Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Antonín Zelenka

Závislost pojistně-matematických hodnot na úrokové míře

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 220--221

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123570

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1935

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Závislost pojistně-matematických hodnot na úrokové míře.

Dr. *A. Zelenka,* Praha.

Úloha, kterou zde řešíme, je: „Ze známé úplné tabulky pojistně-matematických hodnot pro určitou úrokovou míru je stanoviti určitou pojistně-matematickou hodnotu pro jinou úrokovou míru“. Pro stanovení jedné nebo několika málo hodnot při nové úrokové míře znamená sestavení nových komutačních čísel příliš velikou početní práci, takže jde o nalezení jen aproximativních vzorců. Úloha tato v poslední době byla velmi detailně diskutována — Steffenson, Palmquist, Meidell, Poukka v Skand. Aktuarietidskrift, Christen v Schweiz. Mitteilungen. Většinu výsledků těchto prací lze snadno odvoditi z rozvoje:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{l_{x+t}}{l_x} e^{-\vartheta t}\, dt = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\vartheta^k}{k!} \int_0^\infty l_{x+t} \,.\, t^k \,.\, dt =$$

$$= {}^1e_x - \vartheta^2 \,.\, e_x + \vartheta^2 \,.\, {}^3e_x - \ldots + (-1)^k \,.\, \vartheta^k \, {}^{k+1}e_x + \ldots,$$

kde

$${}^{k+1}e_x = \frac{1}{k!} \int_0^\infty t^k \frac{l_{x+t}}{l_x}\, dt = \frac{1}{l_x} \int_0^\infty dt \int_t^\infty dt \ldots \int_t^\infty l_{x+t}\, dt \ldots k+1 \text{ integrací.}$$

Tento základní rozvoj sám o sobě již ale postačí k výpočtu $\bar{a}_x$ pro různá ϑ. Také je možno tuto řadu transformací pozměniti ve formuli

$$\bar{a}_x = {}^1e_x - \frac{\vartheta \,.\, {}^2e_x}{1 + \vartheta \,.\, \dfrac{{}^3e_x}{{}^2e_x}}$$

po případě odvoditi vzorce

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\vartheta} \left(1 - e^{-\vartheta({}^1e_x - \vartheta \varepsilon_x)}\right), \qquad \text{kde } \varepsilon_x = {}^2e_x - \tfrac{1}{2}\, e_x^2.$$

Pomocí rozvoje pro $\bar{a}_x$ dostaneme Taylorovou řadou rozvoj pro $\bar{a}'_x$ pro $\vartheta' = \vartheta + h$ ve formě

$$\bar{a}'_x = a_x - \frac{h}{1!} \overset{<}{a}_x{}^{(1)} + \frac{h}{2!} \overset{<}{a}_x{}^{(2)} + \ldots + (-1)^k \frac{h^k}{k!} \overset{<}{a}_x{}^{(k)},$$

kde

$$\overset{<}{a}_x{}^{(k)} = \int_0^\infty t^k \frac{l_{x+t}}{l_x} e^{-\vartheta t}\, dt.$$

Z tohoto rozvoje pak snadno lze odvoditi formuli Poukkovou, Palmquistovou i Steffensonovou.

Také pro $\bar{a}_x^{ai}$, důležitou hodnotu sociálního pojištění, dostáváme obdobné rozvoje. Vyjdeme-li z vyjádření

$$\bar{a}_x^{ai} = \int_0^\infty \int_0^\infty p_{x,t}^{aa} \, \nu_{x+t} \, p^i_{x+t,\tau} \, e^{-\vartheta(t+\tau)} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau,$$

dostáváme

$$\bar{a}_x^{ai} = {}^1e_x^{ai} - \vartheta^2 e_x^{ai} + \ldots + (-1)^k \, . \, \vartheta^k \, . \, {}^{k+1}e_x^{ai},$$

kde

$${}^{k+1}e_x^{ai} = \frac{1}{k!} \int_0^\infty \int_0^\infty p_{x,t}^{aa} \, \nu_{x+t} \, p^i_{x+t,\tau} \, (t + \tau)^k \, \mathrm{d}t \, . \, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_0^\infty p_{x,t}^{aa} \, \nu_{x+t} \left({}^{k+1}e_{x+t}^i + \frac{t}{1!} \, {}^k e_{x+t}^i + \ldots + \frac{t}{k!} \, . \, {}^1 e_{x+t}^i \right) \mathrm{d}t.$$

Tyto rozvoje jsou formálně úplně stejné pro všecky ostatní výsledky jako u $\bar{a}_x$ resp. $\bar{a}'_x$, ale jejich vyčíslení je daleko obtížnější.