Wilhelm Blaschke
Geometrie der Gewebe

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 183--187

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123552

J-geodaetische Bogen, die sich in zwei Punkten auf die Grenze K tsützen (offene J-g. L.), so gilt der

II. Satz. In einer J-Metrik kommen nur offene geodaetische Linien vor. Die Endpunkte solcher Linien fallen mit den gemeinsamen Extremalstellen S und s aller zugehörigen erzeugenden Funktionen zusammen.

Fragt man nach der Existenz der geodaetischen Linien einer J-Metrik, so hat man ∞^1 solcher Linien zu erwarten. Ihr tatsächliches Vorhandensein ist eine Frage, die durch ihre topologische Seite erschwert wird.

Verschärft man jedoch die Hypothesen, indem man eine reguläre Jordan's Kurve annimmt (d. h. eine K, die überall Tangenten besitzt), so kann man der Reihe nach diese einfachen Sätze beweisen:

III. Satz. Eine reguläre J-Metrik hat immer eine ∞^1 Schar geodaetischer Linien, die übrigens aus zu der Grenze K orthogonalen Kreisbogen besteht.

IV. Satz. Hat eine reguläre J-Metrik eine ∞^1 Schar geodaetischer Linien, die durch einen Punkt O aus J laufen, so reduziert sich J notwendigerweise auf den Inhalt eines Kreises; übrigens kann der Punkt O auch auf der Grenze K liegen.

V. Satz. Die einzige reguläre J-Metrik, die auch das Axiom der ausnahmslosen Existenz der geodaetischen Linien erfüllt, ist die J-Metrik in Bezug auf einen Kreis.

VI. Satz. Diese letztere J-Metrik fällt mit derjenigen Lobatschewsky's zusammen, und zwar mit deren kreisverwandter Abbildung, die von Poincaré erdacht wurde.

Alle diese Schlüsse sind leicht auf mehrdimensionale Gebiete zu übertragen.

Übrigens ist es möglich für die J^*-Bereiche, die in einem J-Bereich enthalten sind, unter Beibehaltung desselben variativen Verfahrens und der ausschließlichen Handhabung der „Entfernung erster Stufe" (AB), eine zweistufige Jordansche Metrik abzuleiten. Die „zweistufige Entfernung" $((AB))$ erfüllt dieselben grundlegenden fünf Axiome.

Man kann sich für diese neue Metrik ebenfalls die obigen geodaetischen Fragen stellen, was aber den Rahmen dieses Vortrags überschreiten würde.

Geometrie der Gewebe.

Wilhelm Blaschke, Hamburg.

Seit 1927 sind etwa 60 Arbeiten erschienen unter dem gemeinsamen Obertitel „Topologische Fragen der Differentialgeometrie", und zwar zum größten Teil in den Abhandlungen meines mathematischen Seminars in Hamburg, zum kleineren in der mathematischen Zeitschrift und den mathematischen Annalen. Ich will und kann Ihnen hier keinen Bericht über den Inhalt dieser Arbeiten geben, ich werde aber versuchen, einige der leitenden Gedanken dieser Arbeitsrichtung in Kürze anzudeuten und auf offene Fragen hinzuweisen.

Die Topologie oder Analysis Situs beschäftigt sich mit solchen geometrischen Eigenschaften, die gegenüber Abbildungen invariant sind, die mit ihren Umkehrungen eindeutig und stetig sind. Die meisten derartigen Untersuchungen beziehen sich aber bisher auf die Geometrie im Großen. Eine derartige topologische Invariante ist zum Beispiel das „Geschlecht" einer geschlossenen Fläche. Das Ziel unserer Arbeitsreihe ist die Erforschung topologischer Eigenschaften geometrischer Figuren im Kleinen. Es handelt sich also um lokale Eigenschaften, die von einer beliebig engen Umgebung eines Punktes einer Figur gelten und die außerdem topologisch sind, d. h. invariant gegenüber topologischen Abbildungen. In diesem Sinne könnte man dann auch von topologischer Differentialgeometrie sprechen.

Lassen Sie mich dies an einem einfachen Beispiel erörtern! Nehmen wir in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G der x, y-Ebene n Kurvenscharen

$$t_i(x, y) = \text{konst.}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dabei sollen die Funktionen t_i in dem Sinne stetig und monoton sein, daß jede von ihnen topologisch einer Parallel-Koordinate (wie x) gleichwertig ist. Gilt auch für jedes Paar dieser Funktionen t_i, t_k $(i \neq k)$, daß sie einem Paar von Parallelkoordinaten wie x, y gleichwertig sind, so pflegen wir zu sagen, daß die n Kurvenscharen in G ein „Gewebe" bilden, und zwar ein n-Gewebe.

Wann lassen sich nun die Funktionen t_i für ein gegebenes Gewebe so einrichten, daß in G identisch in x, y die Beziehung

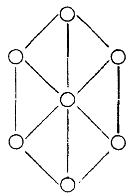
$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 0$$

besteht?

Wir wollen, um einen kurzen Ausdruck zur Verfügung zu haben, ein solches n-Gewebe linear nennen. Nehmen wir den niedrigsten Fall eines 3-Gewebes! Dann hat die Forderung der Linearität eine einfache geometrische Bedeutung: Jedes lineare 3-Gewebe ist einem aus 3 Scharen paralleler Geraden gleichwertig. Dies leuchtet ohne weiteres ein. Aber schon nicht so trivial ist der folgende Satz meines verstorbenen Freundes G. Thomsen[1]):

[1]) W. Blaschke, T_1 (= Topologische Fragen der Differentialgeometrie 1). Math. Zeitschr. 28 (1928).

Für die Linearität eines 3-Gewebes ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, daß sich innerhalb G die folgenden aus Gewebekurven gebildeten Figuren schließen.



Wir nennen deshalb ein lineares 3-Gewebe auch kürzer „Sechseckgewebe".

Ein Beispiel für einen schon recht schwer zugänglichen Satz ist der folgende allgemein von K. Reidemeister[2]) bewiesene:

Ein 4-Gewebe mit der Eigenschaft, daß jedes der 4 enthaltenen 3-Gewebe Sechseckgewebe ist, ist zu einem topologisch gleichwertig, daß aus 4 Büscheln gerader Linien gebildet wird.

Hier kommen wir ungezwungen zu einer Fragestellung, die bisher völlig ungeklärt ist. Versucht man mit den Hilfsmitteln der Infinitesimalrechnung die Bedingung aufzustellen, daß ein gegebenes 3-Gewebe ein Sechseckgewebe ist, so bekommt man eine Differentialgleichung dritter Ordnung für die Funktionen t_i. Damit diese einen Sinn hat, muß man aber an die Funktionen $t_i(x, y)$ und dann auch an die Abbildungsfunktionen

$$x^* = x^*(x, y),$$
$$y^* = y^*(x, y),$$

die unsere „topologischen" Abbildungen vermitteln, Differenzierbarkeitsforderungen stellen, die durchaus nicht im Wesen der Sache liegen. Unter solchen unsachgemäßen Einschränkungen ist z. B. der genannte Satz Reidemeisters schon früher von Mayrhofer[3]) bewiesen worden.

Es stellt sich also heraus, daß unsere übliche Infinitesimalrechnung ein ungeeignetes Hilfsmittel zur Behandlung der topologischen Differentialgeometrie ist. Daran knüpft sich die Hoffnung, daß man durch systematisches Studium von topologischen Fragen der Differentialgeometrie zu einer vernünftigen Erweiterung der Infinitesimalrechnung kommen werde.

So scheint der von Stieltjes eingeführte Integralbegriff hier nützlich zu sein.

---

[2]) K. Reidemeister, T_5 Math. Zeitschr. **29** (1928).

[3]) K. Mayrhofer, T_3 Math. Zeitschr. **28** (1928).

Ich will Ihnen Beispiele von Sätzen anführen, deren Beweise bisher nur unter den erwähnten häßlichen Einschränkungen gelungen sind. Zunächst der folgende von Howe und mir herrührende:

Jedes geradlinige und lineare n-Gewebe besteht aus Tangenten einer ebenen algebraischen Kurve n-ter Klasse.[4])

Wie mir kürzlich erzählt wurde, soll dieser Satz aber inzwischen von französischen Geometern allgemein bewiesen sein.

Um zu einem zweiten Beispiel zu kommen, bemerken wir, daß auf Grund des Theorems von Abel für ein n-Gewebe, das aus den Tangenten einer algebraischen Kurve n-ter Klasse vom Geschlecht p nicht nur eine Relation $t_1 + \ldots + t_n = 0$ besteht, sondern sogar p linear unabhängige

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^{(k)}(x, y) = 0; \qquad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Nennen wir nun die Höchstzahl linear unabhängiger Relationen dieser Art für ein gegebenes Gewebe seinen Rang, so gilt folgender Satz von G. Bol[5]):

Der Höchstrang aller n-Gewebe ist

$$m = \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2).$$

Während auch dieser Satz bisher nur unter den bedauerlichen Beschränkungen bewiesen ist, steht es mit der folgenden Behauptung noch schlimmer:

Ein n-Gewebe vom Höchstrang m ist notwendig einem geradlinigen gleichwertig.

Der von mir gegebene „Beweis" dieser Behauptung[6]) enthält nämlich eine wesentliche Lücke. Es scheint mir des Schweißes der Edlen wert, dieser merkwürdigen Umkehrung des Abelschen Theorems weiter nachzuspüren. Nebenbei sei erwähnt, daß diese Dinge aufs innigste mit mehrdimensionaler projektiver Differentialgeometrie verknüpft sind. Vielleicht darf man hier die Hoffnung auf einen neuen Zugang zur algebraischen Geometrie hegen und auf eine unerwartete Verbindung scheinbar so getrennter Gebiete wie algebraische Geometrie, Topologie und Differentialgeometrie.

Zum Schluß noch einen Hinweis auf ähnliche Fragen der räumlichen Topologie. Es seien

$$s_i(x, y, z) = \text{konst.}, \qquad i = 1, 2, 3$$
$$t_i(x, y, z) = \text{konst.}$$

[4]) W. Blaschke und G. Howe, T_{44} Hamburg. Abhandlungen 9 (1932).
[5]) Vgl. W. Blaschke, T_{49} Hamburg. Abhandlungen 9 (1933).
[6]) T_{50} ebenda. Für $n = 4$ ist der Nachweis leicht zu erbringen (Lie).

drei Kurvenscharen im x, y, z-Raum, die in einem Gebiet dieses Raumes ein räumliches Kurvengewebe bilden. Die Höchstzahl linear unabhängiger Identitäten in x, y, z vom Typ

$$f_1(s_1, t_1) + f_2(s_2, t_2) + f_3(s_3, t_3) = 0$$

ist fünf. Alle zugehörigen 3-Gewebe sind geradlinig und lassen sich in einfacher Weise aus den geraden Linien auf einer Hyperfläche dritter Ordnung im projektiven vierdimensionalen Raum herleiten.[7][8])

Meine Herren! Man kann vom politischen und wirtschaftlichen Standpunkt aus nicht ohne weiteres behaupten, daß die Welt, in der wir heute leben, dem Ideal von der besten aller denkbaren Welten entspricht. Anders in der Mathematik! Es scheinen da gerade in den letzten Jahren die verschiedenen scheinbar völlig getrennten Zweige in überraschender Weise zu einer idealen Einheit zusammen zu wachsen. Es sind also vielleicht gerade wir Mathematiker (oder wenigstens die Mehrzahl unter uns) dazu berufen, das gegenseitige Verständnis und die gegenseitige Achtung der Völker zu fördern, da wir einem gemeinsamen Ziel zustreben, das weitab vom Lärm der Straße hoch über den Wolken thront.

Sur les courbes analytiques dans les espaces hermitiens.

O. Borůvka, Brno.

Dans l'espace hermitien parabolique à r dimensions K_r, déterminé par la forme $z_1\bar{z}_1 + \ldots + z_r\bar{z}_r$, une courbe analytique est l'ensemble de points $z_\alpha = y_\alpha(z)$, $1 \leq \alpha \leq r$, les $y(z)$ étant des fonctions analytiques de la variable complexe $z = x + iy$. Une telle courbe, supposée d'appartenir à l'espace, peut être définie par un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned} dy &= (\omega_1 + i\omega_2)\, n_0, \\ dn_\alpha &= -\,R_\alpha\,(\omega_1 - i\omega_2)\, n_{\alpha-1} + i\tilde{\omega}_\alpha n_\alpha + R_{\alpha+1}\,(\omega_1 + i\omega_2)\, n_{\alpha+1}, \qquad (1) \\ &\qquad (\alpha = 0, \ldots, \quad r - 1;\ R_0 = R_r = 0), \end{aligned}$$

les ω, $\tilde{\omega}$ étant des formes de Pfaff réelles en x, y telles que $\tilde{\omega}_0 + \ldots + \tilde{\omega}_{r-1} = 0$ et les R étant certaines fonctions analytiques de x, y, réelles et positives. Dans la représentation habituelle de l'espace K_r sur l'espace euclidien réel S_{2r}, l'image de la courbe $y(z)$ est une surface caractéristique et l'étude du système (1), en relation avec la représentation en question, conduit à de nombreux théo-

[7]) W. Blaschke und P. Walberer, T_{56} Hamburg. Abhandlungen **10** (1934).

[8]) Zur topologischen Differentialgeometrie vergleiche man auch insbesondere das neuerscheinene Buch von E. Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Leipzig u. Berlin, 1934.