Bohumil Bydžovský

Sur les involutions quadratiques dans léspace à n dimensions

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 188--190

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123608

rèmes concernant les surfaces caractéristiques.[1]) La méthode peut être étendue à l'étude de variétés à m ($< r$) dimensions plongées dans des espaces hermitiens à courbure quelconque. En relation avec le système (1) je signale encore le théorème suivant: L'ensemble d'équations différentielles linéaires homogènes d'ordre r, dont les coefficients sont des fonctions uniformes et analytiques de la variable complexe $z = x + iy$ et dont le groupe de monodromie conserve une forme hermitienne non dégénérée à $2r$ variables, est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des solutions réelles, uniformes et analytiques du système d'équations partielles.[2])

$$\frac{\partial^2 \log |H_\alpha|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log |H_\alpha|}{\partial y^2} = 4\, \frac{H_{\alpha-1} \,.\, H_{\alpha+1}}{H_\alpha^2},$$
$$(\alpha = 0, \ldots, r - 1; \quad H_{-1} = 1, \; H_r = 0).$$

Sur les involutions quadratiques dans l'espace à n dimensions.

B. Bydžovský, Praha.

Le systeme homaloïdal appartenant à une transformation quadroquadratique Cremonienne dans l'espace à n dimensions est un système linéaire d'hyperquadriques ayant en commun une variété quadratique q_{n-2} à $(n - 2)$ dimensions et un point H. La variété q_{n-2} est la variété principale et le point H est le point principal isolé, auquel correspond, dans le deuxième espace, l'hyperplan contenant la variété principale respective. Si cette transformation est involutive, elle peut être exprimée par les équations suivantes:[1])

$$x'_1 : \ldots : x'_{n+1} = x_1 x_{n+1} : \ldots : x_h x_{n+1} : - x_{h+1} x_{n+1} : - \ldots : - x_n x_{n+1} : Q\ (x_1, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

Q étant une forme quadratique invariante par rapport à l'homographie involutive exprimée par les n premières de ces équations. Ces équations ont été établies en supposant que le point principal isolé n'appartient pas à la variété quadratique principale. Parmi les propriétés de cette involution citons une des plus importantes: elle est le produit d'une homographie involutive et d'une inversion quadratique.

La variété quadratique principale de cette involution est donnée par les équations

$$x_{n+1} = 0, \quad Q = 0;$$

[1]) V. ma note aux C. R. Acad. Sci., Paris, t. *197* (1933), p. *109*.

[2]) V. l'article de M. L. Schlesinger dans le Archiv der Math. u. Physik, 3. Reihe, Bd. *1* (1902), S. *262*.

[1]) Voir mon article, écrit en tchèque: „Sur les involutions quadratiques dans l'espace à n dimensions" dans ce Journal (Časopis etc.), t. LX (1931), p. 214.

son rang $r > 0$ peut avoir une valeur quelconque. Nous appellerons en tout cas l'involution (1) involution générale.

Dans cette communication, je m'occuperai d'involutions qu'on peut appeler *spéciales*; ce sont celles pour lesquelles le point principal isolé est situé sur la variété principale. Il y a alors à distinguer, si ce point est un point régulier ou bien singulier de cette variété.

Une transformation quadroquadratique dont le point principal isolé — pris pour le point $O_{n+1}(0, \ldots, 0, 1)$ — se trouve sur la variété principale, peut être exprimée par les équations suivantes:

$$\varrho x'_i = x_1 x_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$
$$\varrho x'_{n+1} = x_{n+1}\,(b x_1 + \sum_2^n c_k x_k) + \sum_2^n a_{ik} x_i x_k.$$

Il s'ensuit facilement que le deuxième système principal est spécialisé de la même manière que le premier et qu'il existe, entre les deux étoiles (H), (H'), dont les centres sont les deux points principaux isolés, une homographie. Pour l'existence de la transformation (2) il faut et il suffit que les paramètres b, c_k ne soient nuls tous à la fois. Ceci veut dire:

Pour l'existence de la transformation en question il faut et il suffit que le point principal isolé ne soit pas un point singulier commun à toutes les hyperquadriques du système homaloïdal.

Par contre, il n'y a aucun inconvénient à ce que la variété quadratique possède un point singulier (ou même une infinité) qui est en même temps point principal isolé.

Si la transformation considérée est involutive, elle est spéciale dans le sens mentionné plus haut. Ses équations sont de la forme:

$$\begin{aligned} \varrho x'_i &= x_i\, L\,(x_1, \ldots, x_n) & i &= 1, \ldots, h \\ \varrho x'_k &= -\, x_k\, L\,(x_1, \ldots, x_n) & k &= h+1, \ldots, n \\ \varrho x'_{n+1} &= Q\,(x_1, \ldots, x_n) - x_{n+1}\, \overline{L}\,(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{3}$$

où Q est une forme quadratique (non nulle), d'ailleurs quelconque, invariante par rapport à la substitution

$$x'_1 : \ldots : x'_n = x_1 : \ldots : x_h : -\, x_{h+1} : \ldots : -\, x_n,$$

L, $\overline{L}$ deux formes linéaires (non nulles), dont l'une est la transformée de l'autre par la même substitution.

L'étude de la transformation générale est facilitée par le fait signalé plus haut qu'elle est le produit d'une homographie involutive et d'une inversion. La question se pose, si cette propriété subsiste encore pour l'involution spéciale. Voici la réponse:

La condition, nécessaire et suffisante, pour que l'involution quadratique spéciale soit le produit d'une homographie involutive et d'une inversion quadratique, est celle que son point principal isolé se trouve dans un point singulier de la variété quadratique principale.

Donc, les involutions spéciales de cette espèce peuvent être etudiées de la même manière que les involutions générales; il n'en est pas ainsi pour les involutions spéciales où le point principal isolé ne se trouve pas dans un point singulier de la variété principale. Pour les involutions de ce genre il faut chercher une autre décomposition en éléments plus simples.

Über zweidimensionale Räume mit konstanter Krümmung und geradlinigen Extremalen.

P. Funk, Prag.

Ausgangspunkt ist eine allgemein für zweidimensionale Finsler'sche Räume giltige Deutung des Krümmungsmaßes. Denkt man sich die Jacobi'sche Gleichung so transformiert, daß alle Lösungen lineare Funktionen sind, so sei die zugehörige unabhängige Veränderliche l als linearisierende Veränderliche bezeichnet. Bezeichnet s die Bogenlänge im Finsler'schen Sinn, dann ist der Schwarz'sche Differentialausdruck gebildet für l als abhängige und s als unabhängige Veränderliche, wie bereits früher nachgewiesen[1]) wurde, gleich dem Krümmungsmaß. Aus dieser Tatsache folgt unmittelbar: Sind in zweidimensionalen Räumen mit konstanter Krümmung geradlinige Extremale auf Geraden liegende Punktreihen einander so zugeordnet, daß im Sinn der Maßbestimmung äquidistante Punkte einander entsprechen, so sind diese Punktreihen projektiv aufeinander bezogen. Aus dieser Tatsache ergibt sich unmittelbar ein Satz von Berwald,[2]) wonach die zu einer Geraden zugehörigen transversalen Linienelemente Geraden angehören, die durch einen Punkt gehen. Bei zweidimensionalen Räumen mit positivem konstantem Krümmungsmaß und geradlinigen Extremalen ergibt sich ein Zusammenhang mit der Theorie der analytischen Funktionen. In solchen Räumen haben, wie bereits bekannt, alle Geraden dieselbe endliche Länge. Man kann also bei orientierten Geraden von einem Halbierungspunkt P und von einem Punkt P_1, der die Gerade im Verhältnis 3 : 1 teilt, sprechen. Sei durch $u = u\,(x, y)$; $v = v\,(x, y)$ das Vektorfeld PP_1 dargestellt, so gilt $y + iv = \mathfrak{f}(x + iu)$, wenn $\mathfrak{f}$ eine analytische Funktion ist. Anders ausgedrückt: Das Vektorfeld ist quellenfrei und die zugehörige Abbildung ist flächentreu.

[1]) Math. Annalen Bd. 101.
[2]) Wiener Monatshefte Bd. 34.