Walter Fröhlich
Eine Normalform für Viererzöpfe

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 177--179

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123567

$$|f_1|^2 + \ldots + |f_n|^2 + \ldots$$

soit convergente. Dans cet espace $f + g$, af (a constante) et la distance fg sont définis comme dans l'espace à un nombre fini de dimensions.

Il est naturel de chercher à déterminer tous les espaces abstraits vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace concret de Hilbert, c'est à dire qui sont, avec cet espace Ω, dans une correspondance ponctuelle biunivoque conservant l'addition $f + g$, la multiplication af et la distance fg. Nous avons montré, que ce sont les espaces complets,*) séparables,*) à une infinité de dimensions, vérifiant une certaine condition analytique (b) à laquelle on peut donner une forme géométrique (b').

(b) Pour tout système de 4 points f, g, h, k de cet espace abstrait, on a — comme dans l'espace géométrique élémentaire classique à trois dimensions —

$$\varphi\psi^2 = x^2 kf^2 + y^2 kg^2 + z^2 kh^2 - 2yz\,(kg\,.\,kh) - 2zx\,(kh\,.\,kf) - 2xy\,(kf\,.\,kg)$$

$$\text{avec } \varphi - \psi = x(f - k) + y(g - k) + z(h - k)$$

pour tout système de nombres réels x, y, z.

b') Chacun des hyperplans de cet espace abstrait est vectoriellement applicable sur l'espace euclidien à 3 dimensions.

IV. En introduisant le produit scalaire dissymétrique $((f\,.\,g)) = (f\,.\,g) - i\,(if\,.\,g)$ tout espace abstrait vectoriel distancié vectoriellement applicable sur l'espace concret de Hilbert se confond avec un espace de von Neumann.

Note. Les détails de la détermination de la classe étudiée sont donnés dans un mémoire paraissant dans la Revista Matematica Hispano-Americana. L'équivalence des espaces de cette classe avec l'espace de von Neumann et l'équivalence des conditions b), b') — quand on tient compte des autres conditions — seront établies dans un autre mémoire en impression dans les „Annals of Mathematics."

Eine Normalform für Viererzöpfe.

Walter Fröhlich, Prag.

Für die Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ der Zöpfe n-ter Ordnung hat E. Artin[1]) zwei verschiedene Systeme von Erzeugenden und definierenden

*) Voir la définition de ces termes dans notre livre „Les Espaces abstraits", Gauthier-Villars 1928.

[1]) E. Artin, Theorie der Zöpfe, in den „Abhandlungen aus dem mathem. Seminar der Hamburger Universität", Bd. IV, Seite 47—72. — Auch die folgenden Fußnoten beziehen sich auf diese Arbeit, und zwar

Relationen angegeben. Das erste System[2]) besitzt $n - 1$ Erzeugende und eine Anzahl zugehöriger definierender Relationen, das zweite System[3]) besitzt für $n > 2$ genau drei Erzeugende und auch eine Anzahl definierender Relationen. E. Artin hat das Wortproblem[4]) für alle $\mathfrak{Z}_n$ gelöst und zwar unter Zugrundelegung des ersten Systems. Doch konnte in diesem System das Transformationsproblem bisher nur für $n = 2$ gelöst werden. Im zweiten System hat O. Schreier[5]) für $n = 3$ eine „Normalform" aufgestellt und gezeigt, daß diese nicht nur zur Lösung des Wortproblems, sondern auch zur Lösung des Transformationsproblems ausreicht.

Im folgenden wird nun im zweiten System für $n = 4$ das Wortproblem gelöst, und zwar wieder durch Aufstellung einer Normalform, welche möglicherweise bei der Behandlung des Transformationsproblems für $n = 4$ gute Dienste leisten kann.

Wir wollen die drei Erzeugenden mit a, b und c bezeichnen, dann sind die drei Relationen

$$a^4 = c \tag{1}$$

$$b^3 = c \tag{2}$$

$$a^2bab = baba^2 \tag{3}$$

definierende Relationen unserer Gruppe. Aus ihnen können weitere Relationen abgeleitet werden. Wir merken die folgenden an:

$$a^{-1} = a^3c^{-1} \tag{4}$$

$$b^{-1} = b^2c^{-1} \tag{5}$$

$$aba^2b^2 = b^2a^2ba \tag{6}$$

$$a^3b\,(bab)^A\,ba^2b = ba^2b\,(bab)^A\,ba^3 \tag{7}$$

$$a^2b\,(bab)^A\,(ba^3)^\nu\,ba^3b^2 = b^2a^3b\,(bab)^A\,(a^3b)^\nu\,ba^2 \quad \text{(für } A, \nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &a^2b\,(bab)^{A+1}\,ab\,(a^3b)^\alpha\,(bab)^B\,(a^3b)^\beta \ldots \\ &\ldots (bab)^M\,(a^3b)^\mu\,(bab)^N\,a^2\,(ba^3)^{\nu+1}\,b^2 = \\ &= b^2a^3b\,(bab)^A\,(a^3b)^{\alpha+1}\,(bab)^B\,(a^3b)^\beta \ldots \\ &\ldots (bab)^M\,(a^3b)^\mu\,(bab)^{N+1}\,(a^3b)^\nu\,ba^2 \\ &(\text{für } A, B, \ldots, M, N;\ \alpha, \beta, \ldots, \mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{9}$$

Es läßt sich nun zeigen, daß jedes vorgelegte Potenzprodukt durch endlich viele Schritte so umgeformt werden kann, daß keiner

[2]) Auf Seite 52.

[3]) Auf Seite 54, wo allerdings nur von 2 Erzeugenden die Rede ist. Doch ist es von Vorteil $a\sigma = b$ und $a^4 = b^3 = c$ zu setzen und mit diesen 3 Erzeugenden zu operieren.

[4]) Auf Seite 62—64.

[5]) Auf Seite 70.

seiner Teile (auch das ganze Potenzprodukt nicht) mit einer der linken Seiten von (1), (2), . . ., (9) übereinstimmt. Eine solche Form soll „Normalform" heißen. Auf Grund von längeren Untersuchungen kommt man zu der Einsicht, daß die Normalform eindeutig ist. Und nun ist klar wieso durch sie das Wortproblem gelöst ist.

Sur la métrisation de l'espace de continus péaniens.

S. Mazurkiewicz, Warszawa.

On définit une métrique complète de l'ensemble de continus péaniens contenus dans un espace péanien donné.

Über zweifach erreichbare Punkte und 𝔓-Mengen der gemeinsamen Begrenzung von m ($m > 2$) ebenen Gebieten.

Josef Novák, Brno.

Eine Menge ist eine 𝔓-Menge von unzerlegbaren Kontinua $K_1, K_2, \ldots, K_p$ ($p \geqq 1$), wenn 𝔓 folgende Eigenschaften hat:

1. Sie ist eine Summe echter Teilmengen von $K_1, K_2, \ldots, K_p$;
2. sie ist ein Semikontinuum;
3. sie ist gesättigt hinsichtlich der Eigenschaften 1. und 2.

Eine Menge ist ein 𝔎-Kontinuum der unzerlegbaren Kontinua $K_1, K_2, \ldots, K_p$, wenn sie eine Summe echter Teilmengen von $K_1, K_2, \ldots, K_p$ und ein Kontinuum ist.

Eine Menge ist von dem Gebiete G erreichbar, wenn sie sich im Gebiete G mit einem Punkte dieses Gebietes durch einen einfachen Bogen verbinden läßt. Eine Menge ist λ-fach erreichbar, wenn sie von λ verschiedenen Gebieten erreichbar ist und sie heißt höchstens λ-fach erreichbar, wenn sie von höchstens λ verschiedenen Gebieten erreichbar ist ($\lambda \geqq 1$).

Sei F eine beschränkte gemeinsame Grenze von m ($m > 2$) ebenen Gebieten. Sei n die Anzahl der Komponenten des Komplements $E_2 - F$ (n ist eine natürliche Zahl oder $\aleph_0$).

Dann gilt der Satz:

Eine unzerlegbare (zerlegbare) Grenze F besitzt höchstens $n - 1$ (n) disjunkte zweifach erreichbare 𝔎-Kontinua der Menge F.

Es gilt eine Verallgemeinerung:

Enthält eine unzerlegbare Grenze F r_λ der höchstens λ-fach erreichbaren disjunkten 𝔎-Kontinua, dann gilt diese Relation:

$$\sum_{\lambda=2}^{n} (\lambda - 1)\, r_\lambda \leqq n - 1 \qquad (1)$$