abgesehen von Schrödingers Entwicklungen zur Quantenmechanik auch den Ausgangspunkt einer Theorie[1]) der optischen Abbildung durch Elektronenstrahlen, deren Verwirklichung in den verschiedenen Ausführungsformen des Elektronenmikroskops zu den schönsten und meistversprechenden Errungenschaften der letzten Jahre gehört. Das folgende Referat berichtet über die vollständige Durchführung der Hamiltonschen Gedankengänge, also die explizite Herleitung der Abbildungsgesetze und die Berechnung der die Abbildung charakterisierenden Größen, wie Brechkraft, Brennweiten, Lage der Hauptebenen und der Bildfehler 3. O. bei der Abbildung durch die Bahnkurven beliebiger mechanischer Systeme mit rotationssymmetrischer, zeitfreier Lagrangescher Funktion bezw. in beliebigen anisotropen, inhomogenen Medien mit Rotationssymmetrie. Die Theorie der Abbildung durch Elektronenstrahlen in einem allgemeinen rotationssymmetrischen elektromagnetischen Feld, ist hierin als Spezialfall enthalten.

Raum und Zeit in beschleunigten Bezugssystemen.

Walter Glaser, Prag.

Alle geradlinig und gleichförmig zu einander bewegten Bezugssysteme haben bekanntlich das gemeinsame Linienelement

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{1}$$

in dem die Koordinaten t, x, y, z eine einfache physikalische Bedeutung haben: t ist die an ruhenden, synchronisierten Uhren abgelesene Zeit, xyz sind die mittels starrer Maßstäbe längs der Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems abgetragenen Entfernungen; die vierdimensionale Mannigfaltigkeit (1), die Inertialsystemen entspricht, zerfällt somit in Raum und Zeit; wie sie sich allerdings in den einzelnen Systemen auf Raum und Zeit aufteilt, hängt von der gegenseitigen Translationsgeschwindigkeit der Bezugssysteme ab und ist verschieden für die individuellen Systeme der Schar.

Wie aber ist es, wenn wir ein beliebig bewegtes Bezugssystem betrachten? Wird sich auch hier die vierdimensionale Welt in Raum und Zeit aufspalten lassen? Diese Aufspaltung wird jedenfalls nicht in die durch ruhende Uhren gemessene Zeit und einen euklidischen Raum möglich sein, denn diese Eigenschaft ist charakteristisch für Inertialsysteme. Man hat aber bis jetzt vermutet, oder es wenigstens im Spezialfall der rotierenden Scheibe beweisen zu können geglaubt, daß in einem beschleunigten System die Auf-

---

[1]) H. Busch, Arch. f. Elektrotechn. XVIII. S. 583. Heft. 6. 1927. W. Glaser, Z. f. Phys. *80*. S. 451, 1933, *81*. S. 649, 1933, *83*. S. 104, 1933. Ann. d. Phys. Bd *18*. S. 557, 1933.

spaltung wohl nicht in einen euklidischen, dafür aber in einen nichteuklidischen Raum möglich sei. So wurde von Einstein,[1] Laue,[2] Born,[3] Thirring und anderen die Behauptung vertreten, daß auf der rotierenden Scheibe die nichteuklidische Geometrie gelte. Wir wollen zeigen, daß nicht bloß diese spezielle Ansicht unhaltbar ist, sondern daß allgemein die Aufspaltung in Raum und Zeit, d. h. die Transformation des Linienelementes auf statische Gestalt in bewegten Bezugssystemen nur dann möglich ist, wenn sich diese geradlinig und gleichförmig gegenüber Inertialsystemen bewegen, also selbst zur Schar der Inertialsysteme gehören. In einem beschleunigten Bezugsystem kann man somit von Raum und Zeit nicht sprechen, die Messungen, welche zur Festlegung von Raumkoordinaten unternommen würden, wären vom Zeitverlauf nicht unabhängig und umgekehrt. Es ist daher im besonderen die Behauptung, es herrsche in einem beschleunigten System eine bestimmte geometrische Raumstruktur, sinnlos.

Der Beweis besteht darin, daß wir das sich beliebig bewegende Bezugssystem in jedem Punkte durch das „tangierende Affinsystem“ ersetzen, dessen Ursprung sich mit der momentanen Geschwindigkeit des gerade betrachteten Punktes bewegt und dessen Achsen mit den Tangenten an die Koordinatenlinien in diesem Punkte übereinstimmen. Wir lösen so das beschleunigte System in die unendliche Mannigfaltigkeit der „lokalen Inertialsysteme“ auf. Diese sind dadurch gegeben, daß die Richtung ihrer Achsen mit den Tangenten an die krummlinigen Koordinatenlinien des beschleunigten Systems übereinstimmt und die Geschwindigkeit ihres Ursprungs durch diejenige des Punktes, in dem sie errichtet werden, gegeben ist. In jedem Zeitmoment können wir also vom ursprünglichen Inertialsystem zu diesem „lokalen Inertialsystem“ durch die Formeln der gewöhnlichen Lorentztransformation übergehen. So erhalten wir lineare Beziehungen — totale Differenzialgleichungen — zwischen den Koordinatendifferenzen dx, dy, dz, dt im In. S. und den Koordinaten im lokalen Inertialsystem dx_1, dx_2, dx_3, dx_0. In diesen Größen ist das Linienelement in Raum und Zeit zerspalten. Damit diese lokale Zerspaltung mit einem Schlage für alle Punkte möglich sei, müssen die erwähnten Differenzialgleichungen integrabel sein. Es zeigt sich, daß die Integrabilitätsbedingungen nur für eine geradlinig gleichförmige Bewegung erfüllt werden. Sind

$$x = \varphi(x_1, x_2, x_3, t), \qquad y = \chi(x_1, x_2, x_3, t), \qquad z = \psi(x_1, x_2, x_3, t) \tag{2}$$

die „klassischen Transformationsgleichungen“, durch die wir nach der „Newtonschen Kinematik“ den Bewegungszustand des Systems

[1]) Vier Vorl. über Rel. Th. Braunschweig 1922. III. Vorl. S. 39. [2]) Rel. Th. II. Bd. Braunschweig. 1921. S. 27. [3]) Die Rel. Th. Einsteins. S. 211. [4]) Hdb. d. Phys. IV. Bd. S. 170.

mit den krummlinigen Koordinaten x_1, x_2, x_3 ausdrücken, so berechnen wir nach (1)

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = gc^2\,dt^2 - 2g_i\,dt - g_{ik}\,dx^i\,dx^k$$

mit (3)

$$g = 1 - \frac{1}{c^2}(\varphi_0{}^2 + \chi_0{}^2 + \psi_0{}^2), \quad g_i = \varphi_0\varphi_i + \chi_0\chi_i + \psi_0\psi_i, \quad g_{ik} = \varphi_i\varphi_k + \chi_i\chi_k + \psi_i\psi_k. \tag{4}$$

Man findet dann für die Transformationsgleichungen zum „lokalen Inertialsystem"

$$\begin{aligned} dx &= (\varphi_i + \gamma\varphi_0 g_i)\,dx^i + \alpha\varphi_0\,dx^0 \\ dy &= (\chi_i + \gamma\chi_0 g_i)\,dx^i + \alpha\chi_0\,dx^0 \\ dz &= (\psi_i + \gamma\psi_0 g_i)\,dx^i + \alpha\psi_0\,dx^0 \\ dt &= \alpha(dx_0 + 1/c^2\,g_i\,dx^i) \end{aligned} \tag{5}$$

wobei γ und α zur Abkürzung für

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \gamma = \frac{1}{c^2\sqrt{g}}\,\frac{1}{1 + \sqrt{g}} \tag{6}$$

gesetzt ist. Das sind die relativistischen Verallgemeinerungen der entsprechenden klassischen Gleichungen

$$dx = \varphi_i\,dx^i + \varphi_0\,dx_0, \; dy = \chi_i\,dx^i + \chi_0\,dx_0, \; dz = \psi_i\,dx^i + \psi_0 dx_0, \; dt = dx_0 \tag{7}$$

und sie stehen zu diesen in derselben Beziehung wie die Lorentztransformationen zu den Galileitransformationen. Sie enthalten natürlich die Lorentztransformationen als Spezialfall, wenn man für (2) $\varphi = x_1 + ut$, usw. setzt. Im Grenzfall $c \to \infty$ gehen (5) wegen $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ in (7) über. Die Umrechnung von ds^2 mit (5) auf die Größen dx_1, dx_2, dx_3, dx_0 ergibt

$$ds^2 = c^2\,dx_0{}^2 - g_{ik}\,dx^i\,dx^k.$$

Das Linienelement ist somit in den Raum mit der Metrik $d\sigma^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k$ und die Zeit dx_0 zerspalten. Die eingehende Diskussion der Integrabilitätsbedingung von (5) ergibt, daß allein die dem „klassischen" Bewegungszustand $x = x_1 + ut$, $y = x_2 + vt$, $z = x_3 + wt$ entsprechenden Gleichungen (5) integrabel sind. Eine ausführliche Darstellung der behandelten Frage erscheint in der Z. f. Phys.

Deformations- und Spannungszustand der achsensymetrisch belasteten dicken Kugelschale.

Miloslav Hampl, Praha.

Die Verschiebungen und Spannungen der achsensymetrisch belasteten Kugelschale ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes