Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

O hmotě trojosého ellipsoidu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 4, 188--189

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123547

rozšířiti tuto theorii nejen na čísla z podoby $(2a)^{2^n}+1$, nýbrž i na $\frac{1}{2}[(2a+1)^{2^n}+1]$, zdá se pak, že je bude lze při menší práci rozvrhovati v součin řad

$$\sum_0^k (A_k \cdot 2^{\alpha+k}+1) \times \sum_0^r (Br \cdot 2^{\alpha+r}+1).$$

O hmotě trojosého ellipsoidu.

(Příklad na integraci trojnásobnou.)

Zaslal

Dr. K. Zahradník v Záhřebě.

Dán budiž ellipsoid a kužel rotační s vrcholem ve středu ellipsoidu položeným, jehož osa splývá s jednou osou ellipsoidu. Předpokládejme, že je hmota v rovnoběžných vrstvách kolmo na osu kužele vedených stejná, avšak že hutnosti přibývá v poměru vzdálenosti od vrchole. Jaká jest hmota kužele omezeného ellipsoidem?

Uzavírá-li povrchová přímka kužele s osou jeho úhel φ, tu bude, je-li osa c ellipsoidu zároveň osou kužele rovnice tohoto kužele**), značí-li $\lambda = tg\,\varphi$,

$$x^2+y^2-\lambda^2 z^2=0,$$

a rovnice ellipsoidu je, jak známo,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1.$$

Kužel protíná ellipsoid ve křivce, mající za průmět na rovinu XY ellipsu; jsou-li osy té ellipsy α, β, platí

$$\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2\lambda^2}$$

$$\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2\lambda^2}.$$

*) Porovnej *Studnička*: „Poznáka o číslech kmenných". Časop. p. pěst. math. a fys. R. VIII pag. 36.

**) Viz Dr. *Studnička*: „Úvod do analytické geometrie v prostoru" pag. 61.

Zákon hutnosti vyjádřuje rovnice

$$h = \varrho z,$$

a hmotu podává nám trojnásobný integral

$$M = 4\varrho \int_0^\alpha \int_0^{\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} \int_{\frac{1}{\lambda}\sqrt{x^2+y^2}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z\,dz\,dy\,dx =$$

$$= 2\varrho c^2 \int_0^\alpha \int_0^{\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} \left[\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) - \frac{y^2}{\beta^2}\right] dy\,dx = \frac{4}{3}\,\varrho\,\beta\,c^2 \int_0^\alpha \left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \varrho \,.\, \pi\alpha\beta \,.\, \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Pro $\varphi = 90^0$ přejde kužel v rovinu XY; v případě tomto je $\alpha = a$, $\beta = b$, a M hmotou polovice ellipsoidu nad rovinou XY se nacházející, přibývá-li hustoty stejnoměrně se vzdáleností od roviny XY, tudíž ve směru osy c. Označíme-li tuto hmotu poloellipsoidu M_c', je

$$M_c' = \frac{1}{4}\,\varrho\,\pi\,abc^2$$

Má-li pak M_a', M_b' obdobný význam, platí tedy

$$M'_a : M'_b : M_c = a : b : c.$$

Úlohy.

Řešení mathematické úlohy 16.

Podal *Stan. Prachenský*, žák VIII tř. r. g. m. v Praze.

Položíme-li v dané soustavě

$$x + y = u + v = z$$
$$xy = uv = r$$

bude

$$x = z - y = \frac{r}{y},$$

$$u = z - v = \frac{r}{v},$$