spojují ohniska ta s pólem K roviny, v níž k leží vzhledem k ploše vytčené.

Opíšeme-li zmíněné ploše rotační plochu válcovou kolmou k průmětně, dotýkající se jí podél kuželosečky k, jest bod K nekonečně vzdáleným bodem přímek promítajících a osy FK, F_1K kuželů rotačních, majících vrcholy své v bodech F, F_1 a proložených kuželosečkou k, jsou kolmé k průmětně, následkem čehož má průmět křivky k, to jest průmět plochy, za ohniska průměty ohnisek F, F_1.

Úvahy tyto platí i tenkráte, když jeden z bodů F, F_1 jest v nekonečnu.

Pro rotační plochy 2. stupně, které vzniknou otočením kuželosečky kolem *osy* její *vedlejší*, platí věta též prof. Pelzem v pojednání: „Ergänzungen zur allgemeinen Bestimmung der Brennpunkte . . .“ odvozená, která praví, že *orthogonálný průmět čili obrys plochy jest s průmětem kružnice obsahující ohniska všech křivek meridiánových konfokální.*

V následujícím kružnici tu označíme f a její poloměr r.

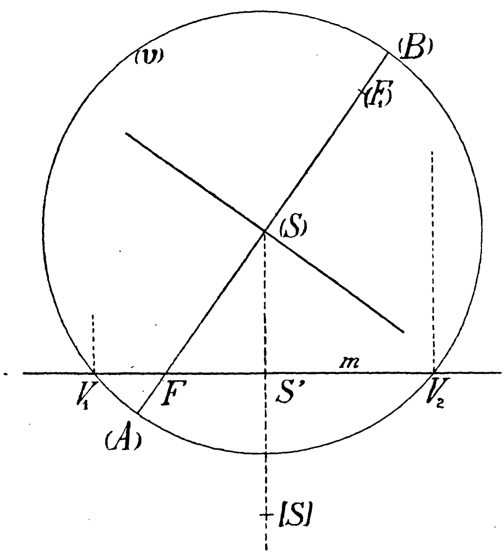
Větu tuto vysloviti lze též, jak to prof. Pelz učinil, takto:

„Naneseme-li na osu rotační délku rovnající se výstřednosti křivky meridiánové, pak jest pro ellipsoid sploštělý a pro hyperboloid jednodílný výstřednost obrysu plochy pro průmět její orthogonálný rovna průmětu vytčené délky."

K větě této lze na základě příslušné konstrukce dospěti rovněž způsobem zcela elementárním.

Můžeme nejprvé vysloviti vzhledem k oběma plochám vytčeným větu:

Klademe-li průmětnu orthogonálného promítání jedním ohniskem meridiánu k ní kolmého a sklopíme-li meridián ten do průmětny na obě strany, pak sklopení středu plochy jsou ohnisky pro obrys její.



Obr. 1.

Z věty té pak vyplývají hořejší věty bezprostředně.

Označme meridián kolmý k průmětně M, jeho stopu m, křivku meridiánovou v něm obsaženou u, její střed S, její kružnici vrcholovou nad hlavní osou opsanou v, její ohniska F, F_1 a mysleme si průmětnu položenou bodem F; dále označme (S), $[S]$ možná sklopení středu S a konečně k' obrys plochy a, b, e posloupně hlavní poloosu, vedlejší poloosu, výstřednost obrysu k'.

1. Budiž daná plocha ellipsoidem sploštělým (obr. 1.).

Přímka m jest patrně jednou osou kuželosečky k'. Vrcholy její V_1, V_2 na m ležící jsou body stopní tečen ku meridiánu u kolmo na m vedených; poněvadž paty kolmic z ohniska F k tečnám těm leží na kružnici vrcholové v, proto jsou vrcholy V_1, V_2 body průsečnými kružnice (v) s přímkou m. Průmět S' bodu S jest středem obrysu k', jehož druhá osa rovná se ose hlavní AB ellipsy u. *V trojúhelníku pravoúhlém* $(S)S'V_1$ *je tudíž* $(S)V_1 = a$, $S'V_1 = b$; proto jest $S'(S) = S'[S] = e$, čímž věta naše je stvrzena. Křivka k' jest ellipsou.

Průmět f' kružnice f jest ellipsa, jejíž poloosa hlavní rovná se r, a $S'F$ jest jedna její poloosa vedlejší. Z pravoúhlého trojúhelníka $FS'(S)$ plyne opět, že $S'(S)$ jest výstřednost a tedy (S) jedno ohnisko ellipsy f'.

Jsou tedy k', f' skutečně kuželosečkami konfokálními.

2. Při ellipsoidu sploštělém přímka m protíná vždy kružnici (v) reálné; při hyperboloidu jednodílném tomu ale není vždy tak, pročež zde rozeznáváme tři případy: *a*) m protíná (v) reálně, *b*) m se dotýká kružnice (v) a *c*) přímka m kružnici (v) neprotíná.

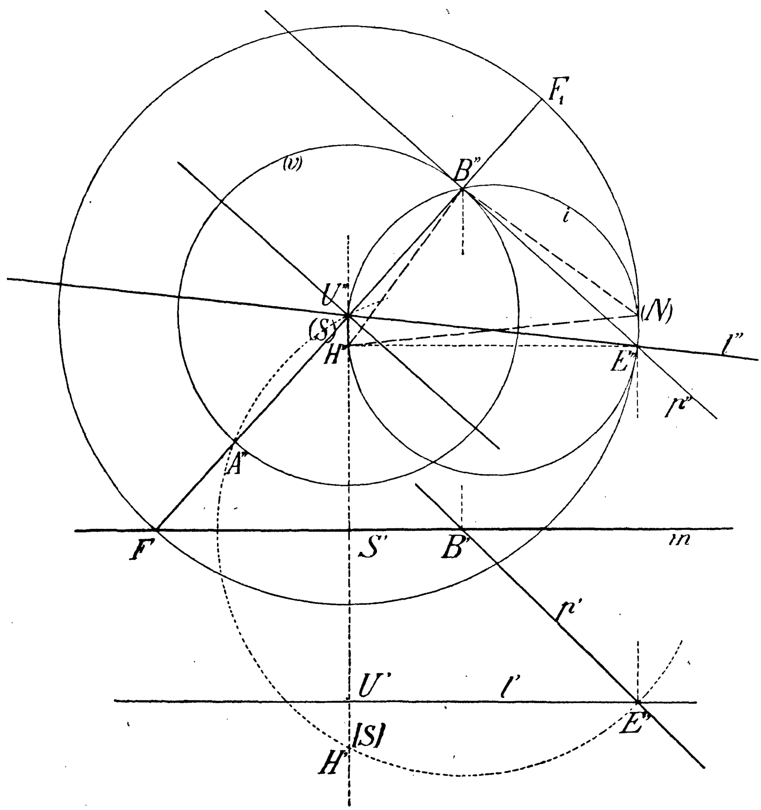
V případě prvém *a*) obdržíme tutéž konstrukci a tentýž důkaz jako při ellipsoidu a to bez jakékoliv změny; obrys k' jest ellipsou.

V případě *b*) jsou dvě přímky rovnoběžné na hyperboloidu ležící promítajícími a (S), $[S]$ jsou jejich průměty a kuželosečka k' degeneruje ve dvojinu bodovou $(S)\,[S]$.

Zbývá ještě případ *c*), jejž nutno zvlášť vyšetřiti. (Obr. 2.) Za tím účelem zvolme M za průmětnu druhou k prvé dle m sdruženou. Jsou-li opět A, B vrcholy hyperboly u a naneseme-li na přímku $(S)[S]$ délku $S'U' = A''(S)$, pak jest U' vrcholem křivky k', která je zde patrně hyperbolou. Tečna vrcholová l' v bodě U' je stejnosměrna s m. Ona jest prvým průmětem dvou přímek na hyperboloidu ležících, jejichž druhým průmětem jsou asymptoty křivky $u'' \equiv (u)$.

Z přímek těch vytkneme si jednu l. Tečnu vrcholovou hyperboly u'' v bodě B'' lze považovati za druhý průmět dvou přímek na hyperboloidu ležících. Zvolme si z nich onu p, která nenáleží k téže soustavě s přímkou l a která tedy přímku l protíná v bodě E. Tu jest $E'' = p'' \,.\, l''$ a E' leží na l'; jelikož

B' leží na m, je tím již prvý průmět $p' \equiv B'E'$ přímky p stanoven. Průmět p' jest patrně jednou tečnou křivky k'. Víme ale, jak sestrojiti ohniska kuželosečky, dány-li jsou její vrcholy hlavní a jedna tečna; opíšeme totiž nad délkou, již na tečně této hlavní tečny vrcholové utínají, jakožto průměrem kružnici, která prochází již ohnisky žádanými.



Obr. 2.

Následkem toho kružnice kolem B' opsaná a bodem E' procházející protíná přímku (S) $[S]$ v ohniskách kuželosečky k'. Budiž H' jedno z ohnisek těch. Bod H' můžeme považovati za prvý průmět bodu H, do něhož přijde bod E otočením úsečky BE kolem přímky, která promítá bod B do průmětny prvé.

Jest tudíž H'' patou kolmice z E'' na (S) $[S]$ spuštěné a $B''H''$ jest druhým průmětem úsečky rovnající se BE. Z pravoúhlého trojúhelníka $(S)B''E''$ plyne ale, že jest $(S)E''$ pravá délka úsečky BE a tedy i BH.

Opíšeme-li tedy nad $(S)E''$ jako průměrem kružnici i a vedeme v ní průměr $H''(N)$, obdržíme trojúhelník pravoúhlý $H''B''(N)$, v němž jest přepona pravou délkou a odvěsna $B''H''$ průmětem úsečky BH; proto jest přepona druhá $B''(N)$ rovna rozdílu souřadnic kolmých ku M pro body B a H; tedy

$$B''(N) = S'H'.$$

Dále jsou trojúhelníky pravoúhlé $H''B''(N)$, $FS'(S)$ shodnými. Neboť pro (u) jest E'' průsekem tečny vrcholové s jednou asymptotou, pročež jest délka $(S)E''$ rovna vystřednosti hyperboly (u) a tedy $H''(N) = F(S)$. Mimo to jest

$$\sphericalangle B''(N)H'' = \sphericalangle S'(S)F;$$

neboť oba úhly rovnají se úhlu $\sphericalangle B''E''H''$.

Ze shodnosti trojúhelníků $H''B''(N)$, $FS'(S)$ plyne, že $B''(N) = S'(S)$ a tedy konečně i $S'H' = S'(S)$. Splyne proto ohnisko H' s jedním z bodů (S), $[S]$.

Tím jsme seznali i v případě, když k' jest hyperbolou, že body (S), $[S]$ jsou ohnisky obrysu. Jelikož body ty jsou též ohnisky ellipsy f', jest věta Pelzova*) i pro tento případ dokázána.

Obr. 1. dokazuje, že tetiva V_1V_2, kterou určuje m na kružnici (v), rovná se vedlejší ose kontury. V obr. 2. jsou tyto body sice imaginárné, ale absolutní délka té tetivy se nechá i zde určiti. Rovná se totiž dvojnásobné délce tangenty $S'T$ vedené z bodu S' na kruh (v), a z trojúhelníka $S'T(S)$ plyne ihned jako dříve, že $(S)S'$ = excent. kontury.

---

*) Vzhledem k několikráte tu citovaným pracím prof. Pelze pokládáme za vhodné upozorniti, že seznam veškerých prací tohoto proslulého geometra podán jest při jeho životopise v Ottově Slovníku Naučném díl XIX.
