Maurice Fréchet

Détermination de la classe la plus générale d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace concret de Hilbert

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 176--177

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123559`

Le point x de S soit appelé quasi-totalement accessible si, V étant un entourage arbitraire de x, une suite $\{y_\nu\}$ jouissant des propriétés (1), (2), (3) ne peut exister que si le diamètre de P_ν converge vers zéro, P_ν étant la composante de $E_n - S$ telle que $y_\nu \in P_\nu$. J'ai prouvé que l'accessibilité quasi-totale est aussi une propriété intrinsèque de S en x.

Les deux théorèmes restent vrais en remplaçant E_n par un espace beaucoup plus général.

Détermination de la classe la plus générale d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace concret de Hilbert.

Maurice Fréchet, Paris.

I. En vue des applications à la physique mathématique, M. von Neumann a défini des espaces abstraits qui sont vectoriellement applicables sur l'espace concret de Hilbert. Il considère à cet effet des espaces abstraits affines, c'est à dire où l'on a défini convenablement la somme de deux éléments et le produit d'un élément par une constante. Et il suppose qu'on y a défini convenablement un produit scalaire dissymétrique, $((f \cdot g))$ de deux éléments.

Il définit ensuite accessoirement la distance fg de deux éléments comme la valeur de $(([f-g] \cdot [f-g]))$.

Dans la géométrie élémentaire classique, la distance est une notion primordiale et le produit scalaire une notion secondaire non essentielle mais commode.

Il est possible d'opérer de même dans la géométrie des espaces abstraits.

II. Les fondateurs du Calcul vectoriel, Grossmann en particulier, avaient défini des espaces abstraits vectoriels. D'autre part, nous avons défini des espaces abstraits distanciés. En associant ces deux notions, M. M. Banach et Wiener ont introduit la notion d'espace abstrait vectoriel distancié.

Dans un tel espace, il est naturel de définir un produit scalaire symétrique $(f \cdot g)$, exactement comme en géométrie élémentaire, par la relation

$$fg^2 = hf^2 + hg^2 - 2\,(hf \cdot hg).$$

En particulier:

$$fg^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\,(f \cdot g)$$

en posant

$$\|f\| = 0f,\ \|g\| = 0g,\ (f \cdot g) = (0f \cdot 0g).$$

III. L'espace concret Ω de Hilbert est un espace vectoriel distancié où chaque élément f est défini par une suite de nombres $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ tels que la série

$$|f_1|^2 + \ldots + |f_n|^2 + \ldots$$

soit convergente. Dans cet espace $f+g$, af (a constante) et la distance fg sont définis comme dans l'espace à un nombre fini de dimensions.

Il est naturel de chercher à déterminer tous les espaces abstraits vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace concret de Hilbert, c'est à dire qui sont, avec cet espace Ω, dans une correspondance ponctuelle biunivoque conservant l'addition $f+g$, la multiplication af et la distance fg. Nous avons montré, que ce sont les espaces complets,*) séparables,*) à une infinité de dimensions, vérifiant une certaine condition analytique (b) à laquelle on peut donner une forme géométrique (b').

(b) Pour tout système de 4 points f, g, h, k de cet espace abstrait, on a — comme dans l'espace géométrique élémentaire classique à trois dimensions —

$$\varphi\psi^2 = x^2kf^2 + y^2kg^2 + z^2kh^2 - 2yz\,(kg\,.\,kh) - 2zx\,(kh\,.\,kf) - 2xy\,(kf\,.\,kg)$$

$$\text{avec } \varphi - \psi = x(f-k) + y(g-k) + z(h-k)$$

pour tout système de nombres réels x, y, z.

b') Chacun des hyperplans de cet espace abstrait est vectoriellement applicable sur l'espace euclidien à 3 dimensions.

IV. En introduisant le produit scalaire dissymétrique $((f\,.\,g)) = (f\,.\,g) - i\,(if\,.\,g)$ tout espace abstrait vectoriel distancié vectoriellement applicable sur l'espace concret de Hilbert se confond avec un espace de von Neumann.

Note. Les détails de la détermination de la classe étudiée sont donnés dans un mémoire paraissant dans la Revista Matematica Hispano-Americana. L'équivalence des espaces de cette classe avec l'espace de von Neumann et l'équivalence des conditions b), b') — quand on tient compte des autres conditions — seront établies dans un autre mémoire en impression dans les „Annals of Mathematics."

Eine Normalform für Viererzöpfe.

Walter Fröhlich, Prag.

Für die Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ der Zöpfe n-ter Ordnung hat E. Artin[1]) zwei verschiedene Systeme von Erzeugenden und definierenden

*) Voir la définition de ces termes dans notre livre „Les Espaces abstraits", Gauthier-Villars 1928.

[1]) E. Artin, Theorie der Zöpfe, in den „Abhandlungen aus dem mathem. Seminar der Hamburger Universität", Bd. IV, Seite 47—72. — Auch die folgenden Fußnoten beziehen sich auf diese Arbeit, und zwar