George Neville Watson
Über Poissonsche Summationsformeln

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 169--171

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123636`

les coefficients D_s et F par les valeurs D'_s et F', où l'on a posé:

$$2D'_s \equiv 2D_s - \psi(L_s), \quad F' \equiv F - \psi(M), \quad \psi(\ldots) \equiv \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{\partial(\ldots)}{\partial x_i}.$$

Cela étant, l'équation (1) sera remplacée par deux équations:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i p_i + Mz = z_1, \quad \sum_{s=1}^{n} K_s p'_s + N z_1 + G = \mu z, \tag{7}$$

z_1 désignant la fonction auxiliaire introduite et p'_s la dérivée de cette dernière du premier ordre prise par rapport à x_s.

Si le coefficient μ est identiquement nul, l'intégration de l'équation (1) s'achève immédiatement, grâce aux équations correspondantes (7).

Les conditions établies d'intégrabilité, généralisant ceux d'Euler, démontrent que la forme quadratique associée à l'équation (1) se décompose en deux facteurs linéaires.

Or, si $\mu \gtrless 0$, l'ensemble des équations (7) donne, par l'élimination de z une nouvelle équation linéaire par rapport à z_1 qui ne diffère de la forme de l'équation (1) que par les coefficients D_s, F et G.

Si le coefficient μ_1, relatif à l'équation transformée était nul, l'intégration de cette dernière serait immédiatement effectuée. On obtiendrait alors la valeur cherchée de z rien que par différentiation, grâce à la seconde formule (7).

La valeur de μ_1, étant distincte de zéro, on pourrait recommencer la transformation jusqu'à ce que l'on réussissait d'obtenir une équation d'un ordre quelconque de transformation qui serait intégrable.

Pour étudier les conditions d'intégrabilité, il serait le plus avantageux, d'établir le nombre de transformations à faire dans le cas, où l'intégration était possible, en généralisant le théorème que je viens de composer pour le cas de deux variables indépendantes (Editions de l'Académie Royale Serbe).

Les considérations exposées sont faites sous l'hypothèse (5). Or, si l'équation (1) était parabolique, elle pourrait être intégrée par réduction à un système de Charpit (v. N. Saltykow. Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, t. II, 1933, p. 66).

Über Poissonsche Summationsformeln.

G. N. Watson, Birmingham.

In dieser Arbeit stelle ich eine leichte Verallgemeinerung der wohlbekannten Poissonschen Summationsformel auf. Die Funktion $\mathfrak{f}(x)$ sei für alle x definiert. Wir bilden die Fouriersche Transformierte

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{2\pi i x y}\, dy.$$

Dann lautet die Poissonsche Summationsformel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n).$$

Um die Formel allgemeiner zu machen, setze ich bei reellen λ und μ

$$f(x) = F(x + \lambda)\, e^{2\pi i \mu x},$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, e^{2\pi i x y}\, dy.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(y + \lambda)\, e^{2\pi i (x+\mu) y}\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, e^{2\pi i (x+\mu)(y-\lambda)}\, dy \\ &= G(x + \mu)\, e^{-2\pi i \lambda (x+\mu)}. \end{aligned}$$

Wenn man auf die Poissonsche Formel zurückgeht, ergibt sich

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n + \mu)\, e^{-\pi i \lambda (2n+\mu)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n + \lambda)\, e^{+\pi i \mu (2n+\lambda)}.$$

Für die Gültigkeit dieser Formel ist hinreichend, daß die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n + x + \lambda)\, e^{\pi i \mu (2n+2x+\lambda)}$$

gleichmäßig in $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ konvergiert, und daß ihre Summe daselbst von beschränkter Variation ist. Vgl. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, 1932, S. 35.

Nunmehr sei die Funktion $F(x)$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ definiert. Wenn man aber die Funktion $F(x)$ auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ zu einer geraden Funktion ergänzt, so ist

$$G(x) = 2 \int_{0}^{\infty} F(y) \cos 2\pi x y\, dy.$$

Daraus folgt mein allgemeines Ergebnis

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(|\, n + \mu \,|)\, e^{-\pi i \lambda (2n+\mu)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(|\, n + \lambda \,|)\, e^{+\pi i \mu (2n+\lambda)}.$$

Aus diesem Ergebnis erhält man durch Aufspalten in Reelles und Imaginäres:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(|\, n+\mu \,|) \cos (2n+\mu)\, \pi\lambda =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(|\, n+\lambda \,|) \cos (2n+\lambda)\, \pi\mu,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(|\, n+\mu \,|) \sin (2n+\mu)\, \pi\lambda = -$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(|\, n+\lambda \,|) \sin (2n+\lambda)\, \pi\mu.$$

Das erste Ergebnis kommt zuerst bei Ch. H. Müntz; ich glaube, daß das zweite (halb-symmetrische) Ergebnis bis jetzt unbekannt gewesen ist.

Wichtige Spezialfälle meiner Formel sind seit langer Zeit bekannt. Ein sehr bekanntes Beispiel ist die klassische Jacobische Transformation der Thetafunktion für $F(x) = e^{-\pi a x^2}$. Ebenso für $F(x) = |\, x \,|^{s-1}$ hat man die Funktionalgleichungen der allgemeinen Zetafunktionen. Diese Gleichungen stammen von Lipschitz und Epstein. Beispiele mit Zylinderfunktionen kommen bei G. Doetsch vor.

Außerdem hat mir mein Freund Herr Doktor Kober in Breslau seine schöne Formel mit

$$F(x) = |\, x \,|^{\nu} K_{\nu}(2\pi a \,|\, x \,|), \quad G(x) = \frac{a^{\nu}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{2\pi^{\nu+\frac{1}{2}}\,(x^2+a^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$$

bekannt gemacht. Ich danke Herrn Kober für seine bis jetzt unveröffentlichte Formel. Dadurch habe ich Untersuchungen dieser Entwicklungen angefangen.

Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre essentiellement non linéaires.

T. Ważewski, Kraków.

Soit $p = f(x, y, z, q)$ l'équation dont le deuxième membre est de classe C^2.*) L'équation est hypothèse essentiellement non linéaire c. à. d. on a : $\partial^2 f / \partial q^2 \neq 0$. Soit sur le plan $x = 0$ une courbe $z = \omega(y)$ possédant la dérivée première continue dans un intervalle Δ et supposons qu'il passe par cette courbe une surface intégrale $z = \varphi(x, y)$ de classe C^1 engendrée par des caractéristiques et définie dans un domaine D.

Ceci étant, les fonctions ω et φ jouiront d'une régularité plus

*) Une fonction est dite être de classe C^i dans un ensemble lorsqu'elle possède, dans cet ensemble, des dérivées partielles continues d'ordre i.