Tadeusz Ważewski

Sur les équations aux derivées partielles du premier ordre essentiellement non linéaires

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 171--172

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123622

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(|n+\mu|)\cos(2n+\mu)\pi\lambda =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(|n+\lambda|)\cos(2n+\lambda)\pi\mu,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(|n+\mu|)\sin(2n+\mu)\pi\lambda = -$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(|n+\lambda|)\sin(2n+\lambda)\pi\mu.$$

Das erste Ergebnis kommt zuerst bei Ch. H. Müntz; ich glaube, daß das zweite (halb-symmetrische) Ergebnis bis jetzt unbekannt gewesen ist.

Wichtige Spezialfälle meiner Formel sind seit langer Zeit bekannt. Ein sehr bekanntes Beispiel ist die klassische Jacobische Transformation der Thetafunktion für $F(x) = e^{-\pi a x^2}$. Ebenso für $F(x) = |x|^{s-1}$ hat man die Funktionalgleichungen der allgemeinen Zetafunktionen. Diese Gleichungen stammen von Lipschitz und Epstein. Beispiele mit Zylinderfunktionen kommen bei G. Doetsch vor.

Außerdem hat mir mein Freund Herr Doktor Kober in Breslau seine schöne Formel mit

$$F(x) = |x|^{\nu} K_{\nu}(2\pi a|x|), \quad G(x) = \frac{a^{\nu}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{2\pi^{\nu+\frac{1}{2}}(x^2+a^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$$

bekannt gemacht. Ich danke Herrn Kober für seine bis jetzt unveröffentlichte Formel. Dadurch habe ich Untersuchungen dieser Entwicklungen angefangen.

Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre essentiellement non linéaires.

T. Ważewski, Kraków.

Soit $p = f(x, y, z, q)$ l'équation dont le deuxième membre est de classe C^2.*) L'équation est hypothèse essentiellement non linéaire c. à. d. on a : $\partial^2 f/\partial q^2 \neq 0$. Soit sur le plan $x = 0$ une courbe $z = \omega(y)$ possédant la dérivée première continue dans un intervalle Δ et supposons qu'il passe par cette courbe une surface intégrale $z = \varphi(x, y)$ de classe C^1 engendrée par des caractéristiques et définie dans un domaine D.

Ceci étant, les fonctions ω et φ jouiront d'une régularité plus

*) Une fonction est dite être de classe C^i dans un ensemble lorsqu'elle possède, dans cet ensemble, des dérivées partielles continues d'ordre i.

élevée: La seconde dérivée $\omega''(y)$ existe presque partout dans Δ. Les dérivées $\partial^2\varphi/\partial y^2$ et $\partial^2\varphi/\partial x\partial y$ existent presque partout dans D. Si en plus $\partial f/\partial q \neq 0$ les dérivées $\partial^2\varphi/\partial x^2$ et $\partial^2\varphi/\partial y\partial x$ existent aussi presque partout dans D.

Pour les équations linéaires ce théorème n'est pas vrai.

O skoroperiodicitě funkce definované Dirichletovou řadou.

Dr. *František Wolf*, Praha.

Podařilo se mi dokázat větu: Konverguje-li obecná trigonometrická řada k omezené funkci, jež je stejnoměrně spojitá, jest tím zaručena její skoroperiodičnost. — Není-li funkce omezena, nýbrž je-li omezen výraz $\int_a^{a+1} |f(x)| \, dx$ stejnoměrně v a a existuje-li

$$\lim_{\delta \to 0} \int_a^{a+1} |f(x+\delta) - f(x)| \, dx = 0$$

stejnoměrně v a, pak jest $f(x)$ skoroperiodické ve Stepanovově smyslu. Totéž platí i pro Besicovitchovo zobecnění skoroperiodicity.

Odtud poznatek: Funkce $f(s)$ definovaná jako součet Dirichletovy řady jest skoroperiodická pro $\sigma > \sigma_0$ tehdy a jen tehdy, je-li pro $\sigma > \sigma_0$ omezená. — Dosud byla skoroperiodičnost zaručena jen tehdy, existoval-li obor abs. příp. stejn. konvergence Dir. řady.

Podobný poznatek odvodil jsem pro případ Rieszovy zobecněné konvergence Dirichletovy řady. Tedy na př. pro Besicovitchovu skoroperiodicitu:

Konvergují-li pro $\sigma > \sigma_k$ Rieszovy středy indexu k k funkci $f(s)$, pro niž $M_t \{|f(\sigma + it)|^2\} < \infty$, pak jest pro $\sigma > \sigma_k$ $f(s)$ skoroperiodická v Besicovitchově smyslu.

Vzdáme-li se podmínky omezenosti, tam kde na př. $M \{|f(x)|\}$ více neexistuje, nelze funkci $f(s)$ nazývati skoroperiodickou v dosavadním smyslu, i když je limitou Rieszových středů. A přece lze dokázati, že $M \{f(\sigma + it) \, e^{i\lambda t}\}$ existuje dále, jen když užijeme jistého zobecnění konvergence při limitním přechodu, a že se dále rovná $a_\lambda e^{-\lambda\sigma}$. Výraz je tedy různý od nuly jen ve spočetném množství. Dále platí stále ještě, že $f(\sigma + it)$ jest limitou Rieszových součtů Dirichletovy řady, a ukázali jsme, že teprve tato podmínka vnáší do charakteristiky funkce skoroperiodičnost. Stojíme tu tedy před nutností zobecniti pojem skoroperiodičnosti víc, než se dosud stalo. Jsem přesvědčen, že zobecnění dosáhneme tím, že opustíme podmínku stejnoměrnosti aproximace trigonometrickými polynomy a že ji nahradíme podmínkou jinou.