Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sucharda

O trochoidách ohnisek kuželoseček, když pudící jest přímka

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 4, 166--175

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123546

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1879

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O trochoidách ohnisek kuželoseček, když pudící jest přímka.

Podává

Ant. Sucharda.

V čísle I. ročníku VIII. tohoto časopisu zmiňuje se pan dr. *Seydler* v pojednání „o rovnovážných tvarech kapalin, nepodrobených silám zevnějším", o zajímavé větě, kterou *Delaunay* objevil a *Lamarle* zvláštními methodami geometrickými dokázal, a kteráž ukazuje, že rovnovážné tvary rotační spolu souvisí.

Věta ona praví totiž, že křivky meridialné těchto ploch jsou totožny s trochoidami ohnisek kuželoseček, jež pojímáme co ideály hran křivých, valících se po hraně přímé.

Nebude snad od místa, odvoditi cestou analytickou rovnice těchto trochoid.*)

Znamenejž půdici (přímku řídící) v soustavě souřadné pravoúhlé rovnice

$$y = 0, \tag{1}$$

křivku tvořící stupně druhého v soustavě polárné rovnice

$$\varrho = \frac{\varepsilon m}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \tag{2}$$

kdež ε znamená výstřednost numerickou, m pak vzdálenost ohniska trochoidu určujícího od přímky řídící této kuželosečky, konečně pak budiž

$$\eta = \varphi(\xi) \tag{3}$$

rovnice hledané trochoidy v soustavě pravoúhlé.

Třeba tu užíti známých rovnic všeobecných

$$\left((\xi - x + (\eta - y)\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{1 + \left(\varrho\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2} + \varrho\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0 \tag{4}$$

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \varrho^2 \tag{5}$$

$$(\xi - x) + (\eta - y)\frac{d\eta}{d\xi} = 0 \tag{6}$$

---

*) Použijeme tu spůsobu, který uvádí prof. dr. *F. J. Studnička* ve spise „Základové vyšší mathematiky" v dílu III. pag. 85. Viz téhož spisovatele článek „Poznámka k theorii trochoid". Časop. pro p. math. a fys. Roč. I. pag. 252.

Dosadíme-li do nich hodnoty za y a $\frac{dy}{dx}$ hodnoty plynoucí z rovnice (1), za ϱ a $\frac{d\varphi}{d\varrho}$ z rovnice (2) obdržíme

$$(\xi - x)^2 \left[\frac{1 - \varepsilon \cos \varphi}{- \varepsilon \sin \varphi}\right]^2 = \left(\frac{\varepsilon m}{1 - \varepsilon \cos \varphi}\right)^2, \tag{4'}$$

$$(\xi - x)^2 + \eta^2 = \left(\frac{\varepsilon m}{1 - \varepsilon \cos \varphi}\right)^2, \tag{5'}$$

$$\xi - x + \eta \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \tag{6}$$

z kterýchžto tří rovnic vyloučíme x a φ, abychom žádanou rovnici trochoidy obdrželi.

Z rovnic (4') a (5') vylučme především φ. Z (5') tu vychází

$$(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2 = \frac{\varepsilon^2 m^2}{(\xi - x)^2 + \eta^2},$$

z čehož jde

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2} - \varepsilon m}{\varepsilon \sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2}},$$

$$\varepsilon^2 \sin^2 \varphi = \frac{[(\xi - x)^2 + \eta^2](\varepsilon^2 - 1) + 2\varepsilon m \sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2} - \varepsilon^2 m^2}{(\xi - x)^2 + \eta^2},$$

z čehož následuje

$$\left(\frac{1 - \varepsilon \cos \varphi}{- \varepsilon \sin \varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2 m^2}{[(\xi - x)^2 + \eta^2](\varepsilon^2 - 1) + 2m\varepsilon \sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2} - \varepsilon^2 m^2}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do (4'), obdržíme

$$(\xi - x)^2 \left[\frac{\varepsilon^2 m^2}{[(\xi - x)^2 + \eta^2](\varepsilon^2 - 1) + 2m\varepsilon \sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2} - \varepsilon^2 m^2}\right] = \eta^2 \tag{7}$$

Z rovnice této odstraňme x pomocí (6'); obdržíme tu, dělíce zároveň po obou stranách η^2,

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon^2 m^2}{\eta^2 \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + 1\right](\varepsilon^2 - 1) + 2 m \varepsilon \eta \sqrt{\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + 1} - \varepsilon^2 m^2}\right)$$

$$- 1 = 0,$$

z čehož povstane napřed

$$\sqrt{\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + 1}\, [\varepsilon^2 m^2 - \eta^2 (\varepsilon^2 - 1)] - 2m \varepsilon \eta = 0 \tag{8}$$

a dalším řešením

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\sqrt{4\varepsilon^4 m^2 \eta^2 - [\varepsilon^2 m^2 - \eta^2 (\varepsilon^2 - 1)]^2}}{\varepsilon^2 m^2 - \eta^2 (\varepsilon^2 - 1)}; \tag{9}$$

rozloučíme-li konečně proměnné, povstane integrováním:

$$\xi = \int \frac{d\eta\, [\varepsilon^2 m^2 - \eta^2 (\varepsilon^2 - 1)]}{\sqrt{4\varepsilon^2 m^2 \eta^2 - [\varepsilon^2 m^2 - \eta^2 (\varepsilon^2 - 1)]^2}} \tag{10}$$

co hledaný výraz pro trochoidu ohniska kuželosečky. Snadno obdržíme z toho výrazy pro trochoidy jednotlivých kuželoseček, pojímáme-li ε jedenkráte co numerickou výstřednost *hyperboly*, po druhé *ellipsy*, po třetí pak *paraboly*; zjednodušíme pak výrazy tyto, položíce za toto ε, pak za m hodnoty známé, jež jsou funkcemi poloos a a b.

Při hyperbole máme tu

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad m = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{11}$$

kteréžto hodnoty do (10) dosadíce, po krátké redukci obdržíme

$$\xi = \int \frac{d\eta\, (b^2 - \eta^2)}{\sqrt{4a^2 \eta^2 - (b^2 - \eta^2)^2}} \tag{I}$$

co rovnici trochoidy ohniska hyperboly

Pro ellipsu jest

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad m = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \tag{12}$$

i obdržíme cestou podobnou

$$\xi = \int \frac{d\eta\, (b^2 + \eta^2)}{\sqrt{4a^2 \eta^2 - (b^2 + \eta^2)^2}}, \tag{II}$$

co rovnici trochoidy ohniska ellipsy.

Pro parabolu konečně platí

$$\varepsilon = 1, \quad m = p,$$

kdež p znamená parametr, i vychází příslušným dosazením

$$\xi = \int \frac{d\eta}{\sqrt{\frac{4\eta^2}{p^2} - 1}}. \tag{III}$$

Zbývá nyní jen ustanoviti zakončeným tvarem v rovnicích (I.), (II.), (III.) obsažené integrály; toho však nutno se v prvých dvou případech odříci, anyť integrály tam se vyskytující vedou k integrálům elliptickým.

Vyjádříme tedy η co funkci oblouku s hledané trochoidy, přidržíce se spůsobu, ku kterémuž v *Cauchy-ho* „Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral“ poukazuje *Moigno*. (Fasc. I. pag. 218.)

Z rovnice (8) vychází totiž

$$\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}=\frac{2m\,\varepsilon\eta}{\varepsilon^2 m^2-\eta^2(\varepsilon^2-1)},$$

čili, dosadíme-li za ε a m hodnoty v (11) uvedené

$$\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}=\frac{2a\eta}{b^2-\eta^2}.$$

Jelikož pak, jak známo,

$$ds=dx\sqrt{1+y'^2},$$

jest v případu našem

$$ds=\frac{2a\,\eta\,d\xi}{b^2-\eta^2},$$

čili, dosadíme-li za $d\xi$ hodnotu z rovnice (9) plynoucí,

$$ds=\frac{2a\eta\,d\eta}{\sqrt{4a^2\eta^2-(b^2-\eta^2)^2}}.$$

Integrujíce, obdržíme z toho

$$s=\int\frac{2a\eta\,d\eta}{\sqrt{4a^2\eta^2-(b^2-\eta^2)^2}},$$

kterýž integrál snadno se rozřeší.

Nazveme-li integrační stálou s_1, zní výsledek následovně:

$$s=a\,arc\,sin\,\frac{\eta^2-2a^2-b^2}{2a\sqrt{a^2+b^2}}+s_1,$$

a zavedeme-li tu zpět numerickou výstřednost hyperboly,

$$s=a\,arc\,sin\,\frac{\eta^2-a^2(1+\varepsilon^2)}{2a^2\varepsilon}+s_1,$$

z čehož řešením dle η^2 vychází

$$\eta^2=a^2\left(1+2\,\varepsilon\,sin\,\frac{s-s_1}{a}+\varepsilon^2\right) \qquad \text{(IV)}$$

co hledaný výraz mezi pořadnicí a obloukem trochoidy ohniska hyperboly.

Touže kráčejíce cestou, snadno si opatříme obdobný výraz pro trochoidu ohniska ellipsy, kterýž zní

$$\eta^2 = a^2 \left(1 + 2\varepsilon \sin \frac{s - s_1}{a} + \varepsilon^2\right). \qquad \text{(V.)}$$

Výraz to zevně shodný s předcházejícím, podstatně však od něho rozdílný potud, pokud tuto ε znamená numerickou výstřednost ellipsy, s pak oblouk trochoidy ellipsou odvozené.

Konečně obraťme se k řešení integrálu v rovnici (III.) obsaženého.

Řešení nečiní nižádných obtíží, pročež v případě tomto netřeba se uchylovati ke spůsobům předešlým.

Jeť tu podle známého vzorce:

$$\xi = \frac{p}{2}\, l\left(\frac{2\eta}{p} + \sqrt{\frac{4\eta^2}{p^2} - 1}\right),$$

z čehož, odstraníme-li logarithmus a pak mocninu po pravé, vychází po krátkém upravení

$$\eta = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2\xi}{p}} + e^{\frac{-2\xi}{p}}\right),$$

z čehož poznáváme, že trochoidou ohniska paraboly jest řetězovka, jejíž parametr rovná se poloparametru dané paraboly.

I. Poznámka. Majíce na zřeteli rovnici trochoidy ohniska hyperboly neb ellipsy, totiž

$$\eta^2 = a^2 \left(1 + 2\varepsilon \sin \frac{s - s_1}{a} + \varepsilon^2\right),$$

určeme maxima a minima pro η.

K tomu cíli differencujme, dříve po obou stranách oddvojmocnivše, dle s, čímž obdržíme

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{a\varepsilon \cos \frac{s - s_1}{a}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \sin \frac{s - s_1}{a} + \varepsilon^2}}$$

Má-li pravá strana rovnati se nulle, musí

$$\cos \frac{s - s_1}{a} = 0, \text{ a tedy}$$

$$s = \frac{\pi a}{2} + s_1, \frac{3\pi a}{2} + s_1, \ldots \qquad (13)$$

Toť tedy oblouky, pro které jest η nejmenší a největší. Rozdíl dvou takových po sobě následujících oblouků jest konstantní, obnášeje πa, z čehož patrno, že od jednoho ke druhému z vrcholových bodů křivky ohniskem stanovené má tato délku poloviny kruhu, sestrojeného nad realnou (velkou) osou dané hyperboly (ellipsy).

Délka oblouku trochoidy, příslušné ohnisku hyperboly neb ellipsy, když půdicí jest přímka, rovná se tedy, myslíme-li si jediné odvalení, obvodu kruhu, sestrojeného nad realnou neb velkou osou.

Jelikož délka druhé osy v počtu se nevyskytuje, patrno, že veškeré hyperboly, jichž realné, a ellipsy, jichž velké osy mají tutéž délku, stanoví na vzájem stejně dlouhý oblouk trochoidy (myslíme-li jedno odvalení).

II. Poznámka. Dosadíme-li do rovnice (IV.) neb (V) hodnoty za $\sin \frac{s - s_1}{a}$ z rovnice (13) plynoucí, totiž $+1$ a -1,-obdržíme, spolu oddvojmocnivše

$$y_1 = a(1 + \varepsilon), \quad y_2 = a(1 - \varepsilon),$$

čili

$$y_1 = a + e, \; y_2 = a - e,$$

první co maximalní, druhou co minimalní hodnotu pořadnice trochoidy ohniska hyperboly a ellipsy.

O správnosti výsledků těchto lze se ostatně i prostou úvahou přesvědčiti.

Budiž tu ještě uvedena zvláštní vlastnost křivek uvažovaných, kterou ukazuje prof. Dr. Fr. J. Studnička, ve svém počtu variačním (Základové vyšší mathematiky díl III. pag. 291.), hledaje křivku takovou, aby plocha rotační, určena jí co křivkou meridiálnou a danou osou otáčení, při stejném povrchu zahrnula ohsah co možno největší.

Z differenciální rovnice, jež tam platí pro podmínky tyto, vychází na jevo, že úlohu tu řeší křivky právě uvedené, o nichž z téže rovnice dokazuje se tam dále, že součet převratných hodnot normály a poloměru křivosti při každé z nich jest veličina stálá.

Vlastnost to, pro kterou křivky uvažované mají zajímavý pro fysiku význam, jejž byl Dr. Seydler v svrchu uvedeném článku vyložil.

Poznámka o grafickém sestrojení.

Po vytčení trochoidy ohniska paraboly, kteráž, jsouc řetězovkou, i jinak dá se zobraziti, bude k sestrojení obrazů trochoid kuželoseček vhodno užiti jiného spůsobu, než grafického vyjádření rovnic nalezených, jelikož tyto v případě našem vyjadřují souvislost mezi pořadnicí a obloukem, čehož při grafickém sestrojení užiti nelze. Zbývá tu tedy jediná cesta, jaká při trochoidách vůbec se poroučí. (Viz na př. prof. Fr. Tilšera „Soustava deskriptivní geometrie“.) Zobrazíme křivku „tvořící“ čarou $\breve{\overline{K}}_1$ (obr. 2.), přímku řídící pak čarou $\overline{X}_1$. V čáru $\breve{\overline{K}}_1$ vneseme stejné délky pořadem, tak malé, aby délky tetiv takto určených nelišily se značně od příslušných oblouků. V téže stálé délce v čáře $\overline{X}_1$ po sobě následujícím tečkám odpovídají obdobně označené v čáře křivé. Patrno též, že odpovídá-li (obecně) tečce $k_{\breve{\overline{K}}_1}$ tečka $k_{\overline{X}_1}$, že tečně $\overline{Tk}_{\breve{\overline{K}}_1}$ odpovídá čára $\overline{X}_1$. I sestrojíme k čáře $\breve{\overline{K}}_1$ v $k_{\breve{\overline{K}}_1}$ tečnu, k této pak čarou kolmou z obrazu ohniska tato vztáhneme. Vzdálenost jeho v, vzdálenost pak paty té kolmice od $k_{\breve{\overline{K}}_1} = {}'v$ budou délky, z nichž poslednější (obr. 3.) v $\overline{X}_1$ od $k_{\overline{X}_1}$ v příslušném smyslu vnésti musíme. Na kolmici na konci ku $\overline{X}_1$ vztýčené vnešená délka v ustanovuje τf_1 obraz ohniska, tedy obraz bodu trochoidy v případě předloženém. Máme-li na zřeteli trochoidu ohniska ellipsy, patrno, že na pořadnici tečky, jež obrazem částice, s kterou při valení sjednotí se ohnisku bližší vrchol velké osy, bude dolní, nad onou, s níž sjednotí se vrchol protější, horní vrchol obrazu trochoidy; vzdálenost obou pořadnic rovná se tedy polovině oblouku ellipsy. Kol vrchole dolního je trochoida ku přímce řídící vypuklá, kol horního vydutá.

Mezi oběma vrcholy bude tedy vždy bod obratu, který dlužno zobraziti. Snadno se pozná, že část vypuklou stanoví jedna, vydutou druhá polovice obvodu elliptického, z čehož jde, že bod obratu odpovídá vždy vrcholu osy menší, a je tedy od X vzdálen o menší poloosu. Přeneseme-li tedy (viz obr. 3.) od tečky, jež odpovídá místu, s nímž stotožní se vrchol osy menší,*)

---

*) Tečka ta půlí vzdálenost obrazu pořadnic vrcholu max. a minimálného.

v příslušném smyslu na X_1 lineárnou excentricitu, na konci pak vztýčíme kolmici délky b, máme již bod obratu zobrazen. Tečna bodu tohoto jest normálnou na přímku, spojující vrchol osy menší s bodem obratu.*) Jiných důležitých bodů tu není, i lze podle řečeného obraz dostatečně přesný docíliti.

Téhož způsobu přidržíme se při zobrazování trochoidy ohniska hyperboly; že však tato křivkou, z dvou nekonečných větví složenou, třeba tu užiti jisté opatrnosti.

Bod trochoidy, odpovídající případu, v kterém stýká se nekonečně vzdálený bod hyperboly s přímkou řídící, nelze totiž zobraziti způsobem při ostatních užitým; jeť tu δ_1 nekonečně velké. Tu stotožní se příslušná asymptota s X, zároveň pak dotýká se v témže bodu, pojatém ve smyslu opačném, druhá větev hyperboly přímky řídící. Majíce si tu pomoci, pokračujme následovně:

Předpokládejme, že vrchol $v_{\breve{\overline{K}}}$ hyperbolické hrany hybné stýkal se s $u_{\overline{X}}$, načež hrana počala se valiti. Dráha libovolné, tedy i vrcholové části její $v_{\breve{\overline{K}}}$ určí při tomto pohybu část evolventy $\breve{\overline{E}}_v$ vrchole hyperboly $\breve{\overline{K}}$; evolventa dospěla by až k poslednímu bodu svému $t_{\breve{\overline{E}}}$, kdyby hrana mohla se odvalovati nekonečně dlouho, tak že by asymptota $\overline{A}$ hyperboly hraně této odpovídající (náležitá příslušnému rameni) stotožnila se s přímkou $\overline{X}$; pak by též konečný bod evolventy vrchole**) $t_{\breve{\overline{E}}}$ s bodem u_X, z kterého se bylo začalo, se sjednotil.

Třeba tedy jen určiti bod $t_{\breve{\overline{E}}}$ evolventy vrchole $v_{\breve{\overline{K}}}$, a že tento stotožní se s $u_{\overline{X}}$, jež v $\overline{X}$ jsme sobě vytkli, určiti nový bod ${}^{\tau}v$ tak, aby byl s $\overline{X}$ a u_X v takové vzájemnosti, jako $v_{\breve{\overline{K}}}$ s $\overline{A}$ a $t_{\breve{\overline{E}}}$. Toto ${}^{\tau}v$ znamená patrně vrchol příslušného ramene hyperbolického po myšleném odvalení nekonečné větve; snadno zobrazíme též střed ${}^{\tau}s$ i ohnisko ${}^{\tau}f$ této poloze příslušné a brzo se pozná, že pořadnice příslušná má délku, rovnou vzdálenosti ohniska od asymptoty, tedy rovnou poloose imaginárné.

---

*) Toť vychází z obecného zákona o stanovení tečen ke trochoidám. Viz ku př. (obr. 4.) tečnu v obecném bodu ${}^{\tau}f$.

**) Evolventu tuto nejsnáze zobrazíme co orthogonalní trajektorii tečen hyperboly, jelikož pak těchto lze sestrojiti množství libovolné, bude žádoucí obraz evolventy dostatečně přesný.

Toť ta jediná délka, která se při *obou* ramenech hyperboly co vzdálenost ohniska od tečny vyskytuje, z čehož vychází, že bod τf má při trochoidě ohniska hyperboly tutéž úlohu, jako bod obratu při trochoidě ohniska ellipsy: spojuje ramena trochoidy, příslušná jedné a druhé větvi oblouku hyperbolického. Jest tedy přechodem od části vyduté k vypuklé, není však — jak z pouhého již názoru vychází — bodem obratu. Tečna jeho, normála to ku přímce, spojující ji s nekonečně vzdáleným bodem přímky řídící, jest k této normalná, trochoida v sousedství bodu toho rozkládá se po jedné straně této tečny.

Jako prve, i zde má trochoidy část vydutá jeden, část vypuklá též jeden vrchol; první tvoří maximum, druhý minimum příslušné pořadnice. Že maximum obnáší součet, minimum pak rozdíl lineárné výstřednosti a realné poloosy, netřeba tuším podotýkati.

Uvážíme-li, když hyperbola byla v poloze přechodné, že obě ramena přímce $\overline{X}$ asymptoticky se blížila a střed její přišel do τs, dále, že vrchol v ramene, jež odpovídá hraně právě se valící, byl v případu maximální úsečky v τv, poznáváme, že, kdyby vykonati mohla hrana druhé větvi odpovídající tutéž nekonečnou dráhu, (jíž odpovídá oblouk z nekonečna až k vrcholi $'v$), vrchol tento setkal by se s $\overline{X}$ v $\tau_1 v$, pro které bude $\delta(\tau_1 v \ldots . \tau s) = \delta(\tau v \ldots . \tau s)$.

Na pořadnici tohoto τv arci nalezá se vrchol minimální (ve výšce prv vytknuté), jako byl maximální na oné bodu τv.

Dle toho dovedeme zobraziti vrchol maximální, část vydutou od tohoto až k bodu přechodu v část vypuklou, konečně i vrchol této.

Nyní lze snadno cestou obecnou i tuto větev od vrchole jejího až k onomu přechodu sestrojiti. Aby nyní obraz trochoidy, odpovídající jedinému odvalení, byl úplný, třeba jen část vydutou vzhledem k čáře přímé, znamenající pořadnici maximálního, vypuklou pak vzhledem k oné minimálního vrchole co čarám souměrnosti doplniti tak, aby největší pořadnice přidaných částí rovnaly se každá délce immaginárné poloosy hyperboly předpokládané.

Chcemeli další části nekonečné trochoidy zobraziti, pokračujeme v souměrném doplňování; snadno tu pak poznáme, že bod druhý v trochoidě, mající s minim. vrcholem stejnou úsečku, jest bodem dvojnásobným.

Sestrojíme-li poloměrem rovným pořadnici dvojnásobného bodu A z ohniska f hyperboly $\bar{K}$ kruh, a přeneseme-li vzdálenost bodů dotyčných n a h tečny, společné jemu a hyperbole, od v na obě strany v $\bar{X}$, obdržíme body x a $'\alpha$, které s bodem d určují normály k tečnám v tomto bodu dvojnásobném.

Důkaz pozůstaven buď laskavému čtenáři.

Přesný důkaz rovnoběžníku sil.

Napsal

dr. **A. Seydler.**

Následující důkaz opírá se, vedle běžných výměrů, pouze o tyto tři axiomy:

A. Nemění-li se velkost a relativní poloha jednotlivých sil v bodu působících, nemění se i relativní poloha výslednice v soustavě.

B. Je-li soustava sil v rovnováze, neruší se tato rovnováha připojením neb odloučením jiné soustavy, jež jest o sobě v rovnováze.

C. Síly působící na bod v stejném směru (se stejným neb různým označením) mají výslednici měřenou algebraickým součtem sil.

Z poslední věty plyne: je-li soustava sil na bod působících v rovnováze, lze veškeré síly až na jednu libovolnou nahraditi silou jedinou, jež má se zbývající silou stejnou velkost a stejný směr, ale opáčné označení, aniž by se tím rovnováha porušila; a naopak: není-li soustava sil na bod působících v rovnováze, lze vždy nalézti sílu, kteráž by k soustavě připojena tuto v rovnováhu uvedla. Následkem toho lze pak větu B rozšířiti takto:

B'. Působení *libovolné* soustavy sil nemění se připojením neb odloučením soustavy, jež o sobě jest v rovnováze.