

Wacław Sierpiński

Dernières recherches sur l'hypothèse du continu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 180--181

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123619>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1935

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

und wenn F eine zerlegbare Grenze ist,

$$\sum_{\lambda=2}^n (\lambda - 1) r_{\lambda} \leq n. \quad (2)$$

Ein besonderer Fall eines \mathfrak{R} -Kontinuums der Grenze F ist ein Punkt. Der Satz und beide Beziehungen (1) und (2) gelten für die erreichbaren Punkte.

Weil λ -fach erreichbares \mathfrak{R} -Kontinuum in einer einzigen \mathfrak{B} -Menge der Grenze F enthalten ist, gilt der Satz und auch die Beziehungen (1) und (2) für die \mathfrak{B} -Mengen der Grenze F .

Der Satz und die Relation (1) gelten auch für ein begrenztes ebenes unzerlegbares Kontinuum.

Dernières recherches sur l'hypothèse du continu.

Wacław Sierpiński, Warszawa.

Le but de cette Communication est de communiquer quelques résultats concernant l'hypothèse du continu qui ont été trouvés après l'apparition de ma monographie sur ce sujet.¹⁾

1. Dans une note qui paraîtra dans le t. 24 des *Fundamenta Mathematicae* j'ai démontré que l'hypothèse du continu H ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) équivaut à la proposition (P) suivante:

(P) L'intervalle $J = [0 \leq x \leq 1]$ est une somme d'ensembles dénombrables disjoints et tels que la somme de toute infinité indénombrable d'entre eux a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans J .

Il en résulte sans peine que l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'une décomposition de l'intervalle J en $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable de points communs et ayant chacun au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans J . Des tels ensembles sont, comme on sait, de mesure extérieure = 1 et de 2^{ème} catégorie dans tout intervalle.

2. En résolvant un problème posé par M. S. Ruziewicz j'ai démontré que l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'une décomposition de l'intervalle J en paires disjointes de points, telle que tout ensemble mesurable qui est une somme d'une infinité non dénombrable de ces paires est de mesure = 1.

En rapport avec un autre problème de M. Ruziewicz il est ici à remarquer qu'on peut démontrer sans admettre l'hypothèse du continu qu'il existe une décomposition de l'intervalle J en

¹⁾ Hypothèse du continu, Monografie Matematyczne t. IV, Warszawa 1934.

paires disjointes de points, telle que tout ensemble mesurable formé de ces paires est ou bien de mesure nulle, ou bien de mesure = 1.

3. On dit qu'un ensemble E situé dans un espace métrique jouit de la propriété C , s'il existe pour toute suite infinie de nombres positifs a_1, a_2, a_3, \dots une décomposition de l'ensemble E , $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$, où $\delta(E_n) \leq a_n$, $\delta(E_n)$ désignant le diamètre de l'ensemble E_n .

Dans une note qui paraîtra dans les Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa j'ai démontré que l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'un ensemble linéaire non dénombrable E jouissant de la propriété C et tel que chaque translation le long de la droite le transforme en lui-même, si l'on néglige tout au plus un ensemble dénombrable de points.

J'ai prouvé aussi qu'on peut dans la proposition que je viens d'énoncer, remplacer la propriété C par la propriété d'être un ensemble toujours de 1^{ère} catégorie (c. à. d. de 1^{ère} catégorie sur tout ensemble parfait).

Je ne sais pas cependant si l'on peut dans notre proposition réunir ensemble les propriétés de jouir de la propriété C et d'être toujours de 1^{ère} catégorie.

4. En résolvant un problème posé par M. Szpilrajn j'ai démontré que l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'un ensemble linéaire jouissant de la propriété C , dont le carré combinatoire est un ensemble plan qui ne jouit pas de la propriété C .

5. J'ai démontré²⁾ que l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'une famille indénombrable F d'ensembles linéaires parfaits de mesure positive, telle que tout produit d'une infinité indénombrable d'ensembles de la famille F est vide. J'en déduit que l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'une famille indénombrable F d'ensembles linéaires parfaits de mesure positive, telle qu'il n'existe aucun ensemble parfait de mesure positive P , tel qu'on ait $\text{mes } EP = \text{mes } P$ pour une infinité indénombrable d'ensembles E de la famille F .

²⁾ C. R. Soc. Sc. Varsovie, séance du 24 Mai 1934.